А. Вихлинин

Избранные лекции по курсу «Введение в астрофизику»

Предисловие

В этом документе собраны конспекты некоторых лекций, которые я прочел в 1999-2001 гг. студентам МФТИ в рамках курса «Введение в астрофизику». Лекции были расчитаны на слушателей, которые уже прошли полный курс теоретической физики и математики, но которые, несмотря на то, что областью их научной специализации являются космические исследования, имеют весьма слабое представление о том, что происходит за пределами Солнечной системы.

По тем или иным причинам я старался избегать чисто описательного подхода к изложению, а вместо этого уделял время подробному рассмотрению ряда интересных физических явлений, происходящих в рассматриваемых астрофизических объектах. Должен признаться, что такой подход позаимствован из книги Падманабхана «Астрофизика в задачах».

Особняком стоит попытка сделать первоначальное введение в общую теорию относительности. К сожалению, эйнштейновская теория гравитации, которая составляет одну из основ современного физического мировоззрения, не рассматривается в рамках обязательного курса теоретической физики МФТИ. Я взял на себя смелость восполнить этот пробел. Сообразно с общей идеей курса, упор делался не на последовательное изложение, а на подробное и полное рассмотрение нескольких важных задач, таких как метрика Шварцшильда и фридмановское расширение Вселенной. Надеюсь, что демонстрация того, что даже весьма ограниченных знаний хватает для решения этих известных и важных задач, сломила в моих слушателях боязнь непостижимой сложности ОТО!

В лекциях не только полностью отсутствуют оригинальные научные результаты, но и даже большинство педагогических приемов скомпилированы из следующих замечательных книг: Шапиро, Лайтман и Рыбики «Процессы излучения в астрофизике»; Падманабхан «Астрофизика в задачах»; Ландау и Лифшиц «Теория поля»; Зельдович и Новиков «Теория тяготения и эволюция звезд» и «Строение и эволюция Вселенной»; Мизнер, Торн и Уиллер «Гравитация»; Кэрролл «Лекции по ОТО»; Пиблс «Основы физической космологии». Отсылаю заинтересованного читателя к этим книгам как к первоисточникам.

А. Вихлинин

Оглавление

1 Процессы излучения **7**
1.1 Тормозное излучение . . . 7
1.1.1 Излучение электрона одной скорости на одном прицельном расстоянии . . . 7
1.1.2 Интегрируем по прицельным расстояниям . . . 8
1.1.3 Тепловое тормозное излучение . . . 9
1.2 Синхротронное излучение . . . 9
1.2.1 Общая мощность синхротронного излучения . . . 10
1.2.2 Спектр синхротронного излучения . . . 10
Синхротронный спектр для степенного распределения электронов по энергиям 11
1.3 Обратное комптоновское рассеяние . . . 11
1.3.1 Сводка результатов . . . 11
1.3.2 Изменение энергии фотона при рассеянии на движущемся электроне . . . 12
1.3.3 Сила давления на покоящийся электрон . . . 12
1.3.4 Сила трения излучения на электрон в изотропном, покоящемся поле излучения 12
1.3.5 Мощность обратного комптоновского излучения . . . 13
Похожесть на синхротронное излучение . . . 13
1.3.6 Среднее наращивание энергии на одном комптоновском рассеянии в тепловом газе электронов . . . 14
Полнота соотношения (1.41) . . . 14

2 Перенос излучения **17**
2.1 Уравнение переноса . . . 17
только излучение: $\alpha_\nu = 0$ . . . 17
только поглощение: $j_\nu = 0$ . . . 17
2.2 Оптическая толща и функция источника . . . 17
Явление потемнения к краю лимба и образование линий поглощения . . . 18
2.3 Рассеяние . . . 18
Только рассеяние: броуновское движение фотонов . . . 19
Одновременное рассеяние и поглощение . . . 19
Броуновское движение фотонов в случае рассеяния + поглощения . . . 19
2.3.1 Росселандовское приближение . . . 20

3 Эволюция звезд **23**
3.1 Образование звезды из сгустка — Джинсовская масса . . . 23
3.2 Загорание ядерных реакций — минимальная масса звезды . . . 25
3.2.1 При какой температуре начинаются термоядерные реакции? . . . 25
Вероятность туннелирования для кулоновского барьера . . . 25
Усреднение вероятности туннелирования по максвелловскому распределению . 26
Скорость реакции . . . 27
3.2.2 Максимальная температура в облаке газа заданной массы . . . 28
Минимальная масс звезды . . . 28
3.3 Смерть звезды — белые карлики, предел Чандрасекара . . . 29
3.3.1 Устойчивость политропных сфер . . . 29
3.3.2 Верхний предел на массу белого карлика — упрощенный подход . . . 29
3.3.3 Масса Чандрасекара — точный подход . . . 31

3.3.4 Нейтронные звезды, черные дыры . . . 32

4 Введение в ОТО 33
4.1 Вводные замечания . . . 33
4.1.1 Пример с вращающимся диском . . . 34
Использование g_{ik} для измерения времени и расстояний . . . 34
4.2 Векторы, тензоры, etc. . . . 35
4.3 Ковариантное дифференцирование . . . 36
4.3.1 Связь символов Кристоффеля с метрическим тензором . . . 37
4.4 Тензор кривизны . . . 37
4.5 Уравнения Эйнштейна . . . 38
4.5.1 Тензор энергии-импульса для газа . . . 39
4.6 Слабое поле . . . 39
4.7 Центрально-симметричное поле: метрика Шварцшильда . . . 40
4.7.1 Вычисление Γ^i_{kl} . . . 41
4.7.2 Вычисление R_{km} . . . 43
4.7.3 Вычисление R^k_m . . . 46
4.7.4 Уравнения Эйнштейна . . . 47
4.7.5 Уравнения в пустоте — метрика Шварцшильда . . . 47
4.7.6 Обсуждение свойств метрики Шварцшильда . . . 48
Горизонт событий . . . 48
4.7.7 Движение в поле Шварцшильда . . . 49
Уравнения движения . . . 49
Векторы Килинга и законы сохранения . . . 49
Законы сохранения в поле Шварцшильда . . . 50
Радиальное падение . . . 51
Орбитальное движение . . . 52

5 Космология 53
5.1 Расширение Вселенной — уравнения Фридмана . . . 53
5.1.1 Общий вид метрики однородного изотропного пространства . . . 53
5.1.2 Уравнения Фридмана . . . 55
Вычисление R_{ik} . . . 55
Уравнения Эйнштейна . . . 58
5.2 Процессы на «горячей» стадии . . . 59
5.2.1 Адиабатичность эволюции Вселенной . . . 59
5.2.2 Закон расширения в радиационно-доминированной фазе . . . 61
5.2.3 Энтропия невырожденных релятивистских частиц . . . 62
5.3 Эволюция крупномасштабной структуры . . . 62
5.3.1 Основные результаты линейной теории . . . 62
5.3.2 Рост сферически симметричных возмущений . . . 62
линейные сферические возмущения . . . 62
зависимость роста возмущений от космологии . . . 63

Глава 1

Процессы излучения

В оптике видны обычные объекты — звезды, подобные Солнцу, а на других длинах волн — интересные объекты.

Почему чернотельное излучение редко важно для экстремальных объектов?
Скажем, $T = 10$ кэВ, $R = 10$ км, $L = \sigma T^4 4\pi R^2 = 1.3 \times 10^{41}$ эрг/с, что составляет 1000 Эдингтоновских светимостей для объекта массой в 1 солнечную.

Эдингтоновская светимость
$f_p = \sigma_T L/4\pi R^2/c$, $f_{\rm grav} = GMm_p/R^2$
$L_E = 4\pi GMm_p c/\sigma_T = 10^{38} M/M_\odot$.
Если светимость превысит Эдингтоновкую, то тогда

1. будет сдуваться вещество
2. исчезнет основной источник энергии — аккреция.

Из-за своей высокой эффективности чернотельное излучение почти никогда не встречается в экстремальных объектах. Следовательно, излучение, как правило, рождается в оптически тонких областях, и поэтому важен конкретный механизм генерации излучения. Для нас наиболее важны

1. тормозное
2. синхротронное
3. обратный Комптон-эффект

1.1 Тормозное излучение

Полное рассмотрение этой задачи можно найти в ЛЛ-II (§70). Здесь рассматриваем в приближении слабых столкновений.

Тормозное излучение — это дипольное излучение, возникающее в плазме при рассеянии электронов на ионах.

Задача
Почему не рассматриваем электрон-электронные взаимодействия?

1.1.1 Излучение электрона одной скорости на одном прицельном расстоянии

Дипольный момент системы электрон-ион есть $\mathbf{d} = -e\mathbf{r}$, а его вторая производная, которая определяет интенсивность дипольного излучения, есть $\ddot{\mathbf{d}} = -e\dot{\mathbf{v}}$. Мы ищем спектр излучения при одном столкновении, а он выражется через Фурье гармонику $\ddot{\mathbf{d}} = -\omega^2 \hat{\mathbf{d}}(\omega)$. Считаем Фурье-преобразование

$$-\omega^2 \hat{\mathbf{d}}(\omega) = -\frac{e}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{v}} e^{i\omega t}\, dt \tag{1.1}$$

Сейчас начинаем применять упрощения, которые не надо делать, если все считать как в ЛЛ. Электрон активно взаимодействует с ионом лишь в течение времени $\tau = b/v$. Замечаем, что если $\omega\tau \gg 1$, синусы в Фурье разложении осциллируют намного быстрее, чем функция меняется, и поэтому интеграл мал. Для $\omega\tau \ll 1$, экспонента близка к единице, и поэтому можно написать

$$\hat{\mathbf{d}}(\omega) \sim \begin{cases} \frac{e}{2\pi\omega^2}\Delta\mathbf{v}, & \omega\tau \ll 1 \\ 0, & \omega\tau \gg 1 \end{cases} \tag{1.2}$$

По формуле интенсивности дипольного излучения

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{8\pi\omega^4}{3c^3}|\mathbf{d}(\omega)|^2 \tag{1.3}$$

имеем

$$\frac{dW}{d\omega} = \begin{cases} \frac{2e^2}{3\pi c^3}|\Delta\mathbf{v}|^2, & \omega\tau \ll 1 \\ 0, & \omega\tau \gg 1 \end{cases} \tag{1.4}$$

Найдем Δv. Для малых изменений скорости достаточно проинтегрировать ускорение в направлении перпендикулярном к траектории.

$$\Delta v = \frac{Ze^2}{m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{b\,dt}{(b^2+v^2t^2)^{3/2}} \tag{1.5}$$

(это следует из формулы для ускорения $a = Ze^2\mathbf{x}/r^3$). Интеграл — табличный, он равен

$$\Delta v = \frac{2Ze^2}{mbv}. \tag{1.6}$$

Получаем

$$\frac{dW(b)}{d\omega} = \begin{cases} \frac{8Z^2e^6}{3\pi c^3m^2v^2b^2}, & \omega\tau \ll 1 \\ 0, & \omega\tau \gg 1 \end{cases} \tag{1.7}$$

1.1.2 *Интегрируем по прицельным расстояниям*

$$\frac{dW}{d\omega\,dV\,dt} = n_e n_i v\int_{b_{\min}}^{\infty}\frac{dW(b)}{d\omega}2\pi b\,db. \tag{1.8}$$

Подстановка аппроксимации на больших b оправдана:

$$\frac{dW}{d\omega\,dV\,dt} = \frac{16e^6}{3c^3m^2v}n_e n_i Z^2\int_{b_{\min}}^{b_{\max}}\frac{db}{b} = \frac{16e^6}{3c^3m^2v}n_e n_i Z^2\ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right), \tag{1.9}$$

где $b_{\max} \simeq v/\omega$. Так как $b_{\max}$ стоит под логарифмом, мы сильно не ошибаемся.

Оценка $b_{\min}$ кажется нелогичной, но ее необходимость исчезает, если делать полное рассмотрение (и получается такой же ответ). $b_{\min} = \frac{4Ze^2}{\pi mv^2}$ из условия $\Delta v \approx v$, т.е. когда приближение слабых столкновений становится неправильным.

Окончательный результат записывается в форме

$$\frac{dW}{d\omega\,dV\,dt} = \frac{16\pi e^6}{3\sqrt{3}c^3m^2v}n_e n_i Z^2 g_{ff}(v,\omega), \tag{1.10}$$

где

$$g_{ff}(v,\omega) = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right). \tag{1.11}$$

Важно ли учитывать дебаевское экранирование?

$$\frac{b_{\max}}{D} = \frac{v}{\omega D} = \frac{v\sqrt{8\pi ne^2}}{\omega\sqrt{kT}} = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{3\cdot 8\pi ne^2}{2m_e}} \approx \frac{3.5\omega_p}{\omega} \ll 1 \tag{1.12}$$

т.е. экранирование заряда для тормозного излучения несущественно.

1.1.3 Тепловое тормозное излучение — интегрируем по максвелловскому распределению скоростей

$$dP \sim \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^2\, dv \tag{1.13}$$

Когда интегрируем по скоростям, должны учесть, что интегрирование надо начинать не с нуля, а с минимальной скорости $v_{\min}$: $^1/_2\, m_e v_{\min}^2 = \hbar\omega$.

Итак, интегрируем:

$$\begin{aligned}\frac{dW(T,\omega)}{dV\,dt\,d\omega} &= \frac{\int_{v_{\min}}^{\infty} \frac{dW(v,\omega)}{d\omega\, dV\, dt}\, v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv}{\int_0^{\infty} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv} \\ &= \frac{16\pi e^6}{3\sqrt{3}c^3m^2}\, n_e n_i Z^2 \frac{\int_{v_{\min}}^{\infty} v \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) g_{ff}\, dv}{\int_0^{\infty} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv}\end{aligned} \tag{1.14}$$

Интеграл вверху можно преобразовать как

$$\begin{aligned}\ldots &= \int_{v_{\min}}^{\infty} v \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv\, \frac{\int_{v_{\min}}^{\infty} v \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) g_{ff}\, dv}{\int_{v_{\min}}^{\infty} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv} = \\ &= \int_{v_{\min}}^{\infty} v \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv\, \overline{g_{ff}}\end{aligned} \tag{1.15}$$

где $\overline{g_{ff}}$ — усредненный по скоростям гаунт-фактор. Теперь для интенсивности тормозного излучения получаем формулу:

$$\begin{aligned}\frac{dW(T,\omega)}{dV\,dt\,d\omega} &= \frac{16\pi e^6}{3\sqrt{3}c^3m^2}\, n_e n_i Z^2 \frac{1}{2} \frac{\frac{2kT}{m}\int_{\hbar\omega/kT}^{\infty} \exp(-x)\, dx}{\left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} x^2 \exp(-x^2)\, dx} \\ &= \frac{32\pi e^6}{3mc^3}\left(\frac{2\pi}{3km}\right)^{1/2} T^{-1/2} Z^2 n_e n_i \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)\overline{g_{ff}}\end{aligned} \tag{1.16}$$

В этом уравнении фактор $T^{-1/2}$ в конечном счете возникает из того факта, что тормозное излучение для данной скорости пропорционально $1/v$, а экспонента берется из-за того, что есть минимальная скорость для фотонов заданной энергии, а распределение скоростей электронов максвелловское.

Общий вид спектра

В рентгеновской области
$g_{ff} \sim \sqrt{T/\omega}$, в результате спектр ниже экспоненциального завала не зависит от T, а зависит от $n_e n_i$.

Общая интенсивность тормозного излучения
получается интегрированием уравнения (1.16) по частотам: $W \sim Z^2 n_e n_i \sqrt{T}\,\langle g_{ff}(T)\rangle$.

1.2 Синхротронное излучение

Синхротронное излучение — дипольное излучение, которое возникает из-за ускорения электронов в магнитном поле. В случае низкоэнергичных электронов возникает излучение фиксированной, ларморовской частоты. В случае релятивистских электронов излучение квазинепрерывно и распространяется до очень высоких частот.

1.2.1 Общая мощность синхротронного излучения

Общую мощность синхротронного излучения можно получить по обычной формуле для дипольного излучения:

$$W = \frac{2e^2}{3c^3}\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} \tag{1.17}$$

Частица двигается по спирали, вращаясь с ларморовской частотой

$$\omega_B = \frac{eB}{\gamma mc}. \tag{1.18}$$

Ускорение частицы перпендикулярно скорости, имеет амплитуду

$$a_\perp = v_\perp \omega_B \tag{1.19}$$

Формула (1.17) верна только для нерелятивистских движений. Можно воспользоваться тем, что общая мощность излучения — инвариант для излучения, которое симметрично в синхронной системе отсчета. Поэтому можно перейти в ту систему, в которой электрон в данный момент покоится, и посчитать общую мощность излучения.

Задача *Показать, что если штрихованная система — это та, в которой частица в данный момент покоится, то*

$$a'_\parallel = \gamma^3 a_\parallel, \quad a'_\perp = \gamma^2 a_\perp \tag{1.20}$$

Используя задачу и (1.19), имеем:

$$W = \frac{2e^2}{3c^3}\,\mathbf{a}'_\perp\cdot\mathbf{a}'_\perp = \frac{2e^2}{3c^3}\,v_\perp^2\frac{e^2B^2}{\gamma^2m^2c^2}\,\gamma^4 = \beta_\perp^2\frac{2e^4}{3m^2c^3}\,B^2\,\gamma^2 \tag{1.21}$$

Когда распределение скоростей частиц изотропно, надо усреднить по всем направлениям:

$$\langle\beta_\perp^2\rangle = \frac{\beta^2}{4\pi}\int_\Omega \sin^2\alpha\,d\Omega = \frac{\beta^2}{4\pi}2\pi\int_0^\pi \sin^3\alpha\,d\alpha = \frac{\beta^2}{4\pi}2\pi\frac{4}{3} = \frac{2}{3}\beta^2 \tag{1.22}$$

Итак

$$W = \frac{4}{9}\beta\,\frac{2e^4}{3m^2c^3}\,B^2\,\gamma^2 = \frac{4}{3}\,\sigma_T\,c\beta^2\gamma^2U_B. \tag{1.23}$$

(отметим, что для релятивистских частиц $\beta = 1$).

1.2.2 Спектр синхротронного излучения

Из-за beaming, вращающаяся частица пускает импульсы короткой длительности, намного короче, чем период обращения. Из-за этого разложение спектра излучения в ряд Фурье распространится до очень высоких частот.

Оценки по порядку величины:

1) Частица излучает в конусе шириной $1/\gamma$.

2) Времена, в которые частица проходит точки 1 и 2, разнесены на

$$\Delta t \approx \frac{2}{\gamma}\,\frac{1}{\omega_b\sin\alpha}$$

3) Времена, в которые излучение достигает наблюдателя, разнесены на

$$\Delta t^A = \Delta t\left(1-\frac{v}{c}\right) = \frac{2}{\gamma\omega_B\sin\alpha}\left(1-\frac{v}{c}\right).$$

4) Когда v близко к c,

$$1-\frac{v}{c} \approx \frac{1}{2\gamma^2}$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2} = (1 - v/c)(1 + v/c)$$

5) И поэтому получается

$$\Delta t^A = \frac{1}{\gamma^3 \omega_B \sin\alpha}$$

6) Если определить

$$\omega_c \equiv \frac{3}{2}\gamma^3 \omega_B \sin\alpha, \tag{1.24}$$

то спектр излучения

$$\frac{dW}{d\omega} = CF(\frac{\omega}{\omega_c})$$

причем $F \to 0$ при $\omega/\omega_c > 1$.

7) Нормировку можно найти, зная общую мощность излучения

$$W = \int_0^\infty W(\omega)\, d\omega = C\omega_c \int_0^\infty F(x)\, dx$$

Интеграл можно рассматривать как безразмерный, его значение — порядка единицы.

$$W(\omega) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\frac{e^3 B \sin\alpha}{mc^2} F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right).$$

Функция F — почти плоская на малых частотах, и падает до нуля выше ω_c.

Синхротронный спектр для степенного распределения электронов по энергиям

$N(E)dE = CE^{-p}dE$ или $N(\gamma) = C\gamma^{-p}$ для $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$.

$$W(\omega) \sim \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} F(\omega/\omega_c)\gamma^{-p} d\gamma$$

Замечая, что $\omega_c \sim \gamma^2$, получаем заменой переменных

$$W(\omega) \sim \omega^{-(p-1)/2} \int_{x_1}^{x_2} F(x) x^{(p-3)/2} dx$$

В принципе, x_1 и x_2 зависят от частоты, поэтому интеграл, строго говоря, нельзя считать константой. Однако..

1.3 Обратное комптоновское рассеяние

1.3.1 Сводка результатов

1. Сечение рассеяния фотона на покоящемся электроне есть $\sigma_T = 6.65\times10^{25}$, если энергия фотона мала по сравнению с $m_e c^2$.

   Как быть, если электрон релятивистский?

   Надо перейти в систему отсчета электрона, в ней энергия фотона есть $\varepsilon' = \varepsilon\,\gamma\,(1 - \beta\cos\theta)$. Если $\varepsilon' \ll m_e c^2$, то в системе покоя электрона рассеяние имеет сечение σ_T.

2. Угловое распределение рассеянного излучения есть

   $$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3}{16\pi}\sigma_T\left(1 + \cos^2\theta\right) \tag{1.25}$$

   т.е. квазиизотропно. Из этого следует, что релятивистский электрон будет рассеивать в основном вперед себя в пределах угла $\approx 1/\gamma$.

3. Изменение энергии фотона при рассеянии на покоящемся электроне

$$\begin{aligned} P_{\gamma i} &= \varepsilon/c\,(1, \mathbf{n}_i) \quad P_{ei} = (mc, 0) \\ P_{\gamma f} &= \varepsilon_1/c\,(1, \mathbf{n}_f) \quad P_{ef} = (E/c, \mathbf{p}) \end{aligned} \tag{1.26}$$

$$\begin{aligned} |P_{ef}|^2 &= m^2c^2 = |P_{ei} + P_{\gamma i} - P_{\gamma f}|^2 \\ &= m^2c^2 + 0 + 0 + m\varepsilon - m\varepsilon_1 - \frac{\varepsilon\varepsilon_1}{c^2}(1 - \cos\theta) \end{aligned} \tag{1.27}$$

$$\varepsilon_1 \left(m + \frac{\varepsilon}{c^2}(1 - \cos\theta) \right) = m\varepsilon$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{1 + \dfrac{\varepsilon}{mc^2}(1 - \cos\theta)} \tag{1.28}$$

Из этого уравнения следует

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} = -\frac{\varepsilon}{mc^2}\,(1 - \cos\theta)$$

если $\varepsilon \ll mc^2$. Усреднение по направлениям дает

$$\frac{\langle \Delta\varepsilon \rangle_\theta}{\varepsilon} = -\frac{\varepsilon}{mc^2} \tag{1.29}$$

1.3.2 Изменение энергии фотона при рассеянии на движущемся электроне

Пусть угол между направлением движения фотона и электрона θ. Тогда в системе покоя электрона (K') энергия фотона равна

$$\varepsilon' = \varepsilon\,\gamma\,(1 - \beta\cos\theta) \tag{1.30}$$

При рассеянии она изменится согласно уравнению (1.28). После рассеяния энергия фотона в лабораторной системе есть

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1'\gamma\,(1 + \beta\cos\theta_1'), \tag{1.31}$$

где θ_1' — угол между направлением движения электрона и направлением рассеяния в системе K'. Из этих формул видно, что отношение энергий фотона до рассеяния, в системе покоя электрона, и после рассеяния, составляет $1 : \gamma : \gamma^2$.

Какова станет энергия реликтового фотона?
3K $= 2.6 \times 10^{-4}$ эВ. $\varepsilon \sim 2.6 \times 10^{-4}\gamma^2 = 26$ кэВ при $\gamma = 10^4$.

1.3.3 Сила давления на покоящийся электрон

Сила давления есть

$$\mathbf{f} = \frac{\sigma_T}{c}\mathbf{q}, \tag{1.32}$$

где $\mathbf{q}$ — поток энергии в поле излучения.

1.3.4 Сила трения излучения на электрон в изотропном, покоящемся поле излучения

Чтобы найти силу, перейдем в систему покоя электрона и поссчитаем в ней поток световой энергии. Проще всего это сделать через тензор энергии-импульса электромагнитного поля.

$$T^{ij} = \varepsilon_\gamma \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \tag{1.33}$$

Смысл компонент тензора энергии-импульса

T^{00} — плотность энергии, а $-T^{\alpha\beta}$ — тензор напряжений $\sigma^{\alpha\beta}$, такой что $\sigma^{\alpha\beta}df_\beta$ — α-я компонента силы, действующая на элемент поверхности $d\mathbf{f}$. В изотропном поле без натяжений

$$T^{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix} \tag{1.34}$$

Самое важное для нас сейчас: $T^{0\alpha}$ — компоненты потока импульса.

Нам надо найти T^{0x}. По общим правилам преобразования Лоренца симметричного тензора (задача §6-1 Л-Л):

$$\begin{aligned} T^{0x} &= \gamma^2\left[\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)T'^{0x} - \frac{v}{c}\left(T'^{00}+T'^{xx}\right)\right] = \\ &= -\frac{4}{3}\,\varepsilon_\gamma\,\frac{v}{c}\,\gamma^2. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Матрица преобразования Лоренца:

$$\Lambda^{i'}_{j} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.36}$$

Таким образом,

$$\frac{dp'}{dt'} = -\frac{4}{3}\,\sigma_T\varepsilon_\gamma\,\frac{v}{c}\,\gamma^2 \tag{1.37}$$

1.3.5 Мощность обратного комптоновского излучения

Из предыдущего уравнения можно получить выражение для изменения энергии электрона в лабораторной системе отсчета; например, следующим способом:

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{v}\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{v^2}{c^2}\frac{dE}{dt} + \frac{Ev}{c^2}\frac{dv}{dt} \tag{1.38}$$

(это верно всегда)

$$\frac{1}{\gamma^2}\frac{dE}{dt} = \gamma v\, m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dE}{dt} = v\,\gamma^3 m\frac{dv}{dt},$$

далее вспоминаем, что $a'_{\|} = a_{\|}\gamma^3$, и получаем

$$\frac{dE}{dt} = v\frac{dp'}{dt'} = \frac{4}{3}\sigma_T\varepsilon_\gamma\gamma^2\left(\frac{v}{c}\right)^2 c \tag{1.39}$$

Похожесть на синхротронное излучение

Вспоминая, что $W_s = \frac{4}{3}\sigma_T c\beta^2\gamma^2\varepsilon_B$, находим что $W_s/W_c = \varepsilon_B/\varepsilon_\gamma$. Однако, если в случае слабого (межзвездного/межгалактического) магнитного поля синхротронное излучение наблюдается в области радио частот, то обратное комптоновское рассеяние реликтового фона уже находится в области жесткого рентгеновского излучения.

Задача

Описать, как одновременное наблюдение облака релятивистских электронов в радио диапазоне и в жестком рентгене можно использовать для вычисления напряженности магнитного поля.

Итак, релятивисткий электрон, который летит в поле излучения с типичной энергией фотона E, «испускает» обратное комптоновское излучение в виде фотонов с энергией $\approx \gamma^2 E$ с общей интенсивностью (1.39).

1.3.6 Среднее наращивание энергии на одном комптоновском рассеянии в тепловом газе электронов

Рассмотрим газ фотонов одной энергии E. Число столкновений с электроном в единицу времени есть $c\sigma_T n = c\sigma_T \frac{\varepsilon_\gamma}{E}$. Используя формулу для общей интенсивности излучения, найдем среднее изменение энергии фотона за одно рассеяние

$$\overline{\Delta E} = \frac{4/3\sigma_T \varepsilon_\gamma \gamma^2 \beta^2 c}{c\sigma_T \varepsilon_\gamma / E} = \frac{4}{3} E \gamma^2 \frac{v^2}{c^2}. \tag{1.40}$$

Для $v \ll c$, $\gamma \approx 1$, а средняя скорость есть

$$\frac{mv^2}{2} = 3/2kT$$

или

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m}.$$

Следовательно,

$$\frac{\langle \Delta E \rangle}{E} = \frac{4kT_e}{mc^2}.$$

Это то, сколько энергии оставляет движущийся электрон. Еще при рассеянии на медленном электроне фотон в среднем теряет $-\frac{E}{mc^2}$, окончательно получаем

$$\frac{\langle \Delta E \rangle}{E} = -\frac{E}{mc^2} + \frac{4kT_e}{mc^2} \tag{1.41}$$

Полнота соотношения (1.41)

Малые параметры в соотношении для изменения энергии — E/mc^2, kT/mc^2. Разлагаем по малым параметрам

$$\frac{\Delta E}{mc^2} = c_1 + c_2 \frac{E}{mc^2} + c_3 \frac{kT}{mc^2} + c_4 \left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 + c_5 \frac{E}{mc^2}\frac{kT}{mc^2} + c_6 \left(\frac{kT}{mc^2}\right)^2 + \ldots \tag{1.42}$$

1. При $E = 0$ и $kT = 0$, энергия фотона не меняется, следовательно $c_1 = 0$.
2. $kT = 0$. Электрон покоится, его изменение энергии мы знаем:

   $$\frac{\Delta E}{E} = -\frac{E}{mc^2},$$

   следовательно $c_2 = 0$, $c_4 = -1$.
3. При $E = 0$ и $T \neq 0$, энергия фотона нулевая, и останется нулевой, поэтому $c_3 = 0$, $c_6 = 0$.
4. Наконец найдем c_5. Для этого поместим газ электронов в с температурой T в очень разреженный газ фотонов с больцмановским распределением, соответствующим той же температуре. Число фотонов в диапазоне энергий есть

   $$n(E) \sim \frac{E^2}{\exp\left(\frac{E-\mu}{kT}\right) - 1}$$

«Очень разреженный» означает $\exp(-\mu/kT) \gg 1$, и тогда

$$n(E) \sim E^2 \exp(-E/kT).$$

Полное изменение энергии будет ноль:

$$\int_0^\infty n(E)\,\Delta E\,dE = 0$$

$$\int_0^\infty \left(-E^2 + c_5 E\,kT\right) E^2\ \exp(-E/kT)\,dE = 0$$

откуда получается $c_5 = 4$.

Глава 2

Перенос излучения

2.1 Уравнение переноса

Уравнение переноса излучения (пока не рассматриваем рассеяние) есть

$$\frac{dI_\nu}{dS} = -\alpha_\nu I_\nu + j_\nu \tag{2.1}$$

Решение довольно интуитивно записывается в двух предельных случаях:

только излучение: $\alpha_\nu = 0$

В этом случае уравнение (2.1) принимает вид

$$\frac{dI_\nu}{dS} = j_\nu, \tag{2.2}$$

решение которого есть

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0) + \int_{s_0}^{s} j_\nu(s')\,ds' \tag{2.3}$$

только поглощение: $j_\nu = 0$

$$\frac{dI_\nu}{dS} = -\alpha_\nu I_\nu, \tag{2.4}$$

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0)\,\exp\left[-\int_{s_0}^{s} \alpha_\nu(s')\,ds'\right]. \tag{2.5}$$

2.2 Оптическая толща и функция источника

Уравнение переноса сильно упрощается, если вместо длины использовать переменную τ, определенную как

$$d\tau_\nu \equiv \alpha_\nu\,ds \tag{2.6}$$

или

$$\tau_\nu \equiv \int_{s_0}^{s} \alpha_\nu(s')\,ds' \tag{2.7}$$

Уравнение переноса теперь записывается как

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu \tag{2.8}$$

где величина

$$S_\nu \equiv \frac{j_\nu}{\alpha_\nu} \tag{2.9}$$

Рис. 2.1. Фотография Солнца ясно демонстрирует явление потемнения к краю лимба

называется функцией источника (она зависит только от состояния среды, и не зависит от поля излучения, если нет рассеяния).

По общей формуле из курса дифференциальных уравнений решение записывается в виде

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)\, e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} e^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)} S_\nu(\tau'_\nu)\, d\tau'_\nu \tag{2.10}$$

(это можно получить, умножив прошлое уравнение на интегрирующий множитель e^{τ_ν}).

Иногда функцию источника можно установить из простых соображений. Например, если в каждой точке вещество находится в равновесии, то тогда по закону Кирхгофа

$$S_\nu = B_\nu(T) \tag{2.11}$$

(это приближение называется приближение локального термодинамического равновесия).

Явление потемнения к краю лимба и образование линий поглощения

В приближении локального термодинамического равновесия решение записывается фактически через зависимость температуры от оптической толщи:

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)\, e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} e^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)} B_\nu\left(T(\tau'_\nu)\right)\, d\tau'_\nu \tag{2.12}$$

Отметим, что при $T = \mathrm{const}$ эта формула дает чернотельный спектр.

Рассмотрим теперь излучение, выходящее под разными углами из полубесконечной плоскопараллельной среды

$$I_\nu(0) = \int_0^{\infty} e^{-\tau'_\nu} B_\nu\left(T(\tau'_\nu)\right)\, d\tau'_\nu \sim B_\nu\left(T(\tau_\nu = 1)\right) \tag{2.13}$$

Если температура растет вглубь поверхности, отсюда следует, что вблизи спектральной линии наблюдается линия поглощения, а вблизи края лимба звезды — потемнение (см. рис. 2.1), которого не было бы, если бы она светила как абсолютно непрозрачная поверхность.

2.3 Рассеяние

Наличие рассеяния сильно усложняет решение уравнение переноса. Грубо говоря, рассеяние эквивалентно добавке к излучательной способности среды члена

$$j_s(\mathbf{n}) = \int I(\mathbf{n}')\, \sigma(\mathbf{n}, \mathbf{n}')\, d\Omega, \tag{2.14}$$

который зависит от самого поля излучения. Уравнение переноса становится *интегро-дифференциальным*. Его решать очень сложно, и поэтому пользуются различными приближениями.

Одно из приближений основано на том, что поле излучения в каждой точке близко к изотропному; в этом случае рассеяние тоже можно считать изотропным.

В случае изотропного рассеяния разберем несколько характерных примеров.

Только рассеяние: броуновское движение фотонов

Фотоны случайно блуждают. Длина свободного пробега $\lambda = 1/\sigma_\nu$ (*заметить что* $\sigma_\nu = n\sigma$). Смещение на расстояние r наступает за N рассеяний, причем N определяется из уравнения $r = \sqrt{N}\lambda$.

Число рассеяний для выхода из области есть $\max(\tau^2, \tau)$, где $\tau = r/\lambda = rn\sigma$ — толща по рассеянию.

Одновременное рассеяние и поглощение

Характерный пример — полностью ионизованная плазма. В ней фотоны могут рассеиваться за счет томпсоновского рассеяния и поглощаться за счет механизма, обратного тормозному излучения (свободно-свободное поглощение). Уравнение переноса в этом случае записывается в виде

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu(I_\nu - B_\nu) - \sigma_\nu(I_\nu - J_\nu) \tag{2.15}$$

В этом уравнении член $-\alpha_\nu(I_\nu - B_\nu)$ в правой части соответствует влиянию тормозного излучения и поглощения, $-\sigma_\nu I_\nu$ есть количество излучения «убранного» из луча за счет рассеяния, а

$$\sigma_\nu J_\nu \equiv \sigma_\nu \frac{1}{4\pi} \int I_\nu \, d\Omega \tag{2.16}$$

— сколько «добавляется» к лучу из других направлений за счет рассеяния. Перепишем теперь уравнение переноса в виде

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -(\alpha_\nu + \sigma_\nu)(I_\nu - S_\nu) \tag{2.17}$$

где

$$S_\nu = \frac{\alpha_\nu B_\nu + \sigma_\nu J_\nu}{\alpha_\nu + \sigma_\nu} \tag{2.18}$$

— функция источника, полученная взвешиванием функций источника для чистого излучения и чистого рассеяния с весами, равными соответственным коэффициентам поглощения.

Величина $(\alpha_\nu + \sigma_\nu)$ — «полный» коэффициент поглощения или *коэффициент экстинкции*. Его можно использовать для определения оптической толщи $d\tau_\nu = (\alpha_\nu + \sigma_\nu)ds$.

Броуновское движение фотонов в случае рассеяния + поглощения

Длина свободного пробега есть

$$\lambda_\nu = (\alpha_\nu + \sigma_\nu)^{-1} \tag{2.19}$$

Вероятность, что после случайного блуждания фотон поглотится, есть

$$\epsilon_\nu = \frac{\alpha_\nu}{\alpha_\nu + \sigma_\nu}, \tag{2.20}$$

а вероятность того, что рассеется —

$$1 - \epsilon_\nu = \frac{\sigma_\nu}{\alpha_\nu + \sigma_\nu} \tag{2.21}$$

Функцию источника через $1 - \epsilon_\nu$ (эта величина называется *альбедо рассеяния*) можно записать в виде

$$S_\nu = \frac{\alpha_\nu B_\nu + \sigma_\nu J_\nu}{\alpha_\nu + \sigma_\nu} = (1 - \epsilon_\nu)J_\nu + \epsilon_\nu B_\nu \tag{2.22}$$

Рассмотрим бесконечную однородную среду. Путь случайного блуждания начинается с рождения фотона, и после некоторого числа рассеяний заканчивается его поглощением. Так как вероятность поглотиться после одного блуждания есть ϵ_ν, среднее число рассеяний для одного фотона есть $N = 1/\epsilon_\nu$, и тогда среднее смещение —

$$l_* = \sqrt{N}\,\lambda = \frac{1}{\sigma_\nu + \alpha_\nu}\,\frac{1}{\sqrt{\epsilon_\nu}} = (\alpha_\nu(\alpha_\nu + \sigma_\nu))^{-1/2} \tag{2.23}$$

Это соотношение в двух предельных случаях легко интерпретировать:

$\alpha \gg \sigma$ — рассеяние не существенно, $l_* = 1/\alpha_\nu$.

$\sigma \gg \alpha$ $l_* = 1/\sqrt{\sigma_\nu \alpha_\nu}$ — такой результат получается при пренебрежении поглощением, и нахождением смещения фотона за то время пока он претерпит N рассеяний, так что его полный пройденный путь $l' = N/\sigma_\nu$ имеет толщу по поглощению, равную 1.

Рассмотрим теперь область размером L. Поведение излучения сильно зависит от величины L. Если $L \gg l$, то тогда большинство рожденных в среде фотонов не выйдет, а поглотится. В таком случае ясно, что в среде образуется чернотельный спектр. Это условие можно переформулировать так: $\tau_* = \sqrt{\tau_a(\tau_a + \tau_s)} \gg 1$ — эффективная толща намного больше единицы. В противном случае, когда $\tau_* \ll 1$, все родившиеся фотоны со временем выходят из среды.

Итак, на глубинах больше $\tau_* \sim 1$ или $l > l_*$ поле излучения становится чернотельным. Эта длина (глубина) называется *длиной термализации*. Ну и наконец находим, что на таких глубинах $I_\nu = J_\nu = B_\nu(T)$, и поэтому функция источника

$$S_\nu = \frac{\alpha_\nu B_\nu + \sigma_\nu J_\nu}{\alpha_\nu + \sigma_\nu} = B_\nu(T), \tag{2.24}$$

т.е. уравнение переноса снова принимает простой вид

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + B_\nu(T) \tag{2.25}$$

2.3.1 Росселандовское приближение

Это приближение позволяет при некоторых условиях связать поток излучения с градиентом температуры.

Будем считать, что все величины зависят только от глубины в плоскопараллельной среде. Тогда из соображений симметрии следует, что интенсивность зависит только от угла θ между направлением и нормалью. Удобно обозначить $\mu = \cos\theta$, что приводит к следующей связи между элементом расстояния связан с элементом глубины

$$ds = \frac{dz}{\cos\theta} = \frac{dz}{\mu} \tag{2.26}$$

Тогда уравнение переноса записывается в виде

$$\mu\frac{\partial I_\nu(z,\mu)}{\partial z} = -(\alpha_\nu + \sigma_\nu)\,(I_\nu - S_\nu) \tag{2.27}$$

или иначе

$$I_\nu(z,\mu) = S_\nu - \frac{\mu}{\alpha_\nu + \sigma_\nu}\frac{\partial I_\nu(z,\mu)}{\partial z} \tag{2.28}$$

Глубоко в среде $I_\nu, S_\nu \approx B_\nu(T)$, что можно считать за нулевое приближение, и подставить в уравнение переноса, чтобы найти поправку:

$$I_\nu^{(1)}(z,\mu) \approx B_\nu - \frac{\mu}{\alpha_\nu + \sigma_\nu}\frac{\partial B_\nu(T)}{\partial z} \tag{2.29}$$

($I^{(1)}$ — не член первого порядка малости, а «первая поправка»). Теперь найдем для такого решения поток излучения

$$F_\nu(z) = 2\pi\int_{-1}^{1} I_\nu^{(1)}(z,\mu)\mu\,d\mu \tag{2.30}$$

Член $B_\nu(T)$ в $I^{(1)}$ от угла не зависит, поэтому выпадает. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} F_\nu(z) &= -\frac{2\pi}{\alpha_\nu + \sigma_\nu}\frac{\partial B_\nu(T)}{\partial z}\int_{-1}^{+1}\mu^2\,d\mu = \\ &= -\frac{4\pi}{3(\alpha_\nu+\sigma_\nu)}\frac{\partial B_\nu(T)}{\partial z} = \\ &= -\frac{4\pi}{3(\alpha_\nu+\sigma_\nu)}\,\frac{dB_\nu(T)}{dT}\,\frac{dT}{dz} \end{aligned} \tag{2.31}$$

Чтобы получить вообще полный поток, интегрируем по частотам:

$$F(z) = \int_0^\infty F_\nu(z)\,d\nu = -\frac{4\pi}{3}\frac{dT}{dz}\int_0^\infty \frac{dB_\nu(T)/dT}{\alpha_\nu+\sigma_\nu}\,d\nu \tag{2.32}$$

Теперь введем обозначение коэффициента поглощения, усредненного по Росселанду

$$\frac{1}{\alpha_R} \equiv \frac{\displaystyle\int_0^\infty \frac{dB_\nu(T)/dT}{\alpha_\nu+\sigma_\nu}\,d\nu}{\displaystyle\int_0^\infty \frac{dB_\nu(T)}{dT}\,d\nu} \tag{2.33}$$

и заметим, что интеграл внизу равен $\frac{d}{dT}\int_0^\infty B_\nu(T)\,d\nu = 4\sigma_{\rm SB}T^3/\pi$. Подставляя в уравнение для полного потока, получаем

$$F(z) = -\frac{16\sigma_{\rm SB}T^3}{3\alpha_R}\frac{dT}{dz} = -\frac{4acT^3}{3\alpha_R}\frac{dT}{dz} \tag{2.34}$$

α_R — усредненный полный коэффициент поглощения с весовой функцией, которая имеет максимум на $h\nu \approx 3.8kT$.

Глава 3

Эволюция звезд

В течение жизни звезды можно выделить несколько этапов:

1. Образование вириализованного плотного сгустка из диффузной межзвездной среды
2. Дальнейшее гравитационное сжатие сгустка из-за излучения

   Продолжительность жизни звезды без термоядерных источников энергии

   Пусть светимость объекта L поддерживается постепенным гравитационным сжатием звезды. Энергия звезды $E \sim -GM^2/R$. Имеем $L = -\dot{E} = -GM^2\,\dot{R}/R^2$, $d(1/R)/dt = -L/GM^2$;

3. Если звезда достаточно массивная, в ней начинаются термоядерные реакции, которые водород превращают в гелий. Выделение энергии уравновешивается светимостью, звезда устойчива, и находится на этой стадии дольше всего.
4. Когда водород выгорает, внутренности звезды вновь начинают сжиматься, могут начаться реакции горения гелия, но в конце концов ядро звезды переходит в плотное состояние.

3.1 Образование звезды из сгустка — Джинсовская масса

Рассмотрим задачу об устойчивости возмущений в бесконечном пространстве, заполненном газом. Уравнения гидродинамики:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\nabla P + \nabla\varphi = 0 \tag{3.2}$$

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)s = 0 \tag{3.4}$$

За невозмущенное состояние возьмем равномерно распределенный газ. Применим метод малых возмущений:

$$\begin{aligned}
\rho &= \rho_0\left[1 + \delta(t)e^{i\mathbf{kx}}\right] \\
\mathbf{u} &= 0 + \mathbf{v}(t)e^{i\mathbf{kx}} \\
\varphi &= \varphi_0 + f(t)e^{i\mathbf{kx}} \\
s &= s_0 + \sigma(t)e^{i\mathbf{kx}} \\
P &= P_0 + \frac{\partial P}{\partial \rho}(\rho - \rho_0) + \frac{\partial P}{\partial s}(s - s_0) = P_0 + c_s^2\rho_0\delta e^{i\mathbf{kx}} + h^2\sigma e^{i\mathbf{kx}}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

В третьем уравнении заключена физическая несостоятельность метода Джинса. Предполагается что невозмущенное решение имеет $\varphi = \mathrm{const}$, откуда из уравнения Лапласа для потенциала следует $\rho = 0$.

Подставим эти выражения в уравнения гидродинамики, опуская в них члены второго порядка малости, и используя тот факт, что члены, в которых нет возмущений, соответствуют невозмущенному решению, которое приводит уравнения в тождество, и поэтому члены нулевого порядка можно просто опустить.

$$\rho_0 \frac{d\delta}{dt} e^{i\mathbf{kx}} + \rho_0 \mathbf{v} i\mathbf{k} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\delta}{dt} + i\mathbf{kv} = 0 \tag{3.6}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{1}{\rho_0} c_s^2 \rho_0 \delta \, i\mathbf{k} + \frac{h^2\sigma}{\rho_0} i\mathbf{k} + i\mathbf{k} f = 0 \tag{3.7}$$

$$-k^2 f = 4\pi G \rho_0 \delta \tag{3.8}$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0 \tag{3.9}$$

Мы имеем линейную систему дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. В этом случае временная зависимость решения $\sim e^{\omega t}$, т.е.

$$\delta = \delta_0 e^{\omega t}, \quad v = v_0 e^{\omega t}, \quad f = f_0 e^{\omega t}, \quad \sigma = \sigma_0 e^{\omega t}. \tag{3.10}$$

Подставляем в уравнения (3.6)– (3.9) и находим коэффициенты и ω.

$$\begin{aligned} &\delta_0 \omega e^{\omega t} + i\mathbf{k} v_0 e^{\omega t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \delta_0 \omega + i\mathbf{k} v_0 = 0 \\ &\omega v_0 + c_s^2 \delta_0 i\mathbf{k} + \frac{h^2\sigma_0}{\rho_0} i\mathbf{k} + i\mathbf{k} f_0 = 0 \\ &-k^2 f_0 = 4\pi G \rho_0 \delta_0 \\ &\omega \sigma_0 = 0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Энтропийные возмущения в первом порядке не меняются со временем, а изменяющиеся со временем возмущения первого порядка должны быть адиабатическими, т.е. $\sigma_0 = 0$.

$$\begin{aligned} \omega \delta_0 &= -i\mathbf{k} v_0 \\ \omega v_0 &= -i\mathbf{k} c_s^2 \delta_0 - i\mathbf{k} f_0 \\ -k^2 f_0 &= 4\pi G \rho_0 \delta_0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Подставляем f_0 из последнего уравнения во второе:

$$\omega v_0 = ik \frac{4\pi G \rho_0 \delta_0}{k^2} - ikc_s^2 \delta_0 \quad \Longrightarrow \quad v_0 = ik \frac{4\pi G \rho_0 \delta_0}{k^2 \omega} - \frac{ikc_s^2 \delta_0}{\omega} \tag{3.13}$$

и теперь подставляем v_0 в первое уравнение:

$$\omega \delta_0 = -\frac{4\pi G \rho_0 \delta_0}{\omega} + \frac{k^2 c_s^2 \delta_0}{\omega} \tag{3.14}$$

откуда находим ω:

$$\omega = \sqrt{c_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0} \tag{3.15}$$

Если $4\pi G\rho_0 - c_s^2 k^2 > 0$, ω действительно, и есть растущее решение, что соответствует неустойчивости. Длинноволновые возмущения неустойчивы, коротковолновые — устойчивы (звуковые волны). Граница устойчивости называется Джинсовским волновым числом (длиной волны):

$$k_J = \frac{1}{c_s} \sqrt{4\pi G \rho_0} \qquad \lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}} \tag{3.16}$$

Удобнее характеризовать не масштабом длины, а масштабом массы. Часто говорят о Джинсовской массе — массе, заключенной в объеме $(\lambda_J/2)^3$:

$$M_J = 33\left(\frac{T, \mathrm{K}}{\mu}\right)^{3/2}\left(\frac{\rho_0}{10^{-24}}\right)^{-1/2} M_\odot \tag{3.17}$$

Для молекулярных облаков ($n \sim 10^3, T \sim 10\,\mathrm{K}$) эта формула дает $M_J \sim 30 M_\odot$

Салпетеровская начальная функция масс

Из аргументов, что звезды в окрестностях Солнца рождаются с одним и тем же темпом, и что по сжигании 10% водорода ядра звезда уходит с главной последовательности, и из наблюдаемой функции светимости, Салпитер (1955) выводит начальную функцию масс

$$\xi(M) = 0.03(M/M_\odot)^{-1.35} \tag{3.18}$$

3.2 Загорание ядерных реакций — минимальная масса звезды

3.2.1 При какой температуре начинаются термоядерные реакции?

Чаще всего в звездах горение водорода в гелий проходит по т.н. $p-p$ циклу:

$$\begin{array}{lll} p + p \to \mathrm{D} + e^+ + \nu & (+1.44\,\text{МэВ}) & 8\times 10^9\,\text{лет} \\ p + \mathrm{D} \to \mathrm{He}^3 + \gamma & (+5.49\,\text{МэВ}) & 4\,\text{сек} \\ \mathrm{He}^3 + \mathrm{He}^3 \to \alpha + 2p & (+12.85\,\text{МэВ}) & 4\times 10^5\,\text{лет} \end{array} \tag{3.19}$$

Первая реакция определяет темп всего цикла. Грубо говоря, ядерная реакция происходит, когда налетающая частица преодолевает кулоновский барьер и входит в радиус действия ядерных сил (сильного взаимодействия): $r_{\text{сг}} \approx 10^{-13}$ см. Чтобы преодолеть кулоновский барьер «в лоб», нужна энергия

$$\frac{e^2}{r_{\text{сг}}} \approx 1.2\,\text{МэВ}. \tag{3.20}$$

А температура Солнца — 10^7 К, или примерно 0.9 кэВ.

Энергия кулоновского барьера может преодолеваться за счет а) хвоста максвелловского распределения, б) за счет туннельного эффекта. Важен только туннельный эффект, так как максвелловская вероятность слишком мала (у Солнца может прореагировать лишь несколько миллиардов протонов).

Вероятность туннелирования для кулоновского барьера

Общая формула для вероятности прохождения потенциального барьера в квазиклассическом приближении записывается как

$$P = \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\int_{R_{\text{nuc}}}^{r_0} dr\ (V(r)-E)^{1/2}\ \sqrt{2m}\right]. \tag{3.21}$$

Для кулоновского поля $V(r) = E\,r_0/r$, где r_0 — радиус, на котором в классическом случае частица с энергией E остановилась бы.

$$P = \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2mE}\int_{R_{\text{nuc}}}^{r_0} dr\left(\frac{r_0}{r}-1\right)^{1/2}\right]. \tag{3.22}$$

Интеграл в экспоненте берется с помощью подстановки $r/r_0 = x^2$, $dr = 2r_0 x\,dx$:

$$\begin{aligned}\int_R^{r_0} dr\left(\frac{r_0}{r}-1\right)^{1/2} &= 2r_0\int_{\sqrt{R/r_0}}^{1}\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^{1/2} x\,dx = \\ &= 2r_0\int_{\sqrt{R/r_0}}^{1}\sqrt{x^2-1}\,dx \approx 2r_0\int_0^1\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{r_0\pi}{2}\end{aligned} \tag{3.23}$$

Возможность замена нижнего предела нулем следует из вида подынтегральной функции и из того факта, что обычно $R \ll r_0$. Отсюда же следует, что точный вид потенциала ядерных сил несущественен для расчета вероятности туннелирования.

$$P = \exp\left[-\frac{2\pi}{2}\frac{r_0}{\hbar}\sqrt{2mE}\right] = \exp\left[-\pi\frac{e^2}{\hbar}\sqrt{\frac{2m}{E}}\right] = \exp\left[-\frac{B}{\sqrt{E}}\right], \tag{3.24}$$

где

$$B = \frac{\pi e^2}{\hbar}\sqrt{2m} \tag{3.25}$$

(заметим, что здесь фигурирует приведенная масса $m = m_p/2$). Численное значение:

$$B^2 = 2\pi^2\alpha^2 mc^2 \approx 445\,\text{кэВ}, \tag{3.26}$$

Эту величину называют энергей Гамова для кулоновского барьера и обозначают E_G.

Усреднение вероятности туннелирования по максвелловскому распределению

Умножая масквелловское распределение по энергиям

$$\begin{aligned}dw &= \frac{1}{(2\pi mT)^{3/2}}\,e^{-E/T}\,d^3p = \frac{1}{(2\pi mT)^{3/2}}4\pi\sqrt{2}\,m^{3/2}\sqrt{E}\,e^{-E/T}\,dE \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{E}}{T^{3/2}}\,e^{-E/T}\,dE\end{aligned} \tag{3.27}$$

на вероятность туннелирования, получаем «долю» частиц, способных к проникновению кулоновского барьера:

$$P_{tn} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{T^{3/2}}\int_0^\infty\sqrt{E}\exp\left[-\frac{E}{T}-\frac{B}{\sqrt{E}}\right]dE \tag{3.28}$$

Рассмотрим функцию, стоящую под экспонентой: $E/T + B/\sqrt{E}$. Она имеет узкий минимум в точке

$$E_{\min} = \left(\frac{BT}{2}\right)^{2/3}. \tag{3.29}$$

Вблизи минимума функцию можно разложить до второго порядка по ΔE:

$$\frac{E}{T}+\frac{B}{\sqrt{E}} \approx 3\frac{E_{\min}}{T}+\frac{3}{8}\frac{B}{E_{\min}^{5/2}}(\Delta E)^2 \tag{3.30}$$

Ширина минимума может быть оценена из условия

$$\frac{3}{8}\frac{B}{E_{\min}^{5/2}}(\Delta E)^2 \approx 1 \quad \text{или} \quad \left(\frac{\Delta E}{E_{\min}}\right)^2 \approx \frac{\sqrt{E_{\min}}}{B} \approx \left(\frac{T}{B^2}\right)^{1/3} \tag{3.31}$$

Так как $B^2 \approx 450$ кэВ (3.26), $\Delta E/E \ll 1$, и поэтому член $\sqrt{E}$ можно считать постоянным и равным $\sqrt{E_{\min}}$. Итак,

$$P_{tn} \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{T^{3/2}} \sqrt{E_{\min}}\, e^{-3E_{\min}/T} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{3}{8}\frac{B}{E_{\min}^{5/2}}(\Delta E)^2\right) dE \tag{3.32}$$

Интеграл считается по формуле

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \tag{3.33}$$

т.е.

$$\begin{aligned} P_{tn} &\approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{T^{3/2}} \sqrt{E_{\min}}\, e^{-3E_{\min}/T} \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{8E_{\min}^{5/2}}{3B}} \\ &\approx 3.3 B^{-1/2} E_{\min}^{7/4} T^{-3/2} e^{-3E_{\min}/T} \end{aligned} \tag{3.34}$$

Теперь подставим выражение $E_{\min}$ через B и T:

$$\begin{aligned} P_{tn} &\approx 3.3 B^{-1/2} \left(\frac{BT}{2}\right)^{7/4\times 2/3} T^{-3/2} e^{-3(BT/2)^{2/3}/T} \\ &\approx 1.47\, B^{2/3} T^{-1/3} \exp\left[-\left(\frac{T_{\rm cr}}{T}\right)^{1/3}\right] \end{aligned} \tag{3.35}$$

где

$$T_{\rm cr} = \left(\frac{2\pi e^2}{\hbar}\right)^2 m \left(\frac{3}{2}\right)^3 = 4\pi^2 \left(\frac{3}{2}\right)^3 \alpha^2 mc^2 = 3.33 \text{ МэВ} \tag{3.36}$$

(здесь учтено, что в вероятностях туннелирования фигурирует приведенная масса $m = m_p/2$)

Скорость реакции

Теперь надо учесть два факта:

1) расчет производился только для величины орбитального момента $l = 0$. Для $l \neq 0$ эффективный потенциал содержит центробежный член $\hbar^2 l(l+1)/r^2$, который для ядер низкого заряда больше, чем кулоновский член на интересных радиусах, и в этом случае вероятность туннелирования значительно сокращается. Чтобы частица имела орбитальное число $l = 0$, грубо говоря, она должна лететь на прицельном расстоянии, которое определяется из условия

$$(pb)^2 < \hbar^2 l(l+1), l = 1 \tag{3.37}$$

Отсюда находим, что «сечение», которое пропорционально b^2, обратно пропорционально p^2, или энергии частицы.

2) Число индивидуальных столконовений в единицу времени пропроционально скорости частицы, или $\sqrt{E}$.

Таким образом, для вычисления скорости реакции мы должны в интеграл (3.28) ввести множитель $1/\sqrt{E}$. Ясно, что мы получим формулу (3.34), только, там $E_{\min}$ должно быть в степени не 7/4, а $7/4 - 1/2$. Так как $E_{\min} \sim T^{2/3}$, выражение для скорости реакции похоже на (3.35), только там степень T в предэкспоненциальном множителе меньше на 1/3, т.е. находим

$$Q \sim n^2\, T^{-2/3} \exp\left[-\left(\frac{T_{\rm cr}}{T}\right)^{1/3}\right] \tag{3.38}$$

(член n^2 взялся из-за того, что число столкновений пропорционально n^2).

В области солнечных температур $Q \sim T^4$.

3.2.2 Максимальная температура в облаке газа заданной массы

В классической физике мы можем записать

$$U \sim \frac{GM^2}{R}, \quad K = NkT \quad \Longrightarrow \quad T \approx \frac{GM^2}{NkR} \approx \mu G \frac{M}{kR} m_p \tag{3.39}$$

(для Солнца температура оцененная таким образом находится на уровне 10^7 K). Чем меньше радиус облака, тем меньше его полная энергия, и тем выше температура. Казалось бы, можно температуру поднять до бесконечности. Однако, с некоторого момента наступит вырождение и сжатие остановится. Оценим, когда это произойдет.

Условие вырождения:

$$n > \left(\frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \tag{3.40}$$

Это получается следующим образом:

$$n = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3}\left(\frac{4\pi}{3} p_{\max}^3\right)$$

(фазовый объем на одно квантовое состояние равен $V/(2\pi\hbar)^3$).

$$n = \frac{N}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{(kT)^3 N}{\frac{4}{3}\pi (GN)^3 (\mu m_p)^6} = \left(\frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \tag{3.41}$$

откуда

$$(kT)^{3/2} = \frac{4\pi}{3}\frac{(GN)^3}{N}(\mu m_p)^6 \left(\frac{m_e}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \tag{3.42}$$

$$kT_{\max} \approx N^{4/3}\left(\frac{Gm_p^2}{\hbar c}\right)^2 m_e c^2. \tag{3.43}$$

Если эта температура меньше той, при которой загораются термоядерные реакции, то газовое облако не превращается в звезду в обычном понимании.

Минимальная масс звезды

Табл. 3.1. Вероятность туннелирования через кулоновский барьер

T	T/T_{cr}	P_{tn}
0.33 кэВ	10^{-4}	7.1×10^{-9}
1.00 кэВ	3×10^{-4}	3.7×10^{-6}
3.3 кэВ	10^{-3}	3.4×10^{-4}

Как видно из формулы (3.35), число частиц, способных участвовать в термоядерных реакциях, очень сильно зависит от температуры. Если температура меньше чем примерно 1 кэВ, реакции не идут. Таким образом, если максимально допустимая температура для данной массы (формула 3.43) меньше примерно 1 кэВ, то звезды в обычном понимании не образуется. Так как максимальная температура пропорциональна $M^{4/3}$, примерно 3-х кратная неопределенность в температуре термоядерного горения соотвествует примерно 2-х кратной неопределенности в минимальной массе. Численно имеем

$$M_{\min} = Nm_p = \left(\frac{1\,\text{кэВ}}{m_e c^2}\right)^{3/4}\left(\frac{Gm_p^2}{\hbar c}\right)^{-3/2} m_p \approx 0.02 M_\odot \tag{3.44}$$

(кажется, более точный расчет дает $M_{\min} \sim 0.1 M_\odot$).

У Юпитера $M \approx 300 M_\oplus \approx 0.001 M_\odot$.

Когда «важна» гравитация

Гравитация важнее химической связи когда $N > 10^{54}$ или $> 10^{30}$ г $= 0.0005 M_\odot$.

3.3 Смерть звезды — белые карлики, предел Чандрасекара

После сгорания водорода звезда временно истощает источники энергии и начинает сжиматься. За короткое время она сжимается настолько, что начинается горение гелия, которое сравнительно быстротечно. После сгорания гелия цикл повторяется, но со все сокращающимся временем. В любом случае термоядерные реакции не могут идти на элементах тяжелее железа.

После того, как все термоядерное топливо выгорает, звезда начинает сжиматься за счет потери энергии на излучение (это — быстрый процесс). В принципе, сжатие могло бы идти неограничено, если бы не возможность вырождения электронного газа. У вырожденного газа давление не зависит от температуры, и поэтому он может остановить сжатие звезды. Такая звезда, в которой термоядерные реакции больше не идут, а давление доминировано вырожденным элетронным газом, называется *белым карликом*.

Оказывается, существует максимально возможная масса белого карлика, которая называется *пределом Чандрасекара*.

3.3.1 Устойчивость политропных сфер

Для начала рассмотрим вопрос о том, при каких условиях самогравитирующее сферическое газовое тело (звезда) механически устойчиво.

Подвергнем тело малой адиабатической деформации, при которой распределение плотности меняется автомодельным образом. Так как сжатие адиабатическое, давление газа скалируется как

$$p \sim \rho^\gamma, \tag{3.45}$$

а следовательно полная кинетическая энергия газа — как

$$E_k \sim \rho^\gamma R^3 \sim \frac{M^\gamma}{R^{3\gamma-3}}. \tag{3.46}$$

Потенциальная энергия изменяется как

$$E_p \sim -\frac{M^2}{R} \tag{3.47}$$

Полная энергия, следовательно, зависит от радиуса как

$$E = A\frac{M^\gamma}{R^{3\gamma-3}} - B\frac{M^2}{R} \tag{3.48}$$

В состоянии равновесия полная энергия достигает минимума. Легко видеть, что если $\gamma \le 4/3$, то минимум отсутствует, и следовательно, при таком показателе адиабаты вещества равновесной звезды быть не может — газ либо разлетается, либо коллапсирует (см. рис. 3.1).

3.3.2 Верхний предел на массу белого карлика — упрощенный подход

Импульс Ферми в вырожденном газе связан с плотностью частиц соотношением

$$p_F = \left(3\pi^2\hbar^3 n\right)^{1/3} \tag{3.49}$$

При росте плотности, p_F рано или поздно становится настолько большим, что электроны становятся релятивистскими. Это приводит к изменению вида уравнения состояния. Действительно, для нерелятивистских электронов энергия и импульс связаны соотношением $E = p^2/2m$, следовательно объемная плотность энергии записывается в виде

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{нр}} = n\,\frac{3}{4\pi p_F^3}\,4\pi\int_0^{p_F} E(p)\,p^2\,dp = \frac{3n}{2m_e p_F^3}\int_0^{p_F} p^4\,dp = \frac{3n}{2m_e}\,\frac{p_F^2}{5} = \\ = \frac{n^{5/3}\hbar^2\left(3\pi^2\right)^{5/3}}{5\pi^2\,2m_e}.\end{aligned} \tag{3.50}$$

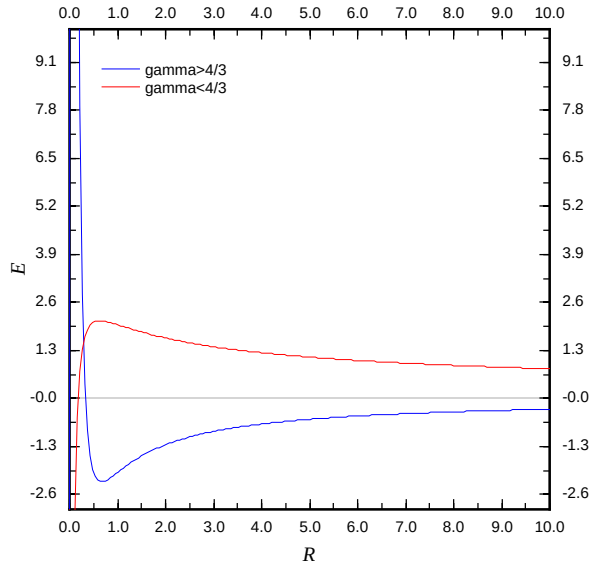


Рис. 3.1. Зависимость энергии звезды от радиуса при разных показателях адиабаты вещества.

Давление выражается через плотность энергии:

$$P_{\text{нр}} = \frac{2}{3}\,\varepsilon = \frac{\left(3\pi^2\right)^{2/3}\hbar^2}{5m_e}\,n_e^{5/3} = \frac{\left(3\pi^2\right)^{2/3}}{5}\,\frac{\hbar^2}{m_e}\left(\frac{Z}{A}\right)^{5/3}\left(\frac{\rho}{m_p}\right)^{5/3} = b_{\text{нр}}\,\rho^{5/3} \tag{3.51}$$

(здесь учтено, что если средний заряд ядер есть Z, а атомный вес — A, то плотность электронов $n_e = Z\,n_i$, а $\rho = A\,m_p\,n_i$). Итак, уравнение состояния имеет вид политропы с индексом 5/3.

В случае, если энергия Ферми превышает энергию покоя электрона, газ становится ультрарелятивистским, и связь энергии и импульса принимает вид $E = pc$. Повторяем в этом случае вывод формулы для давления:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{р}} = n\,\frac{3}{4\pi p_F^3}\,4\pi\int_0^{p_F} E(p)\,p^2\,dp = \frac{3\,n\,c}{p_F^3}\int_0^{p_F} p^3\,dp = 3\,n\,c\,\frac{p_F}{4} = \\ = \frac{3c}{4}\left(3\pi^2\hbar^3\right)^{1/3} n^{4/3}\end{aligned} \tag{3.52}$$

$$P_{\text{р}} = \frac{1}{3}\,\varepsilon = \frac{c}{4}\left(3\pi^2\hbar^3\right)^{1/3} n^{4/3} = \frac{\left(3\pi^2\right)^{1/3}}{4}\,\hbar c\left(\frac{Z}{A}\right)^{4/3}\left(\frac{\rho}{m_p}\right)^{4/3} = b_{\text{р}}\,\rho^{4/3} \tag{3.53}$$

Следовательно, уравнение состояния вырожденного ультрарелятивистского газа имеет вид политропы с индексом 4/3. Как мы уже знаем, звезда, состоящая из такого вещества, неустойчива и будет коллапсировать.

Если взять устойчивый белый карлик и начать медленно увеличивать его массу, то плотность вещества будет расти. При приближении массы к некоторому пределу энергия Ферми начнет стремительно увеличиваться[1], электроны станут ультрарелятивистскими, и белый карлик коллапсирует. Этот предел массы (называется *предел Чандрасекара*) можно найти из условия ультрарелятивизма электронов.

Допустим, что звезда радиуса R заполнена вырожденным газом. Если этот газ ультрарелятивистский, $\varepsilon_F = p_F c$, а общая кинетическая энергия —

$$E_k = \varepsilon_F N = c\left(3\pi^2\hbar^3 n\right)^{1/3} n\,\frac{4}{3}\,\pi R^3 \tag{3.54}$$

[1] Образно говоря, вблизи границы устойчивости каждый лишний килограм веса значительно сжимает белый карлик.

Согласно теореме вириала, мы должны кинетическую энергию приравнять половине потенциальной:

$$c\left(3\pi^2\hbar^3 n\right)^{1/3} n\,\frac{4}{3}\,\pi R^3 = \frac{5\,G\,M}{6\,R} \tag{3.55}$$

Учитывая, что

$$n = \frac{M}{m_p}\,\frac{Z}{A}\,\frac{1}{4/3\,\pi\,R^3}, \tag{3.56}$$

получаем следующее уравнение

$$c\left(\frac{3\,\pi^2\,\hbar^3}{4\pi/3}\right)^{1/3}\left(\frac{M}{m_p}\right)^{4/3}\left(\frac{Z}{A}\right)^{4/3}\,\frac{R^3}{R^4} = \frac{5}{6}\frac{G\,M^2}{R}, \tag{3.57}$$

откуда выпадает R, и M выражается через фундаментальные постоянные. Интересно, что полученное таким методом значение M весьма близко к точному выражению для предела Чандрасекара:

$$M_{\rm Ch} = 1.0\times\left(3\pi^2\right)^{1/2}\,\frac{(\hbar c)^{3/2}}{m_p^2\,G^{3/2}}\left(\frac{Z}{A}\right)^2 = 5.8\,M_\odot\left(\frac{Z}{A}\right)^2. \tag{3.58}$$

У звезды, в которой выгорел водород, $Z/A \approx 0.5$ (легко убедиться, что это справедливо для гелия, кислорода, железа), и следовательно $\boldsymbol{M_{\rm Ch} = 1.4\,M_\odot}$.

3.3.3 Масса Чандрасекара — точный подход

Задача

Показать, что пренебрежение энергией кулоновского взаимодействия электронов при выводе уравнения состояние вырожденного газа оправдано.

Распределение газа подчиняется уравнению гидростатического равновесия

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{1}{\rho}\,\frac{dP}{dr}, \tag{3.59}$$

а потенциал — уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\,\frac{d\varphi}{dr}\right) = 4\pi\,G\,\rho. \tag{3.60}$$

Подставляя $d\varphi/dr$ из уравнения (3.59), получаем

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\,\frac{dP}{dr}\right) = -4\pi\,G\,\rho. \tag{3.61}$$

На границе устойчивости электронный газ в белом карлике уже сильно релятивистский, следовательно, принимая во внимание (3.53), получаем

$$\frac{dP}{dr} = b_{\rm p}\,\rho^{1/3}\,\frac{4}{3}\,\frac{d\rho}{dr}, \tag{3.62}$$

и следовательно

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho^{2/3}}\,\frac{d\rho}{dr}\right) = -\frac{3\pi\,G}{b_{\rm p}}\,\rho. \tag{3.63}$$

Обезразмерим это уравнение используя обозначения

$$r = R\,x \qquad \rho = \rho_0\,f(x), \tag{3.64}$$

где R — внешний радиус белого карлика, а ρ_0 — некоторое значение плотности (его вскоре определим). Получаем

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{f^{2/3}}\,\frac{df}{dx}\right) = -\frac{3\pi\,G}{b_{\rm p}}\,R^2\,\rho_0^{2/3}\,f. \tag{3.65}$$

С помощью обозначений

$$y = f^{1/3} \qquad \rho_0 = \left(\frac{b_{\rm p}}{\pi G}\right)^{3/2} R^{-3} \tag{3.66}$$

это уравнение сильно упрощается

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\,\frac{dy}{dx}\right) = -y^3. \tag{3.67}$$

Это есть дифференциальное уравнение, определяющее распределение плотности внутри белого карлика. Решение определяется наложением граничных условий

$$y'(0) = 0, \qquad y(1) = 0, \tag{3.68}$$

соответствующих гладкому распределению плотности в центре и обращению ее в ноль на поверхности белого карлика. Интегрирование с такими граничными условиями дает решение, у которого $y(0) = 6.9$, а $y'(1) = -2.0$. Найдем теперь массу белого карлика:

$$G\,M = R^2\,\frac{d\varphi}{dr}\Big|_{r=R}. \tag{3.69}$$

Выражая производную потенциала из уравнения гидростатического равновесия, имеем

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{1}{\rho}\,\frac{dP}{dr} = -\frac{4b_{\rm p}}{3\rho^{2/3}}\,\frac{d\rho}{dr} = -\frac{4\,b_{\rm p}\,\rho_0^{1/3}}{3\,R\,f^{2/3}}\frac{df}{dx} = -\frac{4\,b_{\rm p}\,\rho_0^{1/3}}{R\,y^2}\,y^2\,\frac{dy}{dx} = -\frac{b_{\rm p}\,\rho_0^{1/3}}{R}\,4y', \tag{3.70}$$

$$M = -\frac{b_{\rm p}\,\rho_0^{1/3}\,R}{G}\,4y'(1) = b_{\rm p}\left(\frac{b_{\rm p}}{\pi G}\right)^{1/2}\,\frac{8.0}{G}, \tag{3.71}$$

откуда, вспоминая определение $b_{\rm p}$ в уравнении (3.53) получаем формулу (3.58) для предела Чандрасекара.

Задача

Проделать аналогичный анализ для случая нерелятивистского вырожденного газа и получить зависимость радиуса белого карлика и ускорения силы тяжести на его поверхности от массы, имея в виду, что решение уравнения

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\,\frac{dy}{dx}\right) = -y^{3/2}$$

с граничными условиями (3.68) дает $y(0) = 178$, $y'(1) = -132$.

3.3.4 Нейтронные звезды, черные дыры

Если масса белого карлика превысит Чандрасекаровский предел, давление вырожденного электронного газа уже не сможет остановить гравитационное притяжение, и белый карлик начнет коллапсировать. При повышении плотности вещества произойдет нейтронизация вещества по реакции типа.

$$(Z, A) + e^- \to (Z-1, A) + \nu_e, \tag{3.72}$$

Нейтроны тоже фермионы, и поэтому при вырождении создают давление. В принципе, к ним применим тот же анализ, что и для белых карликов, что приводит к формуле (3.58) для предельной массы нейтронной звезды, в которой надо положить $Z/A = 1$ (*почему?*). Реальный предел несколько ниже, около $3M_\odot$ из-за 1) дефекта массы связанного с сильным взаимодействием нейтронов и с сильной гравитацией, и 2) из-за возможности образования частиц тяжелее нейтронов.

Если масса нейтронной звезды превысит предел в $\approx 3M_\odot$, то по современным представлениям, нет сил, которые могли бы остановить ее коллапс, и должна образоваться черная дыра.

Глава 4

Введение в ОТО

4.1 Вводные замечания

Самое характерное отличие гравитационного взаимодействия — это то, что всем телам без исключения, независимо от их природы, оно сообщает одинаковое ускорение. Это — коренное отличие от всех остальных взаимодействий.

Пропорциональность m_{i} и m_{g} установлена с точностью 10^{-12}. Это сразу отвергает возможность того, что сила притяжения пропорциональна, например, барионному заряду: из-за дефекта массы n_b/m колеблется на $\sim 10^{-3}$ для различных веществ; точность 10^{-12} говорит о том, что притяжение пропорционально энергии, т.е. величине, которая определяет инертную массу в СТО.

Таким же свойством обладают ускоренные системы отсчета, которые как-бы погружены в инерциальную систему отсчета (ускоряющийся лифт).

Эйнштейн предположил, что вообще все явления в гравитационном поле протекают (локально) также, как будто бы мы находимся в ускоряющейся системе отсчета. Наоборот, от гравитационного поля всегда можно избавиться локально, перейдя в систему отсчета, которая свободно падает.

В такой свободно падающей системе отсчета локально можно избавиться от гравитации, и в ней свойства пространства-времени становятся Лоренцевскими, а геометрия — Минковского

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{4.1}$$

Переход от этой свободно падающей системы в исходную опишется нелинейными преобразованиями

$$\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^k) \tag{4.2}$$

После таких преобразований элемент длины станет в общем случае квадратичной формой

$$ds^2 = g_{ik}\,dx^i dx^k \tag{4.3}$$

Величина g_{ik} называется метрическим тензором. В общем случае она задает геометрию *искривленного* пространства-времени.

Если g_{ik} не имеет вид как в пространстве Минковского, еще не обязательно, что пространство-время искривлено.

Идея ОТО: Геометрия пространства-времени искривлена, свободно движущиеся частицы движутся по кратчайшим линиям (геодезическим), но эти линии не являюстя прямыми. Мы же это называем гравитацией. Геометрические свойства пространства-времени определяются распределением материи. Движение частиц зависит от «внутренних свойств» g_{ik}, которые в свою очередь определяются распределением материи.

4.1.1 Пример с вращающимся диском

Классический пример, принадлежащий самому Эйнштейну. Пусть стоит наблюдатель в центре вращающегося диска. Перейдем в систему отсчета, которая тоже жестко вращается вместе с диском:

$$r = \tilde{r}, \quad z = \tilde{z}, \quad \varphi = \tilde{\varphi} + \Omega t \tag{4.4}$$

Запишем интервал в этой системе отсчета:

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2dt^2 - dr^2 - r^2d\varphi^2 - dz^2 = \\ &= c^2dt^2 - d\tilde{r}^2 - \tilde{r}^2(d\tilde{\varphi} + \Omega dt)^2 - d\tilde{z}^2 = \\ &= (c^2 - r^2\Omega^2)dt^2 - 2\Omega r^2 d\varphi dt - r^2d\varphi^2 - dr^2 - dz^2, \end{aligned} \tag{4.5}$$

т.е. действительно интервал стал зависящей от координат, недиагональной квадратичной формой $ds^2 = g_{ik}\,dx^i dx^k$.

Использование g_{ik} для измерения времени и расстояний

Время

Если мы знаем g_{ik}, как связать изменение обобщенных координат с тем, что мы называем «промежутком времени» или «длиной»?

Для начала заметим, что при преобразовании матрицы g_{ik} из одной системы отсчета в другую сохраняется *четность* — т.е. количество положительных и отрицательных диагональных элементов. Таким образом всегда будем иметь один положительный, назовем его g_{00} и три отрицательных элемента $g_{\alpha\alpha}$. Та координата, которая стоит при положительном g_{ii} имеет смысл времени, остальные — пространства. Итак, x^0 задает время, ее называют *координатным временем*. Физический промежуток времени равен

$$d\tau \equiv \frac{1}{c}\sqrt{ds^2} \qquad \text{для } dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0 \tag{4.6}$$

т.е. фактически интервалу между событиями происшедшими в одной точке пространства. Отсюда видно, что

$$d\tau = \sqrt{g_{00}}\,dx^0. \tag{4.7}$$

Для нашего вращающегося диска

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}\,dt \tag{4.8}$$

Это есть просто Лоренцевское сокращение времени из-за того, что точка на диске движется перпендикулярно наблюдателю.

Расстояние

Казалось бы, и расстояние надо измерять, фиксируя момент времени:

$$dl^2 = g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta \tag{4.9}$$

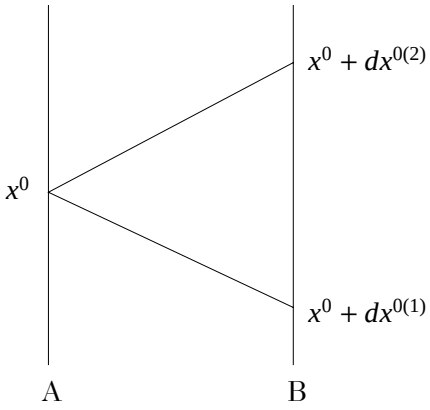
Для двух событий на одном и том же радиусе диска это привело бы к

$$dl^2 = r^2d\varphi^2, \tag{4.10}$$

что неправильно, так как мы должны видеть Лоренцевское сокращение длины. Ошибка состоит в том, что мы под понятием «один и тот же момент времени» положили $t = \text{const}$.

Расстояние надо мерить следующим образом: пускаем лучик света из точки A в точку B, и отражаем обратно. Измеряем промежуток времени, за который свет вернется. $l = c\Delta t/2$.

Такой метод измерения расстояния можно «оправдать» следующим образом: грубо говоря, $ds^2 = c^2d\tau^2 - dl^2$, но вдоль распространения света $ds = 0$, поэтому $dl = c\,d\tau$.



Интервал между приходом света из одной точки в другую равен

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + 2g_{0\alpha}dx^0 + g_{00}(dx^0)^2 \tag{4.11}$$

Но вдоль распространения света $ds = 0$, поэтому можно найти решить это уравнение относительно dx^0:

$$\begin{aligned} dx^{0(1)} &= \frac{1}{g_{00}}\left(-g_{0\alpha} - \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00})dx^\alpha dx^\beta}\right) \\ dx^{0(2)} &= \frac{1}{g_{00}}\left(-g_{0\alpha} + \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00})dx^\alpha dx^\beta}\right) \end{aligned} \tag{4.12}$$

Для длины находим:

$$dl = c\Delta t/2 = \frac{\sqrt{g_{00}}}{2}\left(dx^{0(2)} - dx^{0(1)}\right) = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00})dx^\alpha dx^\beta} \tag{4.13}$$

или

$$dl^2 = \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}\right)dx^\alpha dx^\beta \tag{4.14}$$

Задача

Убедиться, что для вращающегося диска уравнение (4.14) дает лоренцевское сокращение длины в направлении вращения

4.2 Векторы, тензоры, etc.

Пусть координаты преобразуются как $x^i = x^i(x')$. *Контравариантный вектор:*

$$B^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k}B'^k \tag{4.15}$$

а *ковариантый* вектор:

$$B_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i}B'_k \tag{4.16}$$

Из «известных» объектов дифференциал координаты dx^i — контравариантный вектор, а частная производная скаляра $\partial\varphi/\partial x^i$ — ковариантный.

В равенстве $ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k$ произведение $dx^i dx^k$ — контравариантный тензор, а ds^2 — скаляр. Следовательно g_{ik} — ковариантный (симметричный) тензор. Ему ставится в соответствие контравариантный тензор g^{ik} уравнением

$$g_{ik}g^{il} = \delta^l_k. \tag{4.17}$$

Каждую физическую величину можно выражать либо ковариантным, либо контравариантным вектором (тензором), который переводятся один в другой уравнениями

$$g^{ik}B_k = B^i \qquad g_{ik}B^k = B_i$$

Свертка

$$B^iB_i = g_{ik}B^iB^k$$

есть скаляр.

4.3 Ковариантное дифференцирование

Обычно мы думаем, что дифференциал вектора A_i автоматически тоже является вектором, а производная $\partial A_i/\partial x^k$ — тензором. В криволинейных координатах это не так. Вектор преобразуется по закону

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i}A'_k \tag{4.18}$$

поэтому

$$dA_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i}dA'_k + A'_k d\frac{\partial x'^k}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i}dA'_k + A'_k\frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i\partial x^j}dx^j \tag{4.19}$$

Только в случае, если вторые производные равны нулю (как при лоренцевых преобразовцаниях), дифференциал вектора преобразуется как вектор.

Физически, такая ситуация обусловлена тем, что дифференциал — разница векторов в двух разных точках, а в случае общих криволинейных координат в разных точках вектора преобразуются по разному.

Чтобы правильно посчитать разность между векторами, их надо сдвинуть в одну точку. Как? Операцией параллельного переноса. В кривом пространстве при переносе вектора параллельно самому себе его компоненты меняются. После переноса разница между векторами в одной точке составит

$$DA^i = dA^i - \delta A^i \tag{4.20}$$

Это называется ковариантным дифференциалом. Очевидно, что изменение при переносе пропорционально длине вектора, а также расстоянию, т.е.

$$\delta A^i = -\Gamma^i_{kl}\,A^k dx^l \tag{4.21}$$

Коэффициенты Γ^i_{kl} называются коэффициентами связанности или символами Кристоффеля. Итак,

$$DA^i = dA^i + \Gamma^i_{kl}\,A^k dx^l = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl}\,A^k\right)dx^l \tag{4.22}$$

Выражение в скобках — ковариантная производная $A^i_{;l}$. Ковариантные производные играют в ОТО играют роль обычных производных. В частности уравнения для траектории пробной получаются из условия $Du = 0$ (эквивалентного условию $u = \mathrm{const}$ в Галилеевской механике):

$$\begin{aligned} &Du = 0\\ &du^i + \Gamma^i_{kl}u^k dx^l = 0\\ &\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{kl}u^k u^l = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = 0 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Далее, отметим что Γ^i_{kl} играют роль силы или ускорения силы тяжести: для покоящейся частицы имеем u^α, $dx^\alpha = 0$, $ds = \sqrt{g_{00}}dx^0 = c\,d\tau$, поэтому $u^0 = dx^0/ds = 1/\sqrt{g_{00}}$, а для пространственных компонент ускорения:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} = -\Gamma^\alpha_{00}u^{0\,2} = -\frac{\Gamma^\alpha_{00}}{g_{00}} \quad \text{или}\\ &\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} = -c^2\frac{\Gamma^\alpha_{00}}{g_{00}} \end{aligned} \tag{4.24}$$

Из принципа эквивалентности следует, что можно выбрать систему отсчета, в которой в данной точке $\Gamma^{\alpha}_{00} = 0$, и более того все $\Gamma^{i}_{kl} = 0$.

Ковариантная производная ковариантного вектора и тензора есть

$$A_{i;l} = \frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il} A_k \qquad A_{ik;l} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma^m_{il} A_{mk} - \Gamma^m_{kl} A_{im} \tag{4.25}$$

4.3.1 Связь символов Кристоффеля с метрическим тензором

Сначала доказывается, что ковариантная производная метрического тензора равна нулю: Для вектора DA_i как и для любого другого вектора имеет место соотношение

$$DA_i = g_{ik} DA^k \tag{4.26}$$

С другой стороны, $A_i = g_{ik}A^k$, поэтому

$$DA_i = D(g_{ik}A^k) = g_{ik}DA^k + A^k Dg_{ik} \tag{4.27}$$

следовательно $Dg_{ik} = 0$. Поэтому и ковариантная производная равна нулю:

$$g_{ik;l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma^m_{il}\, g_{mk} - \Gamma^m_{kl}\, g_{im} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{k,il} - \Gamma_{i,kl} = 0 \tag{4.28}$$

Делая циклические перестановки индексов i, k, l, мы можем написать

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \Gamma_{k,il} + \Gamma_{i,kl} \qquad \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} = \Gamma_{i,kl} + \Gamma_{l,ik} \qquad \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = \Gamma_{l,ki} + \Gamma_{k,li} \tag{4.29}$$

Симметричность Γ^i_{kl} по нижним индексам
Можно показать, что разность

$$S^i_{kl} = \Gamma^i_{kl} - \Gamma^i_{lk} \tag{4.30}$$

преобразуется как тензор. Так как принцип эквивалентности говорит, что можно выбрать такую систему отсчета, в которой Γ^i_{kl} в данной точке равны нулю, то и S^i_{kl} в такой системе отсчета равен нулю. Раз он тензор, он равен нулю во всех других системах отсчета. Следовательно, Γ^i_{kl} симметричен по нижним индексам.

Принимая во внимание симметричность Γ^i_{kl}, а следовательно и $\Gamma_{k,il}$, замечаем, что если в (4.29) прибавить ко второму уравнению первое и отнять третье, исчезнут члены $\Gamma_{l,ki}$ и $\Gamma_{k,li}$ и останутся только $\Gamma_{i,kl}$. Отсюда легко найти

$$\Gamma_{i,kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right), \tag{4.31}$$

откуда поднимая индекс $\Gamma^i_{kl} = g^{im}\Gamma_{m,kl}$ получаем

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right) \tag{4.32}$$

4.4 Тензор кривизны

В плоском пространстве при параллельном переносе вдоль замкнутого контура (как и при любом параллельном переносе) вектор сохраняется. В искривленном пространстве это не так (см. рис. 4.1). Вектор сохранится, только если путь «назад» в точности повторяет путь «вперед». В общем случае изменение вектора ΔA^i должно быть пропорционально самому вектору и площади, охватываемой контуром:

$$\Delta A^i = \frac{1}{2} R^i_{klm} A^k \Delta f^{lm} \tag{4.33}$$

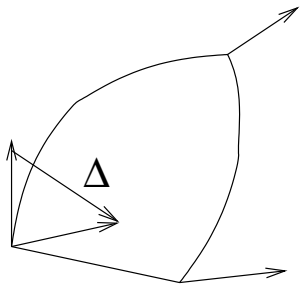


Рис. 4.1. Изменение вектора при параллельном переносе вдоль замкнутого контура

Это уравнение служит определением *тензора кривизны* или *тензора Римана* R^i_{klm}. Так как изменение вектора при параллельном переносе выражается через Γ^i_{kl}, а он в свою очередь — через g_{ik}, то и R^i_{klm} можно выразить через них:

$$R^i_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl} \tag{4.34}$$

Свертка R^i_{klm} по паре индексов дает *тензор Риччи* R_{km}:

$$R_{km} = R^i_{kim}, \tag{4.35}$$

который непосредственно записывается как

$$R_{km} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^i_{ki}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{bi}\Gamma^b_{km} - \Gamma^i_{bk}\Gamma^b_{im}. \tag{4.36}$$

Наконец, свертка $R = R^i_{\ i}$ дает *скалярную кривизну*[1]

Тензор R^i_{kim} полностью описывает кривизну 4-пространства. Если он равен нулю в некоторой области, то пространство в этой области плоское. (В частности, если в плоском пространсве введем кривую систему отсчета, то в силу свой тензорной природы R^i_{kim} будет и в ней нулем, т.е. он как раз говорит о *внутренних* свойствах пространства.

Равенства $R = 0$ и даже $R_{ik} = 0$ недостаточно для того, чтобы утверждать, что пространство-время плоское.

4.5 Уравнения Эйнштейна

Эвристические соображения:

Действие для гравитационного поля должно выражаться через интеграл некоторого скаляра:

$$S_g = \int G\sqrt{-g}\,d\Omega$$

Из общего желания получить уравнения, которые содержат производные «потенциала» (g_{ik}) не выше второго порядка, нужно, чтобы G содержало производные g_{ik} не выше первого порядка. Нужным свойством обладает скаляр R (он хоть и содержит производные второго порядка, но они составляют дивергенцию некоторого 4-вектора и поэтому исчезают при варьировании). Таким образом,

$$S_g = \text{const} \times \int R\sqrt{-g}\,d\Omega$$

Действие для материи есть

$$S_m = \int \sqrt{-g}\,d\Omega$$

[1] В двухмерном случае скалярная кривизна $R/2 = 1/\rho_1\rho_2$.

Уравнения гравитационного поля получаются из условия

$$\delta S_g + \delta S_m = 0$$

При варьировании S_g вылезает величина $R_{ik} - \frac{1}{2} g_i k R$, варьирование S_m определяет ни что иное, как тензор энергии импульса T_{ik}. Таким образом уравнения гравитационного поля записываются как $R_{ik} - \frac{1}{2} g_i k R = \mathrm{const} T_{ik}$, где const находится из условия того, что для слабого поля уравнения поля эквивалентны уравнению Пуассона $\Delta\varphi = 4\pi G\rho$. В результате получается *уравнения Эйнштейна*

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik} \tag{4.37}$$

Эта форма записи не единственна. Поднимем один индекс:

$$R^i_k - \frac{1}{2} \delta^i_k R = \frac{8\pi G}{c^4} T^i_k \tag{4.38}$$

Свернем уравнение по всем индексам, получим

$$R = -\frac{8\pi G}{c^4} T, \tag{4.39}$$

отсюда

$$R_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T \right) \tag{4.40}$$

Наконец, поднимем в нем один индекс:

$$R^i_k = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T^i_k - \frac{1}{2} \delta^i_k T \right) \tag{4.41}$$

4.5.1 Тензор энергии-импульса для газа

Для газа

$$T^{ik} = (\varepsilon + p) u^i u^k - p g^{ik} \tag{4.42}$$

где $\varepsilon = \rho c^2$ — плотность энергии вещества (включая массу покоя частиц) в той системе, где этот элемент покоится, а p — давление. Эта формула подразумевает, что жидкость невязкая, а поток энергии относительно вещества мал по сравнению с ρc^3.

В локально Лоренцевой системе, в которой газ покоится:

$$T_{ik} = \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{vmatrix} \tag{4.43}$$

(отметим, что мы смогли безболезненно опустить индексы потому что система Лоренцева). Для фотонного газа

$$T_{ik} = \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\varepsilon \end{vmatrix} \tag{4.44}$$

4.6 Слабое поле

Покажем, что из уравнений Эйнштейна в случае слабого поля следет закон Ньютона.

Что подразумеваем под слабое полем? Метрический тензор в таком поле

$$g_{ik} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} + \gamma_{ik}, \tag{4.45}$$

где γ_{ik} — малая поправка. Далее, у вещества скорости малы по сравнению с c, поэтому полагаем

$$u^\alpha = 0, \qquad u^0 u_0 = 1, \tag{4.46}$$

а в тензоре $T^i_k = (\varepsilon + p)u^i u_k - P g^i_k$ все компоненты равны нулю, кроме $T^0_0 = \varepsilon$; поэтому свертка $T^i_{\ i} = \varepsilon$.

Используем уравнения Эйнштейна в форме (4.41):

$$R^i_k = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T^i_k - \frac{1}{2}\delta^i_k T\right) \tag{4.47}$$

при $k, i = 0$ получаем

$$R^0_0 = \frac{8\pi G}{c^4}\frac{1}{2}\varepsilon = \frac{4\pi G}{c^4}\varepsilon \tag{4.48}$$

Теперь обратим внимание на тензор R_{00}:

$$R_{00} = \frac{\partial \Gamma^l_{00}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^l_{0l}}{\partial x^0} + \Gamma^l_{00}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{0l}\Gamma^l_{0m}. \tag{4.49}$$

Так как система почти Лоренцева, все Γ^i_{kl} — члены первого порядка малости, поэтому их попарным произведением можно пренебречь. А производные $\partial/\partial x^0$ малы по сравнению с $\partial/\partial x^\alpha$ (потому что $x^0 = ct$). Итак,

$$R_{00} = \frac{\partial \Gamma^\alpha_{00}}{\partial x^\alpha}, \quad R^0_0 = R_{00} + \text{члены 2-го порядка} \tag{4.50}$$

Теперь вычисляем Γ^α_{00}:

$$\Gamma^\alpha_{00} = \frac{1}{2}g^{\alpha m}\left(\frac{\partial g_{m0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{m0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^m}\right) \approx -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\beta} \approx \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} \tag{4.51}$$

Тут вспоминаем, что Γ^α_{00} дают ускорение покоящейся частицы:

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} = -c^2\frac{\Gamma^\alpha_{00}}{g_{00}} = -\frac{c^2}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} \tag{4.52}$$

что очень похоже на уравнение для гравитационной силы $a = -\nabla\varphi$; именно

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2} \tag{4.53}$$

Возвращаемся к уравнению Эйнштейна:

$$R^0_0 = \frac{1}{2}\sum_\alpha \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial^2 x^\alpha} = \frac{4\pi G}{c^4}\varepsilon \tag{4.54}$$

или

$$\frac{1}{c^2}\Delta\varphi = \frac{4\pi G}{c^4}\varepsilon, \tag{4.55}$$

т.е. выходит уравнение Пуассона.

4.7 Центрально-симметричное поле: метрика Шварцшильда

В сферически симметричном случае можно ввести «сферические» координаты и метрику искать в виде:

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta^2 d\varphi^2) \tag{4.56}$$

В пространственном члене «радиус» r вводится так, чтобы длина окружности равнялась $2\pi r$ (но настоящий радиус равен не r, а $\int_0^r e^{\lambda/2}d\rho$! — заметить произвольности выбора системы координат). Угловой член отражает сферическую симметричность.

Почему нет членов $g_{0\alpha}$?

Членов $g_{0\varphi}$ и $g_{0\theta}$ быть не может в силу изотропии. Если есть g_{0r}, т.е. метрика записывается в виде

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{11}dr^2 + g_{01}dtdr + ...,$$

то мы можем перегруппировать члены

$$ds^2 = g_{00}\left(dt + \frac{g_{01}}{2g_{00}}dr\right)^2 + \left(g_{11} - \frac{g_{01}^2}{4g_{00}}\right)^2 dr^2 + ...,$$

и заменой времени привести метрику к виду (4.56).

Итак, метрический тензор в сферически симметричном случае записывается как

$$g_{ik} = \begin{vmatrix} e^{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{vmatrix} \tag{4.57}$$

а соответсвующий контравариантный тензор есть просто обратная матрица

$$g^{ik} = \begin{vmatrix} e^{-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{vmatrix} \tag{4.58}$$

4.7.1 Вычисление Γ^i_{kl}

Вспоминаем формулу для символа Кристоффеля:

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}g^{ia}\left(-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^a} + \frac{\partial g_{ka}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{al}}{\partial x^k}\right) \tag{4.59}$$

$i = 0$

В формуле (4.59) при $i = 0$ все g^{ia} равны нулю кроме g^{00}, поэтому суммирование по a заключается только в учете члена с $a = 0$:

$$\Gamma^0_{kl} = \frac{1}{2}e^{-\nu}\left(-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{k0}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{0l}}{\partial x^k}\right)$$

Перебираем k, l:

$$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2}e^{-\nu}\left(-\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0}\right) = \frac{1}{2}e^{-\nu}\frac{\partial}{\partial t}e^{\nu} = \frac{\dot{\nu}}{2} \tag{4.60}$$

$$\Gamma^0_{01} = \frac{1}{2}e^{-\nu}\left(-\frac{\partial g_{01}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{01}}{\partial x^0}\right) = \frac{1}{2}e^{-\nu}\frac{\partial}{\partial r}e^{\nu} = \frac{\nu'}{2} \tag{4.61}$$

$$\Gamma^0_{02} = \frac{1}{2}e^{-\nu}\left(-\frac{\partial g_{02}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{02}}{\partial x^0}\right) = 0 = \Gamma^0_{03} \tag{4.62}$$

По нижним индексам Γ^i_{kl} симметричен, поэтому, например, Γ^0_{10} можно не вычислять.

$$\Gamma^0_{11} = \frac{1}{2}e^{-\nu}\left(-\frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{10}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{01}}{\partial x^1}\right) = \frac{1}{2}e^{-\nu}\frac{\partial}{\partial t}e^{\lambda} = \frac{\dot{\lambda}}{2}\,e^{\lambda-\nu} \tag{4.63}$$

$$\Gamma^0_{12} = \frac{1}{2}e^{-\nu}\left(-\frac{\partial g_{12}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{10}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{01}}{\partial x^2}\right) = 0 = \Gamma^0_{13} \tag{4.64}$$

$$\Gamma^0_{22} = \frac{1}{2}e^{-\nu}\left(-\frac{\partial g_{22}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{20}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{02}}{\partial x^2}\right) = 0 = \Gamma^0_{23} = \Gamma^0_{33} \tag{4.65}$$

потому что либо берем производные постоянных компонент, либо по координате (время), от которой компонента не зависит.

$i = 1$

Аналогично случаю $i = 0$, все g^{1a} равны нулю кроме g^{11}, поэтому имеем:

$$\Gamma^1_{kl} = -\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{k1}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{1l}}{\partial x^k}\right)$$

$$\Gamma^1_{00} = -\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(-\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{01}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{10}}{\partial x^0}\right) = \frac{1}{2}e^{-\lambda}\frac{\partial}{\partial r}e^{\nu} = \frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda} \tag{4.66}$$

$$\Gamma^1_{01} = -\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(-\frac{\partial g_{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^0}\right) = \frac{1}{2}e^{-\lambda}\frac{\partial}{\partial t}e^{\lambda} = \frac{\dot{\lambda}}{2} \tag{4.67}$$

$$\Gamma^1_{02} = -\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(-\frac{\partial g_{02}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{01}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^0}\right) = 0 = \Gamma^1_{03} \tag{4.68}$$

$$\Gamma^1_{11} = -\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(-\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\right) = \frac{1}{2}e^{-\lambda}\frac{\partial}{\partial r}e^{\lambda} = \frac{\lambda'}{2} \tag{4.69}$$

(уже пора давно подмечать определенную симметрию в выражениях для первой и нулевой координат)

$$\Gamma^1_{12} = -\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(-\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}\right) = \Gamma^1_{13} \tag{4.70}$$

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(-\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}\right) = -\frac{1}{2}e^{-\lambda}\frac{\partial}{\partial r}(r^2) = -re^{-\lambda} \tag{4.71}$$

$$\Gamma^1_{23} = -\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(-\frac{\partial g_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{13}}{\partial x^2}\right) = 0 \tag{4.72}$$

$$\Gamma^1_{33} = -\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(-\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{13}}{\partial x^3}\right) = -r\sin^2\theta\, e^{-\lambda} \tag{4.73}$$

$i = 2$

$$\Gamma^2_{kl} = \frac{1}{2}g^{22}\left(-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{k2}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{2l}}{\partial x^k}\right)$$

При $k = 0$

$$\Gamma^2_{0l} = \frac{1}{2}g^{22}\left(-\frac{\partial g_{0l}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{02}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{2l}}{\partial x^0}\right) = 0 \tag{4.74}$$

При $k = 1$

$$\Gamma^2_{1l} = \frac{1}{2}g^{22}\left(-\frac{\partial g_{1l}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{2l}}{\partial x^1}\right) \tag{4.75}$$

единственный отличный от нуля член — с $l = 2$:

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial}{\partial r}g_{22} = \frac{1}{2r^2}\,2r = \frac{1}{r} \tag{4.76}$$

$$\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2}g^{22}\left(-\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}\right) = 0 \tag{4.77}$$

$$\Gamma^2_{23} = \frac{1}{2}g^{22}\left(-\frac{\partial g_{23}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{23}}{\partial x^2}\right) = 0 \tag{4.78}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^2_{33} &= \frac{1}{2}g^{22}\left(-\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{32}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{23}}{\partial x^3}\right)\\ &= \frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial}{\partial\theta}g_{33} = -\frac{2r^2\sin\theta\cos\theta}{2r^2} = -\sin\theta\,\cos\theta\end{aligned} \tag{4.79}$$

$i = 3$

$$\Gamma^3_{kl} = \frac{1}{2} g^{33} \left(-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{k3}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{3l}}{\partial x^k} \right)$$

Видно, что отличные от нуля члены — с либо $l = 3$, либо $k = 3$; можем считать только для $l = 3$ из-за симметрии; при этом выпадают первый и второй члены так как от φ вообще ничего не зависит

$$\Gamma^3_{03} = \frac{1}{2} g^{33} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^0} \right) = 0 \tag{4.80}$$

$$\Gamma^3_{13} = \frac{1}{2} g^{33} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right) = \frac{2r \sin^2 \theta}{2r^2 \sin^2 \theta} = \frac{1}{r} \tag{4.81}$$

$$\Gamma^3_{23} = \frac{1}{2} g^{33} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \right) = \frac{r^2 2 \sin \theta \cos \theta}{2r^2 \sin^2 \theta} = \operatorname{ctg} \theta \tag{4.82}$$

$$\Gamma^3_{33} = \frac{1}{2} g^{33} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3} \right) = 0 \tag{4.83}$$

Подводим итог:

$$\begin{aligned}
&\Gamma^0_{00} = \frac{\dot{\nu}}{2} \quad \Gamma^0_{10} = \frac{\nu'}{2} \quad \Gamma^0_{11} = \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda - \nu} \\
&\Gamma^1_{00} = \frac{\nu'}{2} e^{\nu - \lambda} \quad \Gamma^1_{01} = \frac{\dot{\lambda}}{2} \quad \Gamma^1_{11} = \frac{\lambda'}{2} \quad \Gamma^1_{22} = -r e^{-\lambda} \quad \Gamma^1_{33} = -r \sin^2 \theta \, e^{-\lambda} \\
&\Gamma^2_{12} = \frac{1}{r} \quad \Gamma^2_{33} = -\sin \theta \cos \theta \\
&\Gamma^3_{13} = \frac{1}{r} \quad \Gamma^3_{23} = \operatorname{ctg} \theta
\end{aligned} \tag{4.84}$$

а все остальные Γ^i_{kl} равны нулю.

4.7.2 Вычисление R_{km}

Тензор Риччи выражается через символы Кристоффеля следующим образом:

$$R_{km} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^i_{ki}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{bi} \Gamma^b_{km} - \Gamma^i_{bk} \Gamma^b_{im}.$$

В это выражение два раза входит свертка Γ^i_{bi}. Ее значение есть:

$$\Gamma^i_{0i} = \frac{\dot{\lambda} + \dot{\nu}}{2}, \qquad \Gamma^i_{1i} = \frac{\lambda' + \nu'}{2} + \frac{2}{r}, \qquad \Gamma^i_{2i} = \operatorname{ctg} \theta \qquad , \Gamma^i_{3i} = 0 \tag{4.85}$$

$k = 0$

Сначала вычисляем R_{00}:

$$
\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{\partial\Gamma^i_{00}}{\partial x^i} - \frac{\partial\Gamma^i_{0i}}{\partial x^0} + \Gamma^i_{bi}\Gamma^b_{00} - \Gamma^i_{b0}\Gamma^b_{i0} = \frac{\partial\Gamma^0_{00}}{\partial t} + \frac{\partial\Gamma^1_{00}}{\partial r} + \\
&- \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\dot\lambda + \dot\nu}{2}\right) + \Gamma^i_{0i}\Gamma^0_{00} + \Gamma^i_{1i}\Gamma^1_{00} - \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{00} - \Gamma^0_{10}\Gamma^1_{00} - \\
&- \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{10} - \Gamma^1_{10}\Gamma^1_{10} = \cancel{\frac{\ddot\nu}{2}} + \frac{\nu''}{2}e^{\nu-\lambda} + \nu'\cancel{\frac{\nu'}{2}}e^{\nu-\lambda} - \cancel{\frac{\ddot\nu}{2}} + \frac{\ddot\lambda}{2} + \\
&+ \cancel{\frac{\dot\nu\dot\nu}{2}} + \frac{\dot\lambda}{2} + e^{\nu-\lambda}\frac{\nu'}{2}\left(\frac{\lambda'+\nu'}{2} + \frac{2}{r}\right) - \cancel{\frac{\dot\nu^2}{4}} - \cancel{2\times\frac{\nu'^2}{4}e^{\nu-\lambda}} - \frac{\dot\lambda^2}{4} = \\
&= \frac{\nu''}{2}e^{\nu-\lambda} - \frac{\ddot\lambda}{2} + \frac{\dot\nu\dot\lambda}{4} + e^{\nu-\lambda}\frac{\nu'}{2}\left(\frac{\nu'-\lambda'}{2} + \frac{2}{r}\right) - \frac{\dot\lambda^2}{4}
\end{aligned}
\tag{4.86}
$$

Теперь R_{01}:

$$
\begin{aligned}
R_{01} &= \frac{\partial\Gamma^i_{01}}{\partial x^i} - \frac{\partial\Gamma^i_{0i}}{\partial x^1} + \Gamma^i_{bi}\Gamma^b_{01} - \Gamma^i_{b0}\Gamma^b_{i1} = \frac{\partial\Gamma^0_{01}}{\partial t} + \frac{\partial\Gamma^1_{01}}{\partial r} + \\
&- \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\dot\nu + \dot\lambda}{2}\right) + \Gamma^i_{0i}\Gamma^0_{01} + \Gamma^i_{1i}\Gamma^1_{01} - \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{01} - \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{11} - \Gamma^0_{10}\Gamma^1_{01} \\
&- \Gamma^1_{10}\Gamma^1_{11} = \boxed{\cancel{\frac{\dot\nu'}{2} + \frac{\dot\lambda'}{2} - \frac{\dot\nu' + \dot\lambda'}{2}}} + \cancel{\frac{\dot\lambda + \dot\nu}{2}\frac{\nu'}{2}} + \left(\cancel{\frac{\lambda'+\nu'}{2}} + \frac{2}{r}\right)\frac{\dot\lambda}{2} - \\
&- \cancel{\frac{\dot\nu\nu'}{4}} - \cancel{\frac{\nu'\dot\lambda}{4}e^{\nu-\lambda+\lambda-\nu}} - \cancel{\frac{\nu'\dot\lambda}{4}} - \cancel{\frac{\dot\lambda\lambda'}{4}} = \\
&= \frac{\dot\lambda}{r}
\end{aligned}
\tag{4.87}
$$

Теперь R_{02} и R_{03}:

$$
\begin{aligned}
R_{02} &= \cancel{\frac{\partial\Gamma^i_{02}}{\partial x^i}} - \cancel{\frac{\partial\Gamma^i_{0i}}{\partial x^2}} + \cancel{\Gamma^i_{bi}\Gamma^b_{02}} - \Gamma^i_{b0}\Gamma^b_{i2} = \cancel{-\Gamma^i_{00}\Gamma^0_{i2}} - \Gamma^i_{10}\Gamma^1_{i2} = \\
&= -\Gamma^0_{10}\Gamma^1_{02} - \Gamma^1_{10}\Gamma^1_{12} = 0
\end{aligned}
\tag{4.88}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{03} &= \cancel{\frac{\partial\Gamma^i_{03}}{\partial x^i}} - \cancel{\frac{\partial\Gamma^i_{0i}}{\partial x^3}} + \cancel{\Gamma^i_{bi}\Gamma^b_{03}} - \Gamma^i_{b0}\Gamma^b_{i3} = \cancel{-\Gamma^i_{00}\Gamma^0_{i3}} - \Gamma^i_{10}\Gamma^1_{i3} = \\
&= -\Gamma^0_{10}\Gamma^1_{03} - \Gamma^1_{10}\Gamma^1_{13} = 0
\end{aligned}
\tag{4.89}
$$

$k = 1$

Приступаем к R_{11}, R_{12} и R_{13}

$$
\begin{aligned}
&R_{11} = \frac{\partial \Gamma^i_{11}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^i_{1i}}{\partial x^1} + \Gamma^i_{bi}\Gamma^b_{11} - \Gamma^i_{b1}\Gamma^b_{i1} = \frac{\partial \Gamma^0_{11}}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial r} - \\
&- \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\lambda' + \nu'}{2} + \frac{2}{r}\right) + \Gamma^i_{0i}\Gamma^0_{11} + \Gamma^i_{1i}\Gamma^1_{11} - \Gamma^i_{01}\Gamma^0_{i1} - \Gamma^i_{11}\Gamma^1_{i1} - \Gamma^i_{21}\Gamma^2_{i1} - \\
&- \Gamma^i_{31}\Gamma^3_{i1} = \frac{\ddot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu} + \frac{\dot{\lambda}}{2}(\dot{\lambda} - \dot{\nu}) e^{\lambda-\nu} + \frac{\lambda''}{2} - \frac{\lambda'' + \nu''}{2} + \frac{2}{r^2} + \\
&+ \frac{\dot{\lambda} + \dot{\nu}}{2}\frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu} + \left(\frac{\lambda' + \nu'}{2} + \frac{2}{r}\right)\frac{\lambda'}{2} - \Gamma^0_{01}\Gamma^0_{01} - \Gamma^1_{01}\Gamma^0_{11} - \Gamma^0_{11}\Gamma^1_{01} - \\
&- \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{21}\Gamma^2_{21} - \Gamma^3_{31}\Gamma^3_{31} = \frac{\ddot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu} + \frac{\dot{\lambda}}{2}(\dot{\lambda} - \dot{\nu}) e^{\lambda-\nu} + \cancel{\frac{\lambda''}{2}} - \\
&- \cancel{\frac{\lambda''}{2}} + \frac{\nu''}{2} + \boxed{\cancel{\frac{2}{r^2}}} + \cancel{\frac{\dot{\lambda} + \dot{\nu}}{2}\frac{\dot{\lambda}}{2}} e^{\lambda-\nu} + \left(\boxed{\cancel{\frac{\lambda'}{2}}} + \frac{\nu'}{2} + \frac{2}{r}\right)\frac{\lambda'}{2} - \frac{\nu'^2}{4} - \\
&- \cancel{2 \times \frac{\dot{\lambda}^2}{4} e^{\lambda-\nu}} - \boxed{\cancel{\frac{\lambda'^2}{4}}} - \boxed{\cancel{\frac{1}{r^2}} - \cancel{\frac{1}{r^2}}} = \\
&= \frac{\ddot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu} + \frac{\dot{\lambda}}{2}\frac{\dot{\lambda} - \dot{\nu}}{2} e^{\lambda-\nu} - \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'^2}{4}
\end{aligned}
\tag{4.90}
$$

$$
\begin{aligned}
&R_{12} = \frac{\partial \Gamma^i_{12}}{\partial x^i} - \cancel{\frac{\partial \Gamma^i_{1i}}{\partial x^2}} + \Gamma^i_{bi}\Gamma^b_{12} - \Gamma^i_{b1}\Gamma^b_{i2} = \cancel{\frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x^2}} + \Gamma^i_{2i}\Gamma^2_{12} - \Gamma^i_{11}\Gamma^1_{i2} - \\
&- \Gamma^i_{21}\Gamma^2_{i2} - \Gamma^i_{31}\Gamma^3_{i2} = \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r} - \cancel{\Gamma^0_{11}\Gamma^1_{02}} - \cancel{\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{12}} - \cancel{\Gamma^2_{21}\Gamma^2_{22}} - \Gamma^3_{31}\Gamma^3_{32} = \\
&= \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r} - \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r} = 0
\end{aligned}
\tag{4.91}
$$

$$
\begin{aligned}
&R_{13} = \frac{\partial \Gamma^i_{13}}{\partial x^i} - \cancel{\frac{\partial \Gamma^i_{1i}}{\partial x^3}} + \Gamma^i_{bi}\Gamma^b_{13} - \Gamma^i_{b1}\Gamma^b_{i3} = \cancel{\frac{\partial \Gamma^3_{13}}{\partial x^3}} + \cancel{\Gamma^i_{3i}\Gamma^3_{13}} - \cancel{\Gamma^i_{11}\Gamma^1_{i3}} - \\
&- \Gamma^i_{21}\Gamma^2_{i3} - \Gamma^i_{31}\Gamma^3_{i3} = \cancel{-\Gamma^2_{21}\Gamma^2_{23}} - \cancel{\Gamma^3_{31}\Gamma^3_{33}} = 0
\end{aligned}
\tag{4.92}
$$

$k = 2$

Вычисляем R_{22} и R_{23}

$$
\begin{aligned}
&R_{22} = \frac{\partial \Gamma^i_{22}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^i_{2i}}{\partial x^2} + \Gamma^i_{bi}\Gamma^b_{22} - \Gamma^i_{b2}\Gamma^b_{i2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(-re^{-\lambda}\right) - \frac{\partial \operatorname{ctg}\theta}{\partial \theta} + \\
&+ \Gamma^i_{1i}\Gamma^1_{22} - \Gamma^i_{12}\Gamma^1_{i2} - \Gamma^i_{22}\Gamma^2_{i2} - \Gamma^i_{32}\Gamma^3_{i2} = -e^{-\lambda} + r\lambda' e^{-\lambda} + \frac{1}{\sin^2\theta} - \\
&- re^{-\lambda}\left(\frac{\lambda' + \nu'}{2} + \cancel{\frac{2}{r}}\right) - \cancel{2 \times \frac{1}{r}(-re^{-\lambda})} - \operatorname{ctg}^2\theta = -e^{-\lambda} + \\
&+ re^{-\lambda}\frac{\lambda' - \nu'}{2} + \frac{1 - \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = -e^{-\lambda} + re^{-\lambda}\frac{\lambda' - \nu'}{2} + 1
\end{aligned}
\tag{4.93}
$$

$$
\begin{aligned}
&R_{23} = \frac{\partial \Gamma^i_{23}}{\partial x^i} - \cancel{\frac{\partial \Gamma^i_{2i}}{\partial x^3}} + \Gamma^i_{bi}\Gamma^b_{23} - \Gamma^i_{b2}\Gamma^b_{i3} = \cancel{\frac{\partial \Gamma^3_{23}}{\partial x^3}} + \cancel{\Gamma^i_{3i}\Gamma^3_{23}} - \Gamma^i_{12}\Gamma^1_{i3} - \\
&- \Gamma^i_{22}\Gamma^2_{i3} - \Gamma^i_{32}\Gamma^3_{i3} = \cancel{\Gamma^2_{12}\Gamma^1_{23}} - \cancel{\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{13}} - \cancel{\Gamma^3_{32}\Gamma^3_{33}} = 0
\end{aligned}
\tag{4.94}
$$

$k = 3$

Наконец, последний элемент:

$$\begin{aligned} R_{33} &= \frac{\partial\Gamma^i_{33}}{\partial x^i} - \cancel{\frac{\partial\Gamma^i_{3i}}{\partial x^3}} + \Gamma^i_{bi}\Gamma^b_{33} - \Gamma^i_{b3}\Gamma^b_{i3} = \frac{\partial\Gamma^1_{33}}{\partial r} + \frac{\partial\Gamma^2_{33}}{\partial\theta} + \Gamma^i_{1i}\Gamma^1_{33} + \\ &+ \Gamma^i_{2i}\Gamma^2_{33} - \Gamma^3_{13}\Gamma^1_{33} - \Gamma^3_{23}\Gamma^2_{33} - \Gamma^1_{33}\Gamma^3_{13} - \Gamma^2_{33}\Gamma^3_{23} = \\ &= -\sin^2\theta\, e^{-\lambda}(1 - r\lambda') - \cancel{\cos^2\theta} + \sin^2\theta - \\ &- r\sin^2\theta\, e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda' + \nu'}{2} + \cancel{\frac{2}{r}}\right) - \cancel{\sin\theta\cos\theta\operatorname{ctg}\theta} - \cancel{2\times\frac{r\sin^2\theta\, e^{-\lambda}}{r}} - \\ &- \cancel{2\times\operatorname{ctg}\theta(-\sin\theta\cos\theta)} = -\sin^2\theta\, e^{-\lambda} + \sin^2\theta + r\sin^2\theta\,\frac{\lambda' - \nu'}{2}e^{-\lambda} \end{aligned} \tag{4.95}$$

Подводим итог: ненулевые элементы R_{km} равны

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{\nu''}{2}e^{\nu-\lambda} - \frac{\ddot\lambda}{2} + \frac{\dot\nu\dot\lambda}{4} + e^{\nu-\lambda}\frac{\nu'}{2}\left(\frac{\nu' - \lambda'}{2} + \frac{2}{r}\right) - \frac{\dot\lambda^2}{4} \quad R_{01} = \frac{\dot\lambda}{r} \\ R_{11} &= \frac{\ddot\lambda}{2}e^{\lambda-\nu} + \frac{\dot\lambda}{2}\frac{\dot\lambda - \dot\nu}{2}e^{\lambda-\nu} - \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'^2}{4} \\ R_{22} &= -e^{-\lambda} + re^{-\lambda}\frac{\lambda' - \nu'}{2} + 1 \\ R_{33} &= -\sin^2\theta\, e^{-\lambda} + \sin^2\theta + r\sin^2\theta\,\frac{\lambda' - \nu'}{2}e^{-\lambda} \end{aligned} \tag{4.96}$$

4.7.3 Вычисление R^k_m

Мы будем использовать уравнения Эйнштейна в смешанной форме, т.е. нам нужен тензор $R^k_m = g^{ki}R_{im}$. Замечаем, что матрица g^{ki} диагональна, и поэтому смешанный тензор R^k_m получается просто умножением R_{km} на g^{kk}:

$$\begin{aligned} R^0_0 &= \frac{\nu''}{2}e^{-\lambda} - \frac{\ddot\lambda}{2}e^{-\nu} + \frac{\dot\nu\dot\lambda}{4}e^{-\nu} + e^{-\lambda}\frac{\nu'}{2}\left(\frac{\nu' - \lambda'}{2} + \frac{2}{r}\right) - \frac{\dot\lambda^2}{4}e^{-\nu} \\ R^0_1 &= \frac{\dot\lambda}{r}e^{-\nu} \\ R^1_1 &= -\frac{\ddot\lambda}{2}e^{-\nu} - \frac{\dot\lambda}{2}\frac{\dot\lambda - \dot\nu}{2}e^{-\nu} + \left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\lambda'}{r} + \frac{\nu'^2}{4}\right)e^{-\lambda} \\ R^2_2 &= \frac{e^{-\lambda}}{r^2} - e^{-\lambda}\frac{\lambda' - \nu'}{2r} - \frac{1}{r^2} \\ R^3_3 &= \frac{e^{-\lambda}}{r^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda' - \nu'}{2r}e^{-\lambda} \end{aligned} \tag{4.97}$$

Кроме этого, нам нужна свертка $R = R^i_i$:

$$\begin{aligned} R &= \boxed{\frac{\nu''}{2}e^{-\lambda}} \cancel{- \frac{\ddot\lambda}{2}e^{-\nu} + \frac{\dot\nu\dot\lambda}{4}e^{-\nu} + e^{-\lambda}\frac{\nu'}{2}\left(\boxed{\frac{\nu' - \lambda'}{2}} + \boxed{\frac{2}{r}}\right) - \boxed{\frac{\dot\lambda^2}{4}e^{-\nu}}} - \\ &- \cancel{\frac{\ddot\lambda}{2}e^{-\nu} + \frac{\dot\lambda}{2}\frac{\dot\lambda - \boxed{\dot\nu}}{2}e^{-\nu} + \left(\boxed{\frac{\nu''}{2}} - \boxed{\frac{\nu'\lambda'}{4}} - \frac{\lambda'}{r} + \boxed{\frac{\nu'^2}{4}}\right)e^{-\lambda}} + \\ &+ 2\times\left(\frac{e^{-\lambda}}{r^2} - e^{-\lambda}\frac{\lambda' - \boxed{\nu'}}{2r} - \frac{1}{r^2}\right) = \\ &= \nu''e^{-\lambda} - \ddot\lambda e^{-\nu} + \frac{\dot\nu\dot\lambda}{2}e^{-\nu} - \frac{\dot\lambda^2}{2}e^{-\nu} + e^{-\lambda}\nu'\left(\frac{\nu' - \lambda'}{2} + \frac{2}{r}\right) + \\ &+ 2\left(\frac{e^{-\lambda}}{r^2} - e^{-\lambda}\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) \end{aligned} \tag{4.98}$$

4.7.4 Уравнения Эйнштейна

Уравнения Эйнштейна в смешанной форме записываются как:

$$R^i_k - \frac{1}{2}\delta^i_k R = \frac{8\pi G}{c^4} T^i_k$$

компонента $^0_0$

$$\begin{aligned}\frac{8\pi G}{c^4}T^0_0 = R^0_0 - \frac{R}{2} = \frac{\nu''}{2}e^{-\lambda} - \frac{\ddot\lambda}{2}e^{-\nu} + \frac{\dot\nu\dot\lambda}{4}e^{-\nu} + \\ + e^{-\lambda}\frac{\nu'}{2}\left(\frac{\nu'-\lambda'}{2} + \frac{2}{r}\right) - \frac{\dot\lambda^2}{4}e^{-\nu} - \frac{\nu''}{2}e^{-\lambda} + \frac{\ddot\lambda}{2}e^{-\nu} - \frac{\dot\nu\dot\lambda}{4}e^{-\nu} + \\ + \frac{\dot\lambda^2}{4}e^{-\nu} - e^{-\lambda}\frac{\nu'}{2}\left(\frac{\nu'-\lambda'}{2} + \frac{2}{r}\right) - \frac{e^{-\lambda}}{r^2} + e^{-\lambda}\frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{r^2}\end{aligned} \tag{4.99}$$

компонента $^0_1$

$$\frac{8\pi G}{c^4}T^0_1 = R^0_1 = \frac{\dot\lambda}{r} \tag{4.100}$$

компонента $^1_1$

$$\begin{aligned}\frac{8\pi G}{c^4}T^1_1 = R^1_1 - \frac{R}{2} = -\frac{\ddot\lambda}{2}e^{-\nu} - \frac{\dot\lambda}{2}\frac{\dot\lambda-\dot\nu}{2}e^{-\nu} + \\ + \left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\lambda'}{r} + \frac{\nu'^2}{4}\right)e^{-\lambda} - \frac{\nu''}{2}e^{-\lambda} + \frac{\ddot\lambda}{2}e^{-\nu} - \frac{\dot\nu\dot\lambda}{4}e^{-\nu} + \frac{\dot\lambda^2}{4}e^{-\nu} - \\ - e^{-\lambda}\frac{\nu'}{2}\left(\frac{\nu'-\lambda'}{2} + \frac{2}{r}\right) - \frac{e^{-\lambda}}{r^2} + e^{-\lambda}\frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{r^2} = -e^{-\lambda}\frac{\nu'}{r} - \frac{e^{-\lambda}}{r^2} + \frac{1}{r^2}\end{aligned} \tag{4.101}$$

компоненты $^2_2$ *и* $^3_3$

Уравнения для этих компонент одинаковы:

$$\frac{8\pi G}{c^4}T^2_2 = \frac{8\pi G}{c^4}T^3_3 = -\frac{R^0_0}{2} - \frac{R^1_1}{2} = \dots \tag{4.102}$$

4.7.5 Уравнения в пустоте — метрика Шварцшильда

Вне материи $T_{ik} = 0$ и поэтому равнения Эйнштейна для компонент $^0_0$, $^0_1$ и $^1_1$ принимают вид

$$\frac{\dot\lambda}{r} = 0 \tag{4.103}$$

$$-\frac{e^{-\lambda}}{r^2} + e^{-\lambda}\frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{r^2} = 0 \tag{4.104}$$

$$-e^{-\lambda}\frac{\nu'}{r} - \frac{e^{-\lambda}}{r^2} + \frac{1}{r^2} = 0 \tag{4.105}$$

Из первого уравнения следует, что $\dot\lambda = 0$, т.е. что λ не зависит от времени.

Если второе и третье уравнение вычесть друг из друга, получаем, что

$$\lambda' + \nu' = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nu = -\lambda + f(t) \tag{4.106}$$

Заметим, однако, что член $f(t)$ соответствует простому преобразованию времени типа $t' = g(t)$. Действительно, при таком преобразовании

$$ds^2 = e^{\nu}dt^2 - e^{\lambda}dr^2 - r^2\,d\Omega = e^{\nu}dt'^2/\dot{g}^2 + \ldots = e^{\nu+f}dt'^2 + \ldots$$

Следовательно, $f(t)$ всегда можно смело положить равной нулю, и тогда получаем, что

$$\nu = -\lambda \tag{4.107}$$

Ну и, наконец, интегрируем уравнение (4.104):

$$\begin{aligned} & r\lambda' e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1 = 0 \\ & -\left(re^{-\lambda}\right)' = -1 \\ & re^{-\lambda} = r + C \\ & e^{-\lambda} = 1 + \frac{C}{r} \end{aligned} \tag{4.108}$$

Константу C обозначаем как $-r_g$ и получаем *метрику Шварцшильда*:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)c^2dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \dfrac{r_g}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) \tag{4.109}$$

Выясним теперь смысл переменной t. При $r \to \infty$ метрика становится плоской, а интервал собственного времени $d\tau = \sqrt{g_{00}}\,dt \to dt$, следовательно, t совпадает с собственным временем наблюдателя, находящегося на бесконечности.

Найдем теперь, чему равен r_g. На больших расстояниях от центра поле слабое, и там мы знаем решение:

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$$

а потенциал равен Ньютоновскому:

$$\varphi = -\frac{GM}{r}$$

Сравнивая эти формулы с выражением для метрики Шварцшильда, получаем, что

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} \tag{4.110}$$

(равен радиусу, на котором классическая вторая космическая скорость равнялась бы скорости света).

4.7.6 Обсуждение свойств метрики Шварцшильда

Сразу отметим два факта:

1) Из того, что у нас получалось, что λ и ν не зависят от времени, следует, что метрика в пустоте *стационарна*, пока распределение материи остается сферически симметричным.

2) Если мы рассмотрим сферически-симметричное распределение материи с полостью, то внутри полости получаем метрику Шварцшильда, в которой $r_g = 0$ из-за отсутствия особенности при $r \to 0$. Следовательно, *в полости гравитационное поле равно нулю*.

Горизонт событий

При $r \to r_g$ в метрике Шварцшильда наступает особенность. Смысл ее можно понять следующим образом. Рассмотрим интервал собственного времени как функцию радиуса:

$$\Delta\tau = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{1/2}\Delta t \tag{4.111}$$

т.е. интервал между двумя событиями короче по часам локального наблюдателя, чем по часам удаленного наблюдателя на фактор

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta t} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{1/2} \tag{4.112}$$

В частности, это означает, что частота излучения, испущенного на радиусе r с частотой ω будет зарегистрирована удаленным наблюдателем с частотой

$$\omega_\infty = \omega\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1/2} \tag{4.113}$$

Явление изменения частоты света при распространении в гравитационном поле называется *гравитационным красным смещением*.

Для метрики Шварцшильда при $r \to r_g$ зарегистрированная частота $\omega_\infty \to 0$. Иными словами, свет с поверхности $r = r_g$ (и глубже) до удаленного наблюдателя не доходит. Эта поверхность называется *горизонтом событий*. Материя, которая находится под горизонтом, теряет всякую возможность воздействовать на внешний мир, кроме как посредством общего, постоянного гравитационного притяжения. Отсюда пошло выражение «черные дыры не имеют волос».

4.7.7 Движение в поле Шварцшильда

Уравнения движения

Как уже обсуждалось, уравнения движения в гравитационном поле записываются в виде

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = 0.$$

Для метрики Шварцшильда эти уравнения имеют вид (мы их использовать все равно не будем, поэтому дадим их без вывода):

$$\frac{d^2t}{ds^2} + \frac{r_g}{r(r-r_g)}\frac{dr}{ds}\frac{dt}{ds} = 0,$$

$$\frac{d^2r}{ds^2} + \frac{r_g}{2r^3}(r-r_g)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \frac{r_g}{2r(r-r_g)}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - (r-r_g)\left[\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2\right] = 0,$$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{d\theta}{ds}\frac{dr}{ds} - \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{d\phi}{ds}\frac{dr}{ds} + 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{d\theta}{ds}\frac{d\phi}{ds} = 0.$$

Уравнения сложны, и в лоб их решить было бы очень трудно. Отметим, однако, что в простом ньютоновском случае уравнения движения также сложны; их простое решение возможно лишь с применением законов сохранения.

Векторы Килинга и законы сохранения

Ясно, что метрика Шварцшильда обладает большой степенью симметрии: она инвариантна по отношению к трансляции времени, а также к пространственным поворотам. Так же как в классической механике инвариантность лагранжиана по отношению к группе преобразований соответствует некоторому закону сохранения, в релятивистской механике такие симметрии тоже соответствуют законам сохранения, наличие которых позволяет значительно упростить решение уравнений движения.

Одним из основных инструментов для нахождения инвариантов движения в релятивистской механике служат *векторы Килинга*. Как мы увидим, наличие вектора Килинга позволяет сразу записать закон сохранения. В простых случаях нахождение векторов Килинга не составляет труда.

Рассмотрим наиболее простой случай — когда метрика не зависит явно от какой-либо координаты, т.е.

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^K} = 0 \tag{4.114}$$

Вектор Килинга для такой симметрии есть

$$\xi^l = \begin{cases} 0 & \text{если } l \neq K \\ 1 & \text{если } l = K \end{cases} = \delta^l_K. \tag{4.115}$$

Покажем, что таким образом определенный вектор Килинга удовлетворяет соотношению

$$\xi_{i;j} + \xi_{j;i} = 0 \tag{4.116}$$

Действительно,

$$\xi_{i;j} = g_{il}\,\xi^l_{;j} = g_{il}\left(\frac{\partial \xi^l}{\partial x^j} + \Gamma^l_{jm}\,\xi^m\right) = g_{il}\Gamma^l_{jK} = \Gamma_{i,jK} \tag{4.117}$$

(в выкладках учтено, что $\xi^l = \delta^l_K$). Вспоминаем формулу для $\Gamma_{i,jK}$ (4.31) и пишем

$$\xi_{i;j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^K} + \frac{\partial g_{iK}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jK}}{\partial x^i}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{iK}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jK}}{\partial x^i}\right). \tag{4.118}$$

Отсюда видно, что $\xi_{i;j}$ антисимметричен по i и j, а следовательно, уравнение (4.116) верно. Хотя для доказательства мы использовали вид вектора, специфический для симметрии метрики вида (4.114), формула 4.116 верна для векторов Килинга в общем случае.

Теперь мы можем показать, что вдоль траектории движения частицы сохраняется величина

$$\mathcal{P}_K = \mathbf{u}\cdot\xi = g_{ij}\,\frac{dx^i}{ds}\,\xi^j = g_{iK}\,\frac{dx^i}{ds}. \tag{4.119}$$

Действительно,

$$\frac{d\mathcal{P}_K}{ds} = \left(u^i\,\xi_i\right)_{;j}\,u^j = u^i_{;j}\,\xi_i\,u^j + u^i\,u^j\,\xi_{i;j} = 0, \tag{4.120}$$

так как в первом члене $u^i_{;j} = 0$ в силу уравнений движения, а во втором симметричная величина u^iu^j сворачивается с антисимметричной $\xi_{i;j}$.

На пальцах закон сохранения в виде (4.119) можно интерпретировать следующим образом: так как метрический тензор не изменяется в направлении ξ, «сила», действующая в этом направлении, которая выражается через производные g_{ik}, равна нулю, и поэтому сохраняется компонента 4-скорости в этом направлении.

Законы сохранения в поле Шварцшильда

В поле Шварцшильда существует четыре вектора Килинга — один соответствует однородности времени, а три отражают симметрию по отношению к пространственным поворотам. Точно так же, как и в случае плоского пространства, первый вектор Килинга дает аналог закона сохранения энергии, а три других — момента импульса. Из них два говорят о том, что вектор момента импульса имеет постоянное направление, или что движение происходит в одной плоскости. Поэтому мы можем выбрать и зафиксировать $\theta = \pi/2$ (это ясно и из соображений симметрии). Найдем оставшиеся законы сохранения.

При $K = 0$ уравнение (4.119) дает закон сохранения

$$g_{00}\,\frac{c\,dt}{ds} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\frac{c\,dt}{ds} = \mathcal{E} \tag{4.121}$$

При $K = 3$, учитывая, что $\theta = \pi/2$, имеем аналог 2-го закона Кеплера

$$g_{33}\,\frac{d\varphi}{ds} = r^2\,\frac{d\varphi}{ds} = \mathcal{L} \tag{4.122}$$

Рис. 4.2. Эффективный потенциал для орбитального движения в поле Шварцшильда.

Отметим существование еще одного инварианта, который имеет место для любой траектории в любом гравитационном поле: $g_{ik}\,u^i\,u^k = 1$, что в нашем случае дает

$$\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{c\,dt}{ds}\right)^2-\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2-r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2=1. \tag{4.123}$$

Инварианты для движения безмассовых частиц

Для безмассовых частиц $ds = 0$ и поэтому формулы (4.119) и (4.123) непосредственно не применимы. Мы должны вместо s подставить λ — аффинный параметр вдоль кривой распространнения луча $x^i(\lambda)$, а также в правой части (4.123) поставить 0, что дает

$$\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\frac{c\,dt}{d\lambda}=\mathcal{E},\quad r^2\frac{d\varphi}{d\lambda}=L,\quad \left(1-\frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{c\,dt}{d\lambda}\right)^2-\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2-r^2\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2=0.$$

Наличие инвариантов 4.121–4.123 позволяет кардинально упростить анализ движения в поле Шварцшильда. Именно, с учетом 4.121 и 4.122, уравнение 4.123 принимает вид

$$\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\mathcal{E}^2-\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2-\frac{\mathcal{L}^2}{r^2}=1, \tag{4.124}$$

откуда

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2=\mathcal{E}^2-\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{\mathcal{L}^2}{r^2}+1\right) \tag{4.125}$$

или, с учетом 4.121,

$$\frac{1}{(1-r_g/r)^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=\frac{c^2}{\mathcal{E}^2}\left[\mathcal{E}^2-\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{\mathcal{L}^2}{r^2}+1\right)\right] \tag{4.126}$$

Рассмотрим теперь несколько частных случаев движения в поле Шварцшильда.

Радиальное падение

Рассмотрим падение по радиусу: $u^\theta = u^\varphi = 0 = \mathcal{L}$. Следовательно, из уравнения (4.126) получаем

$$\frac{dr}{dt}=c\,\frac{1-r_g/r}{\mathcal{E}}\sqrt{\mathcal{E}^2-\left(1-\frac{r_g}{r}\right)}. \tag{4.127}$$

Отсюда видно, что $dr/dt \to 0$ при $r \to r_g$. В то же время, с точки зрения наблюдателя на самом теле его скорость равна

$$v=\frac{dl}{d\tau}=\frac{(1-r_g/r)^{-1/2}\,dr}{(1-r_g/r)^{1/2}\,dt}=\frac{1}{1-r_g/r}\,\frac{dr}{dt}=\frac{c}{\mathcal{E}}\sqrt{\mathcal{E}^2-\left(1-\frac{r_g}{r}\right)}, \tag{4.128}$$

Откуда видно, что $v \to c$ при $r \to r_g$.

Вспоминая, что гравитационное красное смещение вблизи r_g стремится к бесконечности, получаем следующую картину падения тела на черную дыру: в то время как падающий наблюдатель измеряет, что при приближении к горизонту событий он разгоняется до скорости света, с точки зрения удаленного наблюдателя тело начинает останавливаться и одновременно исчезать из видимости.

Орбитальное движение

Уравнение для dr/ds (4.125) по виду эквивалентно уравнению движения частицы в одномерном потенциале, $v^2 = 2E/m - 2V(x)/m$, поэтому анализ движения проводится давно знакомыми методами. Наш эффективный потенциал равен

$$V(r) = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{\mathcal{L}^2}{r^2} + 1\right). \tag{4.129}$$

Он отличается от ньютоновского наличием члена $-r_g\,\mathcal{L}^2/r^3$. Эффективный потенциал для нескольких значений $\mathcal{L}$ показан на рис. 4.7.7.

Найдем экстремумы $V(r)$:

$$V' = \frac{r_g}{r^2}\left(\frac{\mathcal{L}^2}{r^2} + 1\right) - 2\,\frac{\mathcal{L}^2}{r^3}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) = 0$$

$$r_g\,\mathcal{L}^2 + r_g\,r^2 + 2\,\mathcal{L}^2\,r_g - 2\mathcal{L}\,r = 0$$

$$r^2 - 2\frac{\mathcal{L}^2}{r_g}\,r + 3\mathcal{L}^2 = 0$$

$$r = \mathcal{L}^2/r_g \pm \sqrt{\mathcal{L}^4/r_g^2 - 3\mathcal{L}^2} \tag{4.130}$$

Меньший экстремум соответствует максимуму потенциала, а верхний — минимуму (это легко сообразить из того факта, что при $r \to 0$ в потенциале доминирует член $-r_g\,\mathcal{L}^2/r^3$). При $\to \infty$ $V(r) \to 1$. Следовательно, если $\mathcal{E}^2 < 1$ и меньше максимума потенциала, частица оказывается запертой в потенциальной яме, и совершает периодическое движение по r. В то же время φ постоянно меняется в одном направлении сообразно закону (4.122), следовательно, частица совершает орбитальное вращение. Однако, в отличие от ньютоновского случая период по φ не совпадает с периодом по r, следовательно траектория частицы незамкнутая. В случае слабого гравитационного поля это выглядит как будто частица движется по эллиптической орбите, ось которой медленно вращается. Такое явление — прецессия орбиты Меркурия — было первым наблюдательным подтверждением ОТО.

Если же $\mathcal{E}^2$ равно минимуму потенциала, $dr/ds = 0$, и следовательно, частица вращается по круговой орбите. Заметим однако, что минимум потенциала существует не всегда. Именно, для этого требуется, чтобы выражение под корнем в формуле (4.130) было положительным. В самом крайнем случае $\mathcal{L}^4/r_g^2 - 3\mathcal{L}^2 = 0$, и легко видеть, что в этом случае $r = 3r_g$. *При $r < 3r_g$ не существует минимума $V(r)$ ни при одном значении $\mathcal{L}$, и следовательно, движение по круговой орбите невозможно.*

Задача

Найти скорость вращения частицы на последней устойчивой орбите.

Обычно вещество, падающее на черную дыру, всегда обладает каким-то угловым моментом, и поэтому падает не по прямой, а закручивается и образует аккреционный диск. В диске частицы вращаются приблизительно по круговым траекториям, но из-за трения теряют момент импульса, и постепенно дрейфуют к центру. Так как при $r < 3r_g$ движение по круговой орбите невозможно, диск «обрывается» на $3r_g$; внутри этого радиуса вещество по спирали быстро падает на черную дыру.

Задача

Расчитать скорость прецессии орбиты, считая, что эксцентриситет настолько мал, что потенциал вблизи минимум можно представить квадратичной функцией.

Глава 5

Космология

5.1 Расширение Вселенной — уравнения Фридмана

5.1.1 Общий вид метрики однородного изотропного пространства

Вселенная изотропна и однородна

Однородность и изотропия выделяет особый класс наблюдателей — тех, которые находятся в покое относительно вещества. Это — фундаментальные наблюдатели.

Запишем общее выражение для интервала в виде

$$ds^2 = g_{ik}\,dx^i\,dx^k = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{0\alpha}\,dx^0\,dx^\alpha - g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta.$$

Изотропия пространства означает, что $g_{0\alpha} = 0$, иначе они бы определяли ненулевой 3-вектор, соответствующий какому-то выделенному направлению[1]. Далее, временную координату можно определить как собственное время фундаментальных наблюдателей, и тогда $g_{00} = 1$. Поэтому мы можем записать выражение для интервала в виде

$$ds^2 = c^2dt^2 + g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta = c^2dt^2 - dl^2.$$

Как уже обсуждалось в § 4.7, для изотропного пространства естественной системой координат является сферическая (с точкой отсчета в каком-либо месте 3-х мерного пространства); в ней выражение для элемента длины записывается в виде

$$dl^2 = e^\lambda dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2\right),$$

где вид коэффициента e^λ можно найти из требования однородности 3-пространства. Как нам сформулировать это требование? Казалось бы, мы могли бы потребовать, чтобы метрика во всех точках была бы одинакова, т.е. что $g_{\alpha\beta} = \mathrm{const}$. Ясно, однако, что это неверный подход: для обычной сферической системы координат $dl^2 = dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2\right)$ коэффициенты $g_{\alpha\beta} \neq \mathrm{const}$, однако ясно, что такая система координат описывает однородное пространство, свойства которого не зависят от точки. Этот пример наводит на мысль о том, что свойство однородности надо сформулировать в виде уравнения, которое не зависит от выбора системы координат, т.е. *скалярного уравнения*. Естественным скаляром, который описывает свойства пространства, является скалярная кривизна. Однако, мы должны учесть, что однородным является 3-, а не 4-пространство, поэтому свойство однородности Вселенной формулируем в виде

$$^3R = \mathrm{const}, \tag{5.1}$$

где ^3R — скалярная кривизна 3-х мерного пространства. Выражение для нее получается способом, аналогичным вычислению R в § 4.7.3. Именно, мы можем использовать уравнение 4.98, в котором надо опустить члены, содержащие ν и производные по времени. Таким образом имеем:

$$^3R = 2\left(\frac{e^{-\lambda}}{r^2} - e^{-\lambda}\,\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) = \mathrm{const}.$$

[1] Здесь также важна однородность пространства — ср. с соответствующими рассуждениями в § 4.7.

Это уравнение позволяет найти λ:

$$-2\left(\frac{\lambda'}{r}-\frac{1}{r^2}\right)e^{-\lambda}-\frac{2}{r^2}=\text{const},$$

$$(1-\lambda' r)\,e^{-\lambda}=B\,r^2+1,$$

$$\left(r\,e^{-\lambda}\right)'=B\,r^2+1,$$

$$r\,e^{-\lambda}=A\,r^3+C+r.$$

Чтобы у метрики не было особенностей при $r=0$, необходимо выполнение условия $C=0$, и тогда

$$e^{-\lambda}=1+A\,r^2,$$

а выражение для интервала принимает вид

$$ds^2=c^2dt^2-\frac{1}{1+A\,r^2}\,dr^2-r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2\right)$$

Перескалируем радиальную переменную таким образом, что

$$A\,r^2\longrightarrow k\,r^2\qquad k=0,\pm1;$$

при такой замене

$$dr^2\longrightarrow\frac{dr^2}{|A|},$$

и следовательно выражение для метрики принимает вид

$$\begin{aligned}ds^2&=c^2dt^2-\frac{1}{|A|}\left(\frac{dr^2}{1-kr^2}+r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2\right)\right)=\\&=c^2dt^2-a(t)^2\left(\frac{dr^2}{1-kr^2}+r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2\right)\right)\qquad k=0,\pm1.\end{aligned}\tag{5.2}$$

Это есть общее выражение для метрики однородного изотропного пространства. Заметим, что коэффициент $|A|=a^2$ в общем случае является функцией времени, так как он получен из условия, что скалярная 3-кривизна (она, кстати, равна ${}^3R=6k/a^2$) имеет постоянное значение *в данный момент времени*, а с течением времени может меняться.

Отметим, что заменой переменных

$$r\longrightarrow\frac{r}{1+kr^2/4}$$

формула (5.2) приводится к более симметричному по отношению к пространственным координатам виду:

$$ds^2=c^2dt^2-a(t)^2\,\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{\left(1+kr^2/4\right)^2}.\tag{5.3}$$

Действительно,

$$dr=\frac{dr_1\left(1+kr_1^2/4\right)-kr_1^2/2\,dr_1}{\left(1+kr_1^2/4\right)^2}=\frac{1-kr_1^2/r}{\left(1+kr_1^2/4\right)^2}\,dr_1;$$

$$1-kr^2=1-\frac{kr_1^2}{\left(1+kr_1^2/4\right)^2}=\frac{1+kr_1^2/2+\left(kr_1^2/4\right)^2-kr_1^2}{\left(1+kr_1^2/4\right)^2}=\frac{\left(1-kr_1^2/4\right)^2}{\left(1+kr_1^2/4\right)^2};$$

$$\frac{dl^2}{a(t)^2}=\frac{dr_1^2\left(1-kr_1^2/4\right)^2}{\left(1+kr_1^2/4\right)^2\left(1-kr_1^2/4\right)^2}+\frac{r_1^2\,d\Omega^2}{\left(1+kr_1^2/4\right)^2}=\frac{dr_1^2+r_1^2\,d\Omega^2}{\left(1+kr_1^2/4\right)^2}$$

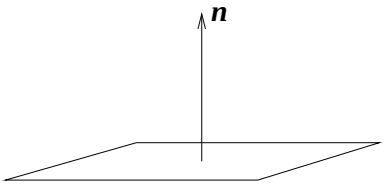


Рис. 5.1. При изотропном распределении вещества сила, действующая на площадку может быть лишь параллельна нормали **n**, так как это единственное выбранное направление. Так как компоненты тензора $T_{\alpha\beta}$ имеют смысл силы, действующей на в направлении α на площадку, ориентированную в направлении β, ясно, что $T_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$.

Из формулы (5.2) и особенно (5.3) следует, что если $a(t) \neq \text{const}$, расстояние между двумя фундаментальными наблюдателями, каждый из которых по определению находится в покое относительно вещества Вселенной т.е. на фиксированных r, θ и φ, меняется с течением времени, причем специфическим образом:

$$dl = a(t)\,\delta x, \quad \Longrightarrow \quad \frac{dl}{dt} = \dot{a}\,\delta x = \frac{\dot{a}}{a}\,dl$$

т.е. темп изменения расстояния пропорционален самому расстоянию. С наблюдательно точки зрения это эквивалентно тому, что все далекие объекты систематически движутся от нас или к нам, причем скорость этого движения пропорциональна расстоянию до объекта. Именно такое открытие в 30-х годах сделал Хаббл. Однако, прежде чем обсуждать наблюдения, покажем, что уравнения Эйнштейна, примененные ко всей Вселенной, действительно требуют $a(t) \neq \text{const}$.

5.1.2 Уравнения Фридмана

Метрику (5.2) определяют две величины, $a(t)$ и k, которые находятся из уравнений Эйнштейна. Удобнее будет использовать метрику в виде (5.3), так как в ней пространственные координаты входят полностью симметричным образом.

Прежде, чем вычислять все необходимые элементы тензора R_{ik}, обсудим, какие из них нам необходимо вычислять. Прежде всего отметим, что все $R_{0\alpha}$ должны быть равны нулю, иначе они образуют 3-вектор, который определит какое-то выделенное направление.

Более того, все $R_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$. Это можно показать следующим образом. Уравнения Эйнштейна говорят, что $R_{ik} = \text{const} \times (T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T)$ (ур. 4.40). Однако, при изотропном распределении вещества недиагональные элементы $T_{\alpha\beta}$ должны быть равны нулю (см. рис. 5.1).

Далее, так как x, y и z входят в метрику симметричным образом, зная R_{11} мы легко можем сообразить, чему равны R_{22} и R_{33}. Следовательно, нам необходимо вычислить лишь R_{00} и R_{11}.

Вычисление R_{ik}

Итак, мы ищем компоненты тензора Риччи R_{00} и R_{11} для метрики вида

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2\,\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\left(1 + kr^2/4\right)^2} = c^2 dt^2 - a(t)^2\, f(r^2)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right),$$

В последующих выкладках неявно сделана замена $ct \to t$, а c будет восстановлена в окончательных уравнениях.

Имеем:

$$R_{00} = \frac{\partial \Gamma^i_{00}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^i_{0i}}{\partial x^0} + \Gamma^i_{bi}\Gamma^b_{00} - \Gamma^i_{b0}\Gamma^b_{i0}$$

Вычисляем необходимые символы Кристоффеля:

$$\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2}\, g^{in}\left(\frac{\partial g_{n0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{n0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^n}\right) = 0,$$

поэтому нам необходимо вычислить лишь Γ^i_{k0}:

$$\Gamma^i_{k0} = \frac{1}{2} g^{in}\left(\frac{\partial g_{nk}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{n0}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{k0}}{\partial x^n}\right) = \frac{1}{2} g^{in}\dot{g}_{nk},$$

откуда легко установить, что

$$\Gamma^0_{\alpha 0} = 0, \qquad \Gamma^\alpha_{\beta 0} = \frac{1}{2}\frac{2a\dot{a}f}{a^2 f}\delta^\alpha_\beta = \frac{\dot{a}}{a}\delta^\alpha_\beta.$$

Таким образом,

$$R_{00} = -\frac{\partial \Gamma^i_{0i}}{\partial x^0} - \Gamma^i_{b0}\Gamma^b_{i0} = \left[\Gamma^i_{0i} = 3\frac{\dot{a}}{a},\ \Gamma^i_{b0}\Gamma^b_{i0} = 3\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right] = -3\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) - 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} =$$
$$= -3\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) - 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = -3\,\frac{\ddot{a}}{a}.$$

Теперь принимаемся за R_{11}:

$$R_{11} = \frac{\partial \Gamma^i_{11}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^i_{1i}}{\partial x^1} + \Gamma^i_{bi}\Gamma^b_{1i} - \Gamma^i_{b1}\Gamma^b_{i1}$$

Вычисляем нужные Γ^i_{kl}.

$$\Gamma^i_{11} = \frac{1}{2}\,g^{in}\left(\frac{\partial g_{n1}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{n1}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^n}\right)$$

$$\Gamma^0_{11} = \frac{1}{2}\,g^{00}(-1)\,\frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} = \frac{1}{2}\,2\,a\dot{a}f = a\dot{a}f,$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\,g^{11}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\right) = \frac{1}{2}\frac{a^2 f'\,2x}{a^2 f} = \frac{f'}{f}\,x,$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2}\,g^{22}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right) = -\frac{f'}{f}\,y,$$

и по аналогии

$$\Gamma^3_{11} = -\frac{f'}{f}\,z.$$

Далее,

$$\frac{\partial \Gamma^i_{11}}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial t}(a\dot{a}f) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f'}{f}x\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f'}{f}y\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f'}{f}z\right) =$$
$$= a\ddot{a}f + \dot{a}^2 f - \frac{f'}{f} + \left(\frac{2f''}{f} - 2\frac{f'^2}{f^2}\right)\left(x^2 - y^2 - z^2\right).$$

$$\Gamma^i_{1i}\ (\text{нет суммы по } i) = \frac{1}{2}g^{in}\left(\frac{\partial g_{n1}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ni}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{1i}}{\partial x^n}\right) = \frac{1}{2}g^{ii}\left(\frac{\partial g_{i1}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{i1}}{\partial x^i}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}g^{ii}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^1} = \frac{f'}{f}\,x \quad (i \neq 0),$$

поэтому

$$\Gamma^i_{1i} = 3\,\frac{f'}{f}\,x$$

и

$$\frac{\partial \Gamma^i_{1i}}{\partial x^1} = 3\frac{f'}{f} + 3\frac{f''2x^2}{f} - 3\frac{f'^2}{f^2}2x^2 = 3\frac{f'}{f} + 6\frac{f''}{f}\,x^2 - 6\frac{f'^2}{f^2}x^2.$$

$$\Gamma^i_{bi}: \quad \Gamma^i_{0i} = 3\frac{\dot{a}}{a}, \quad \Gamma^i_{1i} = 3\frac{f'}{f}\,x, \qquad \Gamma^i_{2i} = 3\frac{f'}{f}\,y, \qquad \Gamma^i_{3i} = 3\frac{f'}{f}\,z.$$

$$\Gamma^b_{11}: \quad \Gamma^0_{11} = a\dot{a}f, \quad \Gamma^1_{11} = \frac{f'}{f}x, \quad \Gamma^2_{11} = -\frac{f'}{f}y, \quad \Gamma^3_{11} = -\frac{f'}{f}z.$$

$$\Gamma^i_{bi}\Gamma^b_{11} = 3\dot{a}^2 f + 3\frac{f'^2}{f^2}x^2 - 3\frac{f'^2}{f^2}y^2 - 3\frac{f'^2}{f^2}z^2$$

Наконец, вычисляем сумму

$$\Gamma^i_{b1}\Gamma^b_{i1} = \Gamma^i_{01}\Gamma^0_{i1} + \Gamma^i_{11}\Gamma^1_{i1} + \Gamma^i_{21}\Gamma^2_{i1} + \Gamma^i_{31}\Gamma^3_{i1}$$

$$\Gamma^1_{i1} = \frac{1}{2}g^{in}\left(\frac{\partial g_{ni}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{n1}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{i1}}{\partial x^n}\right) = \frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{1i}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{i1}}{\partial x^1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^i} = \begin{cases} \dot{a}/a & i = 0 \\ x^i\, f'/f & i = 1,2,3 \end{cases}$$

$$\Gamma^i_{21} = \frac{1}{2}g^{in}\left(\frac{\partial g_{n2}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{n1}}{\partial x^2} - \cancel{\frac{\partial g_{21}}{\partial x^n}}\right) = \frac{1}{2}g^{ii}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{i1}}{\partial x^2}\right),$$

откуда получаем

$$\Gamma^1_{21} = \frac{f'}{f}y, \qquad \Gamma^2_{21} = \frac{f'}{f}x \quad \text{и по аналогии} \quad \Gamma^1_{31} = \frac{f'}{f}z, \qquad \Gamma^3_{31} = \frac{f'}{f}x.$$

Наконец,

$$\Gamma^1_{01}\Gamma^0_{11} = \frac{\dot{a}}{a}a\dot{a}f = f\dot{a}^2$$

и теперь мы готовы вычислить свертку

$$\Gamma^i_{b1}\Gamma^b_{i1} = 2\dot{a}^2 f + \frac{f'^2}{f^2}x^2 - \frac{f'^2}{f^2}y^2 - \frac{f'^2}{f^2}z^2 - \frac{f'^2}{f^2}y^2 + \frac{f'^2}{f^2}x^2 - \frac{f'^2}{f^2}z^2 + \frac{f'^2}{f^2}x^2 =$$

$$= 2\dot{a}^2 f + 3\frac{f'^2}{f^2}x^2 - 2\frac{f'^2}{f^2}y^2 - 2\frac{f'^2}{f^2}z^2$$

Подставляем все члены и вычисляем R_{11}:

$$\begin{aligned} R_{11} =& a\ddot{a}f + \dot{a}^2 f - \frac{f'}{f} + 2\frac{f''}{f}\left(x^2 - y^2 - z^2\right) - 2\frac{f'^2}{f^2}\left(x^2 - y^2 - z^2\right) - \\ & - 3\frac{f'}{f} - 6\frac{f''}{f}x^2 + 6\frac{f'^2}{f^2}x^2 + +3\dot{a}^2 f + 3\frac{f'^2}{f^2}x^2 - 3\frac{f'^2}{f^2}y^2 - 3\frac{f'^2}{f^2}z^2 - \\ & - 2\dot{a}^2 f - 3\frac{f'^2}{f^2}x^2 + 2\frac{f'^2}{f^2}y^2 + 2\frac{f'^2}{f^2}z^2 = \\ =& a\ddot{a}f + 2\dot{a}^2 f - 4\frac{f'}{f} + x^2\left(\frac{2f''}{f} - 2\frac{f'^2}{f^2} - 6\frac{f''}{f} + 6\frac{f'^2}{f^2}\right) + \\ & + y^2\left(-\frac{2f''}{f} + \frac{f'^2}{f^2}\right) + z^2\left(-\frac{2f''}{f} + \frac{f'^2}{f^2}\right) \end{aligned} \tag{5.4}$$

Теперь учтем, что $f(r)$ имеет вид

$$f(u) = \frac{1}{(1 + ku/4)^2}.$$

Имеем

$$f' = -\frac{1}{2}\frac{k}{(1 + ku/4)^3} \quad \text{и следовательно,} \quad \frac{f'^2}{f^2} = \frac{1}{4}k^2 f$$

Далее

$$f'' = \frac{3}{8}\frac{k^2}{(1 + ku/4)^4} \quad \Longrightarrow \quad \frac{f''}{f} = \frac{3}{8}k^2 f$$

$$4\frac{f'^2}{f^2} - 4\frac{f''}{f} = k^2 f - \frac{3}{2}k^2 f = -\frac{1}{2}k^2 f$$

$$\frac{f'^2}{f^2} - 2\frac{f''}{f} = \frac{1}{4}k^2 f - \frac{3}{4}k^2 f = -\frac{1}{2}k^2 f$$

Таким образом, в выражении для R_{11} при x^2, y^2 и z^2 стоит один и тот же коэффициент: $-\frac{1}{2}k^2 f$, поэтому

$$R_{11} = a\ddot{a} f + 2\dot{a}^2 f - 4\frac{f'}{f} - \frac{k^2}{2} f r^2$$

и ясно, что $R_{22} = R_{33} = R_{11}$.

Вычислим теперь смешанные компоненты $R^0_{\ 0}$ и $R^1_{\ 1}$:

$$R^0_{\ 0} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} R^1_{\ 1} = & g^{11} R_{11} = -\frac{1}{a^2 f}\left(a\ddot{a} f + 2\dot{a}^2 f - 4\frac{f'}{f} - \frac{k^2}{2} f r^2\right) = \\ = & -\frac{\ddot{a}}{2} - 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{1}{a^2}\left(4\frac{f'}{f^2} + \frac{k^2}{2} r^2\right) = \\ & \left[\frac{f'}{f^2} = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right) = -\frac{k}{2} - \frac{k^2 r^2}{8}\right] \\ & = -\frac{\ddot{a}}{a} - 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{2k}{a^2} \end{aligned} \tag{5.6}$$

Скалярная кривизна равна

$$R = R^0_{\ 0} + R^1_{\ 1} + R^2_{\ 2} + R^3_{\ 3} = 6\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{6k}{a^2}. \tag{5.7}$$

Заметим, что компоненты тензора $R^i_{\ k}$ и скалярная кривизна одинаковы во всех точках 3-пространства.

Уравнения Эйнштейна

Выпишем теперь уравнения Эйнштейна в смешанной форме

$$R^i_{\ k} - \frac{1}{2}\delta^i_{\ k} R = \frac{8\pi G}{c^4} T^i_{\ k}$$

вспоминая, что при выводе выражений для R_{ik} мы опустили множитель c при временной координате. Сейчас мы должны вставить его обратно; это достигается добавлением множителя $1/c$ к каждой производной по времени. Итак,

$$\frac{8\pi G}{c^4} T^0_{\ 0} = R^0_{\ 0} - \frac{1}{2}R = -\frac{3}{c^2}\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{2}\left(-\frac{-6}{c^2}\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{6}{c^2}\frac{\dot{a}^2}{a^2} - 6\frac{k}{a^2}\right)$$

откуда, приводя подобные слагаемые, получаем

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} T^0_{\ 0}$$

Компонента $^1_1$ записывается в виде:

$$\frac{8\pi G}{c^4} T^1_{\ 1} = -\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{2}{c^2}\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{2k}{a^2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{-6}{c^2}\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{6}{c^2}\frac{\dot{a}^2}{a^2} - 6\frac{k}{a^2}\right)$$

откуда следует

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{c^2} T^1_{\ 1}$$

Пусть Вселенная заполнена газообразным веществом. Тензор энергии-импульса для газа есть

$$T^i_{\ k} = (\varepsilon + p)u^i u_k - p\delta^i_{\ k}$$

(ср. с ур. 4.42), где ε и p — плотность и давление газа в локально лоренцевской системе, относительно которой газ покоится. В системе отсчета фундаментальных наблюдателей (а она является и локально лоренцевской) газ покоится; это значит, что $u^\alpha = 0$, $u^0 u_0 = 1$, и поэтому тензор энергии-импульса имеет вид

$$T^i_{\ k} = \begin{vmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{vmatrix} \tag{5.8}$$

На самом деле такая структура тензора энергии-импульса следует из свойства однородности и изотропии 3-пространства. Величины ρ и p в выражении (5.8) *имеют смысл* плотности и давления, однако в общем случае «уравнение состояния» $p(\rho)$ может быть очень экзотичным.

Используя выражение (5.8) получаем уравнения, определяющие $a(t)$ и k, называемые *уравнениями Фридмана:*

$$\frac{\dot a^2 + kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon \tag{5.9}$$

$$2\frac{\ddot a}{a} + \frac{\dot a^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} = -\frac{8\pi G}{c^2}p \tag{5.10}$$

5.2 Процессы на «горячей» стадии

5.2.1 Адиабатичность эволюции Вселенной

Покажем, что если химический потенциал мал: $\mu \ll T$, то эволюция происходит адиабатически.

Для определенного объема вещества термодинамика дает следующий закон изменения плотности с температурой:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{1}{T}(\rho + p) + nT\frac{d}{dT}\left(\frac{\mu}{T}\right)$$

(*в ρ входит энергия покоя!*)

Соотношение $dp/dT = (\rho + p)/T + nT\,d(\mu/T)/dT$

Будем использовать систему единиц, в которой $c = \hbar = 1$; в ней $\vec p = \vec k$ — и мы будем использовать $\vec k$ для импульса, чтобы отличать от давления.

Запишем выражение для плотности частиц:

$$n = \int f(\vec k)\, d^3\vec k,$$

в котором интегрирование по $\vec k$ заменим а интегрирование по энергии:

$$E = \sqrt{k^2 + m^2} \qquad k = \sqrt{E^2 - m^2} \qquad dk = \frac{E\,dE}{\sqrt{E^2 - m^2}}$$

$$d^3\vec k = 4\pi k^2\, dk = 4\pi\sqrt{E^2 - m^2}\, E\, dE$$

Итак:

$$n = K\frac{g}{2\pi^2}\int_m^\infty \frac{(E^2 - m^2)^{1/2}\, E\, dE}{\exp\left[(E-\mu)/T\right] \pm 1}$$

Запишем также выражения для плотности и давления:

$$\rho = \int E f(\vec k)\, d^3\vec k = K\frac{g}{2\pi^2}\int_m^\infty \frac{(E^2 - m^2)^{1/2}\, E^2\, dE}{\exp\left[(E-\mu)/T\right] \pm 1}$$

Совокупность частиц, движущихся со скоростью v порождает давление

$$p = \frac{1}{3}\frac{mv^2}{\sqrt{1-v^2}},$$

что следует из количества движения, переносимого через площадку dS. Это в свою очередь равно $k^2/3E$. Итак:

$$p = \int \frac{1}{3}\frac{k^2}{E}\, f(\vec{k})\, d^3\vec{k} = K\frac{g}{6\pi^2}\int_m^\infty \frac{(E^2-m^2)^{3/2}\, dE}{\exp\left[(E-\mu)/T\right] \pm 1}$$

Дифференцируем p по T:

$$\frac{dp}{dT} = K\frac{g}{6\pi^2}\int_m^\infty \frac{(E^2-m^2)^{3/2}\, dE}{\left(\exp\left[(E-\mu)/T\right] \pm 1\right)^2}\left[\exp\left(\frac{E-\mu}{T}\right)\right]\left(\frac{E}{T^2} + \frac{d}{dT}\left(\frac{\mu}{T}\right)\right)$$

Учитывая, что

$$f = K\frac{g}{(2\pi)^3}\frac{1}{\exp\left[(E-\mu)/T\right] \pm 1} \qquad (E^2-m^2)^{3/2}\, dE = k^3\left(\frac{k\, dk}{E}\right) = \frac{k^4\, dk}{E},$$

выражение для производной давления можно преобразовать как

$$\frac{dp}{dT} = \frac{4\pi}{3}\int_0^\infty \frac{k^4\, dk}{E}\, f^2\left[\exp\left(\frac{E-\mu}{T}\right)\right]\left(\frac{E}{T^2} + \frac{d}{dT}\left(\frac{\mu}{T}\right)\right).$$

Член $f^2\, \exp[...]$ можно связать с производной df/dk:

$$\frac{df}{dk} = -f^2 \exp\left(\frac{E-\mu}{T}\right)\frac{1}{T}\frac{dE}{dk} = -f^2 \exp\left(\frac{E-\mu}{T}\right)\frac{k}{ET}$$

Подставляем в выражение для dp/dT:

$$\frac{dp}{dT} = -\frac{4\pi}{3}\int_0^\infty (k^3 T)\, dk\, \frac{df}{dk}\left(\frac{E}{T^2} + \frac{d}{dT}\left(\frac{\mu}{T}\right)\right).$$

Интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dT} &= \frac{4\pi}{3}\int_0^\infty f\, d\left[k^3 T\left[\frac{E}{T^2} + \frac{d}{dT}\left(\frac{\mu}{T}\right)\right]\right] = \\
&= \frac{4\pi}{3}\int_0^\infty 3k^2\, dk\; T\frac{d}{dT}\left(\frac{\mu}{T}\right) f + && = nT\frac{d}{dT}\left(\frac{\mu}{T}\right) \\
&+ \frac{4\pi}{3}\int_0^\infty 3k^2\, dk\, \frac{E}{T} f + && = \frac{\rho}{T} \\
&+ \frac{4\pi}{3}\int_0^\infty k^3\, \frac{k}{E}\, dk f && = \frac{p}{T}
\end{aligned} \tag{5.11}$$

или

$$\frac{dp}{dT} = \frac{1}{T}(\rho + p) + nT\frac{d}{dT}\left(\frac{\mu}{T}\right)$$

Второе уравнение Фридмана эквивалентно

$$d(\rho a^3) = -p\, d(a^3),$$

следовательно имеем:

$$0 = d(\rho a^3) + p\, d(a^3) = d(\rho a^3) + d(pa^3) - d(pa^3) + p\, d(a^3) = d(\rho a^3 + pa^3) - a^3\, dp,$$

т.е.

$$\frac{d}{dT}\left[(p+\rho)a^3\right] = a^3\frac{dp}{dT} = \frac{a^3}{T}(\rho + p) + nTa^3\frac{d}{dT}\left(\frac{\mu}{T}\right)$$

чтобы объединить члены с $(p+\rho)a^3$, посчитаем

$$d\left(\frac{a^3(p+\rho)}{T}\right) = -\frac{dT}{T^2}\left[a^3(p+\rho)\right] + \frac{1}{T}\, d\left((p+\rho)a^3\right)$$

поэтому если поделить предыдущее уравнение на T и перенести член с $a^3(p+\rho)/T$ влево, получим:

$$d\left[\frac{a^3}{T}(p+\rho)\right] = na^3 d\left(\frac{\mu}{T}\right) = d\left(na^3\frac{\mu}{T}\right) - \frac{\mu}{T}\,d(na^3)$$

$$d\left[a^3\frac{1}{T}(p+\rho-\mu n)\right] \equiv d(sa^3) = -\frac{\mu}{T}\,d(na^3) \approx 0$$

т.к. либо $na^3 = \text{const}$, либо $\mu \ll T$.

Утверждение без строгого доказательства: если есть несколько сортов частиц, которые между собой не взаимодействуют, то энтропия $s = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots$, причем сохраняется не только сумма, но и каждая из s_i.

5.2.2 Закон расширения в радиационно-доминированной фазе

Ищем $a(t)$ и $T(t)$ в радиационно-доминированном случае (как можно формально определить понятие радиационной доминированности?)

Перепишем 1-е уравнение Фридмана

$$\frac{\dot a^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\frac{\varepsilon}{c^2}$$

как

$$\dot a^2 = \frac{8\pi G}{3}\frac{\varepsilon a^2}{c^2} - kc^2$$

и учтем что плотность энергии меняется как

$$\varepsilon = \varepsilon_r^{(0)}\left(\frac{T}{T^{(0)}}\right)^4 = \varepsilon_r^{(0)}\,\frac{a_0^4}{a_4},$$

с помощью чего получаем

$$\dot a^2 = \frac{8\pi G}{3}\frac{\varepsilon_0 a^4}{c^2 a^2} - kc^2$$

Членом kc^2 на больших красных смещениях можно пренебречь
на z_{eq} первый член равен $\approx 10^{-30}a_0^2$, а отношение второго к a_0^2 есть

$$kc^2/a_0^2 = H_0^2\Omega_R \approx H_0^2 \approx 10^{-36}.$$

Следовательно, имеем уравнение

$$\dot a = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\varepsilon_0 a_0^4}$$

$$\frac{1}{2}a^2 = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\varepsilon_0 a_0^4}\;\; t$$

Зависимость плотности энергии излучения можно выразить как

$$\varepsilon = \frac{3c^2}{8\pi G}\frac{\dot a^2}{a^2}$$

откуда численно находим

$$T = \frac{1.3\,\varkappa^{-1/4}}{t^{1/2}}\ \text{Мэв},$$

где $\varkappa$ — число сортов релятивистских частиц.

5.2.3 Энтропия невырожденных релятивистских частиц

Когда $T \gg m$ (релятивистские) и $T \gg \mu$ (невырожденные) ($\mu = 0$, если частицы могут рождаться/исчезать, что обычно выполняется при $T \gg m$ из-за аннигиляции),

$$\rho \approx \frac{g}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{E^3\, dE}{e^{E/T} \pm 1}$$

$g = 2$ для фермионов с $s = 1/2$ и для фотонов.

Чтобы сравнить интегралы, воспользуемся следующим трюком:

$$I_n^\pm = \int_0^\infty \frac{x^n\, dx}{e^x \pm 1}$$

$$I_n^- - I_n^+ = \int_0^\infty \frac{2x^n}{e^{2x} - 1}\, dx = \frac{1}{2^n} \int_0^\infty \frac{x^n\, dx}{e^x - 1} = 2^{-n} I_n^-$$

откуда находим

$$I_n^+ = I_n^- \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

учитывая, что $n = 3$, получаем $\rho_b = \frac{8}{7}\rho_f$. Далее, $p = \rho/3$, а энтропия $s = (p + \rho)/T = 4/3\,\rho/T$. Следовательно, $s_f = \frac{7}{8}s_b$, а s_b равна значению для черного тела, $s_b = \frac{4}{3}aT^3$.

5.3 Эволюция крупномасштабной структуры

5.3.1 Основные результаты линейной теории

- Возмущения неустойчивы, если длина волны $\lambda > \lambda_J$.
- В линейном приближении форма возмущения постоянна в сопутствующих координатах, а амплитуда растет
- Фактор роста $\delta \sim 1/(\overline{\rho} a^2)$, что вообще говоря, есть степенная функция времени (а не экспоненциальная)

5.3.2 Рост сферически симметричных возмущений

• Эволюция равномерно сферического возмущения такая же, как эволюция «вселенной» с параметром плотности $\Omega + \omega$. Эволюцию такого возмущения можно правильно проследить вплоть до сильно нелинейной стадии.

линейные сферические возмущения

$$\rho_1 = \rho(\Omega + \omega, t)$$

$$\rho = \rho(\Omega, t)$$

(когда возмущения линейны, то $|\rho_1 - \rho_0| \ll \rho_0$ или $\omega \ll \Omega$.

$$\delta = \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_0} = \frac{1}{\rho(\Omega, t)} \frac{\partial \rho(\Omega, t)\, \omega}{\partial \Omega} = \omega \frac{\partial}{\partial \Omega} \ln \rho(\Omega, t)$$

Отсюда видно, что фактор роста $D(t)$ есть

$$D(\Omega, t) = \frac{\partial}{\partial \Omega} \ln \rho(\Omega, t)$$

Так как при заданном Ω есть решение $a(t)$, то фактор роста можно выразить как функцию z, а не времени.

Задача

Для $\Omega = 1$, $\Omega_\Lambda = 0$ *получить по приведенным выше формулам фактор роста* $D(z) = (1+z)^{-1}$.

Существуют очень точные аппроксимационные формулы для $D(z)$. Например, если обозначить

$$D_0(\Omega_M, \Omega_\Lambda, z) = \frac{D(\Omega_M, \Omega_\Lambda, z)}{D(1, 0, z)},$$

то с точностью до нескольких процентов

$$D_0(\Omega_M, \Omega_\Lambda, z) = \frac{5}{2}\Omega_M \left[\Omega_M^{4/7} - \Omega_\Lambda + \left(1 + \frac{1}{2}\Omega_M\right)\left(1 + \frac{1}{70}\Omega_\Lambda\right)\right]^{-1}$$

В этой формуле в правой части Ω_M и Ω_Λ — функции z:

$$\Omega_M(z) = \Omega_M^0 \frac{(1+z)^3}{\Omega_M^0(1+z)^3 + \Omega_R(1+z)^2 + \Omega_\Lambda} \qquad \Omega_\Lambda(z) = \frac{\Omega_\Lambda^0}{\Omega_M^0(1+z)^3 + \Omega_R(1+z)^2 + \Omega_\Lambda}$$

(В случае $\Omega_M = 1$, $\Omega_\Lambda = 0$, получаем, как и следовало ожидать, $D_0 = \frac{5}{2}\left[1 + \frac{3}{2}\right]^{-1} = 1$.)

зависимость роста возмущений от космологии

Эти формулы говорят о том, что темп роста возмущений зависит от космологических параметров. Всегда в пределе $\Omega_M \to 0$ $D_0(\Omega_M, \Omega_\Lambda, z) \to 0$, что означает, что рост возмущений останавливается.