[1,2]АНАТОЛИЙ ЛОПАТЬЕВ
[1,2]НИКОЛАЙ ДЗЮБАЧИК
[2,3]БОГДАН ВИНОГРАДСКИЙ
[2]ВИКТОР КАРАСЕВ

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ СТРЕЛОК—ОРУЖИЕ—МИШЕНЬ С УЧЕТОМ ДЕЙСТВИЯ ВЕТРОВЫХ НАГРУЗОК

Резюме. Розглянуто можливості використання моделювання за аналогією у стрілецькому спорті. Подано загальні та конкретні моделі руху в біомеханічних системах. Розроблено тренажер на основі комбінованого маятника для моделювання вітрових навантажень у стрільбі з лука.

Summary. The paper is devoted to reviewing possibilities of analog models utilization in archery. General and specific models of motion in biomechanical system are presented. The trainer for wind force simulation is developed on the base of combined pendulum.

© Анатолий Лопатьев, Николай Дзюбачик, Богдан Виноградский, Виктор Карасев, 2005

Постановка проблемы. Развитие современной науки характеризуется внедрением математических методов исследования в разные сферы научной мысли. Для будущих специалистов спортивной науки и тренеров необходима определенная, иногда значительная математическая подготовка, которая бы позволяла с помощью математических методов исследовать как можно более широкий круг новых проблем, используя вычислительную технику, и применять математические модели на практике. Усложнение процесса спортивной подготовки спортсменов стимулирует исследователей к поиску адекватных и в то же время практических подходов их описания, исследования и коррекции [7]. В спортивной практике нередко наблюдаются случаи практической неразрешимости педагогической проблемы адаптации организма спортсмена к некоторым обстоятельствам и условиям, которые в то же время встречаются в соревновательной деятельности. Поэтому одним из действенных научных подходов, применяемых в такой ситуации, является моделирование и, как частный случай, моделирование по аналогии.

Обработка экспериментальных данных с использованием математической статистики — это наиболее распространенное, но не единственное и не самое важное применение математики. Результаты даже достаточно тонких экспериментов не всегда позволяют ответить на вопрос, какие основные движущие силы и механизмы влияют на состояние и развитие той или иной системы. Такие механизмы могут быть определены при рассмотрении функционирования системы как результата взаимодействия ее составных элементов и внешних факторов, которые действуют на систему. Исследовать упомянутое взаимодействие различных параметров можно только с помощью математических методов и методов математического и имитационного моделирования.

Цель исследования — совершенствование спортивной подготовленности стрелков на основе использования теоретических и практических разработок, полученных с помощью физико-математического и предметного моделирования.

Задачи исследования:

- определение возможностей метода моделирования по аналогии при исследовании сложных систем;
- построение математической модели движения материальной точки под действием сил тяжести, сопротивления среды и ветра;
- создание физико-математической основы для разработки механического тренажера для моделирования ветровой нагрузки в стрельбе из лука.

Методы исследования: теоретический анализ и синтез; физико-математическое моделирование; моделирование по аналогии; видеоанализ; педагогический эксперимент с использованием ветрового тренажера по аналогии.

Моделирование по аналогии. Научной основой моделирования [1, 3, 4] служит теория аналогии, в которой основным понятием является понятие “аналогия” — сходство объектов по их качественным и количественным признакам.

Специфика моделирования, отличающая его от других методов познания, состоит в том, что с его помощью объект изучается не непосредственно, а путем исследования другого объекта, аналогичного в определенных отношениях первому. Следовательно, использование моделирования характеризуется тем, что между субъектом (исследователем) и объектом познания существует промежуточное звено — модель. Модель может служить средством познания, давать новые знания о нем в том случае, если она выступает, как своего рода мостик, соединяющий исследователя с объектом познания. Поскольку моделирование основано на умозаключении по аналогии, то место моделирования в познании невозможно понять без выявления познавательной роли аналогии.

Отношение к умозаключению по аналогии всегда было неоднозначным. Одни ученые полагали, что умозаключение по аналогии может дать достоверный результат, другие отказывали ему в роли надежного инструмента познания. Практика показала, что умозаключение по аналогии далеко не всегда приводит к ошибочным выводам. В ряде случаев без использования аналогии вообще невозможно получить новые знания об исследуемом объекте или явлении. Так, например, по аналогии со звучанием пустой и наполненной бочки был открыт метод определения состояния и положения внутренних органов человека по звуку, получаемому при выстукивании поверхности тела. Данный метод используется врачами и в настоящее время.

Таким образом, умозаключение по аналогии может приводить как к научным результатам, так и к ошибкам. Возникал вопрос о том, что надо сделать, чтобы избавиться от ошибок, или какие правила необходимо установить при переносе знаний с модели на прототип.

Вывод по аналогии тем более достоверен, чем больше мы знаем о сравниваемых объектах. Сходство между моделью и прототипом должно быть строго зафиксировано, причем в существенных, а не второстепенных чертах. Необходимо также знать различие между моделью и прототипом. Умозаключение по аналогии может быть правильным, если это различие несущественно. Достоверность выводов по аналогии зависит также от того, насколько нам известна зависимость между признаками сходства и переносимым признаком. Можно достаточно обоснованно переносить определенный признак с модели на прототип в том случае, если известно, что этот признак необходимо связан с признаками сходства модели и прототипа. Следовательно, вывод по аналогии правомерен лишь в том случае, когда будут тщательно проанализированы признаки общности и различия сравниваемых явлений. Вывод приобретает доказательную силу после подтверждения его экспериментальной проверкой.

Развитие научного познания сделало необходимой разработку вопросов логики, связанных с установлением точных границ, в которых умозаключение по аналогии дает достоверный результат. История науки знает немало случаев, когда проблемы логики разрешались внутри той области знания, которая испытывала в этом потребность. Так было с математической логикой, которая была разработана для применения к потребностям математики.

Когда возникла потребность в решении логических задач методом моделирования в технике, была разработана теория подобия. Степень достоверности выводов по аналогии в технике определяется описанием модели и прототипа одинаковыми по форме математическими уравнениями, а также условиями однозначности, или подобием условий, существенно влияющих на ход изучаемого процесса. Условия однозначности определяют индивидуальные особенности изучаемого явления и выделяют его из класса других явлений.

В основных видах качественной аналогии выделим физическую и кибернетическую аналогию. Эти виды объединяются понятием “обобщенная аналогия” или “абстракция”. Оно выражает особого рода соответствие между сопоставляемыми объектами, между моделью и прототипом.

Кибернетическая аналогия — подобие функций, ведущее к установлению структурного сходства сравниваемых систем управления и нахождения способа (алгоритма) управления, обеспечивающего достижение оптимума цели путем преобразования потоков информации.

Физическая аналогия — подобие при наличии физического аналога. Константы подобия — безразмерные величины, а результат исследования предполагает раскрытие физического смысла самих уравнений.

Основным видом количественной аналогии является понятие “математическая аналогия”. Это аналогия формы уравнений и аналогия соотношений между переменными в уравнениях оригинала и модели. Частные случаи математической аналогии — геометрическая и временная. Геометрическая представляет собой подобие прос-

транственных пропорций частей объекта, подобие геометрических образов, а временная — подобие функции времени, при котором константа подобия показывает, в каком отношении к ней находятся такие параметры, как период, задержка и т. д.

В литературе отмечается неразрывная связь модели с аналогией, однако аналогия не является моделью. Неопределенности такого вида порождаются нечетким различием:

• аналогии как понятия, выражающего фактическое отношение сходства между разными вещами, процессами, ситуациями, проблемами;

• аналогии как особой логики умозаключения;

• аналогии как эвристического метода познания;

• аналогии как способа восприятия и осмысления информации;

• аналогии как средства переноса апробированных методов и идей из одной отрасли знания в другую, как средства построения и развития научной теории.

Соответственно этому можно дать различные определения аналогии:

1. Аналогия — объективная основа моделирования.

Определение. Аналогия есть понятие, выражающее определенное частичное или полное подобие между различными объектами в тех или иных свойствах, функциях, соотношениях элементов.

2. Отличие научной аналогии от ненаучной (метафор, аллегорий, обыденных представлений и т. д.) — условие правильного определения сущности и роли аналогии в операциях научного моделирования.

Определение. Аналогия есть ассоциация мыслей о разных предметах.

3. Аналогия — эвристический метод моделирования.

Определение. Аналогия есть метод научного поиска и пояснения (разъяснения, объяснения) изучаемого объекта посредством сопоставления его с известным наглядным объектом.

4. Аналогия — способ восприятия и теоретического осмысления информации, и в этом смысле она является средством выбора модели.

Определение. Аналогия есть теоретический метод объяснения визуально ненаблюдаемых объектов.

5. Аналогия — логическая основа моделирования, но недостаточно ее определять как “перенос информации от модели на прототип” или как “переход от модели к прототипу”.

Определение. Научная аналогия есть умозаключение, в ходе которого на основании обнаружения сходства или общности ряда существенных признаков у двух объектов или частичного тождества соотношений их элементов и учета различий между ними в других отношениях делается вывод о том, что одному из них присущи такие свойства, которые обнаружены при исследовании другого объекта (модели).

Вывод по аналогии включает интерпретацию информации, полученной исследованием модели. Такой вывод не сводится к экстраполяции информации с одного объекта на другой. Главное заключается в том, чтобы объяснить информацию, осмыслить ее, определить и выразить результат исследования модели в терминах предмета-оригинала. Интерпретацию и подтверждение результатов моделирования следует рассматривать как основной аргумент в пользу тезиса о том, что аналогия и ее частный случай — подобие — есть объективная и логическая основа метода моделирования.

Способ получения выводов по аналогии в логической литературе получил название традукция — перенос отношений (свойств, функций и т. д.) с одних предметов на другие. Традуктивный способ рассуждений используется при сопоставлении различных предметов по количеству, качеству, пространственному положению, временной характеристике, поведению, функциональным параметрам структуры и т. д.

Нормативные условия, соблюдение которых повышает степень достоверности заключения по аналогии и обеспечивает правильность умозаключений, следующие:

• чем больше общих свойств или сходных признаков у сравниваемых предметов, тем вероятнее их одинаковость и в других отношениях;

• чем существеннее найденные общие свойства, тем выше степень правомерности вывода;

• чем глубже познана взаимная закономерная связь сходных признаков, тем вывод ближе к достоверности;

• существуют условия ограничения, запрещающие переносить на предмет результаты действия времени, если таковые не связаны с предметами по существу или по его происхождению;

• общие свойства должны быть возможно более характерными для сравниваемых предметов;

• переносимые свойства должны быть того же типа, что и общие свойства;

• предметы должны сравниваться по любым случайно выбранным свойствам.

В общем случае под подобием понимается такое взаимооднозначное соответствие между сопоставляемыми объектами (процессами), при котором функции или правила перехода от параметров, характеризующих в том или ином смыс-

ле один из объектов, к параметрам, в том же смысле характеризующим другой объект, известны, а математические описания (если они имеются или потенциально могут быть получены) допускают их преобразование к тождественному виду.

Остановимся на аналогии между материальными, тепловыми и информационными процессами [5].

Поскольку мы исходим из эквивалентности вещества (массы), энергии и обобщенной негэнтропии как разных форм любого объективного явления, то можно ожидать аналогию в закономерностях, описывающих процессы, протекающих в разных формах. Другими словами, процессы, протекающие в материальных системах (веществах), должны иметь аналогию с процессами в энергетических или информационных системах. Известно, что аналогия процессов в микромире, где неопределенность обобщенной энтропии является основным параметром как в энергетических, так и в информационных и материальных процессах. Отличия наблюдаются только в единицах измерения. В теоретических исследованиях обобщенная энтропия использует натуральные логарифмы, в информационной теории логарифмы на основе 2 (биты). Труднее определить в системе негэнтропию, которая является связанной формой полученной информации (обобщенная негэнтрогия). В частности, законы термодинамики, регулирующие тепловые процессы, должны иметь аналогию и в регулировании информационных процессов.

При определении направления самопроизвольного протекания процессов можно установить общие закономерности для всех трех форм существования систем. У всех поток самопроизвольно идет только в одном направлении — увеличения обобщенной негэнтропии. Протекание процесса в противоположном направлении возможно только при применении теплового, вещественного или информационного насоса. Единство материи в системах характеризует также теория о трех ипостасях ее существования:

- вещество — концентрация и постоянство массы;
- энергия — движение;
- связанная информация — структура и организация обобщенной негэнтропии.

Эти формы существуют и изменяются эквивалентно в любой системе. Эквивалентность форм позволяет исследовать их согласованное действие в разных единицах. Единство форм в системах доказывается также тем, что деградация структуры системы всегда сопровождается изменением ее внутренней энергии и негэнтропии. Часто это называется потерей памяти (обобщенная негэнтропия и информации).

Существование во всех системах энтропийно-негэнтропийного компонента дает всем ее превращениям вероятностный нелинейный характер. Практически линейные формулы можно применять для описания превращений в очень узкой области изменения некоторых независимых переменных при допущении постоянства всех других факторов. Определение обобщенной энтропии и обобщенной негэнтропии расширяет предел применения линейных моделей для описания многих информационных процессов и зависимостей целевых критериев от условно независимых факторов.

Результаты исследования и их обсуждение. Система стрелок—оружие—мишень часто подвергается воздействию возмущающих факторов, которым на данный момент времени практически не уделялось внимание. Одним из таких факторов является ветровая нагрузка. В рамках динамики материальной точки сформулируем основные уравнения и начальные условия для ряда задач, имеющих практический интерес для системы с учетом действия силы ветра [2, 6, 8] .

Движения объектов можно условно разделить на два класса в зависимости от того, остается объект вблизи некоторого среднего положения или такого положения нет.

Примерами движения одного класса является полет стрелы, пули, заряда дроби, движение тела, брошенного под углом к горизонту. В качестве примеров движения другого класса являются колебания маятника, вибрация струны музыкального инструмента. Отметим, что одно и то же движение иногда можно отнести к любому из этих классов в зависимости от точки зрения на явление: так волны океана движутся к берегу, но частицы воды совершают движения вверх и вниз, а также вперед и назад относительно некоторого среднего положения.

Движение материальных тел под действием сил тяжести, сопротивления воздуха и сил ветра. Рассмотрим движение материальной точки массой m под действием сил $\vec{F}$. Уравнение движения в векторном виде имеет вид

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F}, \qquad (1)$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор точки по отношению к инерциальной системе отчета $Oxyz$, $\vec{F}=\sum\vec{F}_k$ — равнодействующая приложенных к точке сил.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки в прямоугольных декартовых координатах:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=F_y, \qquad (2)$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=F_z.$$

Основная задача динамики точки следующая: зная действующие на материальную точку силы, а также ее начальное положение и начальную скорость, определить закон движения точки.

Сила $\vec{F}$ в общем случае зависит от времени, положения точки в пространстве и скорости ее движения, т. е.

$$\vec{F}=\vec{F}(t,\vec{r},\vec{v}),$$

или

$$F_x=F_x(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}),$$

$$F_y=F_y(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}), \qquad (3)$$

$$F_z=F_z(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}),$$

где x, y, z — координаты точки, $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ — проекции ее скорости.

Дифференциальные уравнения движения в общем случае имеют следующий вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}),$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=F_y(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}), \qquad (4)$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=F_z(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}).$$

Проинтегрировав эту систему, получим x, y, z в функциях времени и шести произвольных постоянных, т.е. найдем общее решение системы в виде

$$x=x(t,c_1,c_4),$$

$$y=y(t,c_2,c_5), \qquad (5)$$

$$z=z(t,c_3,c_6).$$

Для определения произвольных постоянных $c_1, c_2, \cdots, c_6$ необходимо задать начальные условия, а именно при $t=t_0$ нужно задать начальное положение точки $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ и начальную скорость точки $\dot{x}=\dot{x}_0, \dot{y}=\dot{y}_0$, $\dot{z}=\dot{z}_0$.

Частное решение системы дифференциальных уравнений (4), удовлетворяющее заданным начальным условиям, записывается в виде

$$x=x(t,x_0,y_0,z_0,\dot{x}_0,\dot{y}_0,\dot{z}_0),$$

$$y=y(t,x_0,y_0,z_0,\dot{x}_0,\dot{y}_0,\dot{z}_0), \qquad (6)$$

$$z=z(t,x_0,y_0,z_0,\dot{x}_0,\dot{y}_0,\dot{z}_0).$$

Уравнения (6) определяют закон движения точки под действием заданных сил при данных начальных условиях, т.е. дают решение соответствующих задач динамики.

Будем считать, что на материальную точку действуют три силы, а именно сила тяжести, сила сопротивления воздуха и сила ветра.

Сила тяжести направлена вертикально вниз и равна по величине mg, где g — ускорение свободного падения.

Закон сопротивления среды довольно сложен. Найдено, что при малых скоростях (до 0,1 м·с$^{-1}$) сопротивление среды можно считать пропорциональным первой степени скорости. Для дозвуковых скоростей (примерно до 240 м·с$^{-1}$) сопротивление воздуха пропорциально второй степени скорости. Если вместо материальной точки рассматривать некоторое тело, то в аэродинамике принято считать, что численное значение силы сопротивления $\vec{R}$ можно вычислить по формуле

$$R=\frac{1}{2}c_x\rho S v^2, \qquad (7)$$

где ρ — плотность воздуха, S — площадь так называемого мидилевого сечения, т. е. площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную к направлению его скорости, c_x — безразмерный коэффициент сопротивления, зависящий от формы тела. При дозвуковых скоростях величину c_x можно считать постоянной. Направление силы сопротивления воздуха противоположно направлению вектора скорости.

Силу ветра в достаточно общем случае можно записать в виде

$$\vec{F}_в=\vec{F}(t,\vec{r}), \qquad (8)$$

Отметим, что ветровая нагрузка в интересующем нас случае имеет более простой вид. Понятно, что изменение силы ветра по оси z (рост стрелка) отсуствует. Практически не меняется сила ветра и до максимальной высоты, которой может достигнуть стрела или заряд дроби, что составляет не более десятков метров. В реальных условиях наших задач

$$\vec{F}_в=\vec{F}_в(t),$$

а зависимость ее от координат x, y будет в основном интересовать нас при получении фундаментальных решений соответствующих краевых задач.

Система (4) при соответствующих начальных условиях допускает решения в замкнутом виде в

весьма редких случаях. Приведем некоторые интересующие нас случаи.

Пусть материальная точка движется в однородном поле тяжести под действием одной только силы тяжести $m\vec{g}$, постоянной по численной величине и направлению. Дифференциальные уравнения движения точки в декартовой системе координат (считаем ось z направленной параллельно силе по вертикали вверх) имеют вид

$$m\ddot{x}=0,\quad m\ddot{y}=0,\quad m\ddot{z}=-mg. \tag{9}$$

Общее решение системы

$$x=c_1 t+c_4,\quad y=c_2 t+c_5,\quad z=-\frac{gt^2}{2}c_3 t+c_6. \tag{10}$$

Полученные уравнения дают в зависимости от значений произвольных постоянных $c_1, c_2, \cdots, c_6$ целый класс движений.

Рассмотрим два частных случая движения тела как материальной точки с гравитационной массой в безвоздушном пространстве.

1. Движение тела, брошенного вертикально вверх.

Пусть точка в начальный момент находится в начале системы координат и имеет скорость v_0, направленную вертикально вверх. Этому предположению соответствуют начальные условия

$$x=y=z=0,\quad \dot{x}=\dot{y}=0,\ \dot{z}=v_0 \quad \text{при } t=0.$$

Закон движения в этом случае имеет вид

$$x=0,\quad y=0,\quad z=v_0 t-\frac{gt^2}{2}. \tag{11}$$

2. Движениие тела, брошенного под углом к горизонту.

Пусть точка в начальный момент находится в начале системы координат и имеет скорость v_0, лежащую в плоскости Oxz и направленную под углом α к горизонту. В этом случае начальные условия

$$x=y=z=0,\quad \dot{x}=v_0 \cos\alpha,\ \dot{y}=0,\ \dot{z}=v_0 \sin\alpha \quad \text{при } t=0.$$

Закон движения определяется уравнениями

$$x=v_0 t\cos\alpha,\quad y=0,\quad z=v_0 t\cos\alpha-\frac{1}{2}gt^2. \tag{12}$$

Запишем уравнение траектории в непараметрическом виде

$$z=x\,tg\alpha-\frac{gx^2}{2v_0\cos^2\alpha}. \tag{13}$$

Траекторией точки является парабола с осью параллельной оси z, проходящая через начало координат. Угол α, который образует вектор начальной скорости с горизонтальной плоскостью, называется углом бросания.

Отметим, что решение задачи о движении тела, брошенного под углом к горизонту с учетом сопротивления воздуха, существенно сложнее. Теперь уже она не допускает решения в виде простых аналитических формул и может быть решена только с помощью численных методов.

Приведем решение одной из немногих задач движения в сопротивляющейся среде, которая допускает решение в замкнутом виде. Пусть в воздухе падает вертикально некоторое тело, на которое действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила сопротивления воздуха $\vec{R}$. Если ось x направим вертикально вниз, то уравнение движения будет

$$m\frac{dv}{dt}=mg-R.$$

В случае падения тела без начальной скорости ($v_0=0$) и представления силы сопротивления в виде

$$R=mgk^2v^2,$$

закон движения падающего тела (с начальным условием $x=0$ при $t=0$) имеет вид

$$x=\frac{1}{k^2 g}\ln ch(kgt). \tag{14}$$

Перейдем к рассмотрению конкретных примеров для системы стрелок—оружие—мишень. Используя идею моделирования по аналогии, рассмотрим действия ветровой нагрузки на систему.

Имеются достаточно простые формулы в механике, которые позволяют установить устойчивость колонны, находящейся под действием собственной массы без каких-либо дополнительных креплений и подверженой воздействию ветровых нагрузок.

Пусть тело массой m, высотой h и диаметром d находится на поверхности земли под действием собственной массы. Потеря равновесия такого тела наступит, если к нему приложить опрокидывающие силы с моментом

$$M\geq mg\frac{d}{2},$$

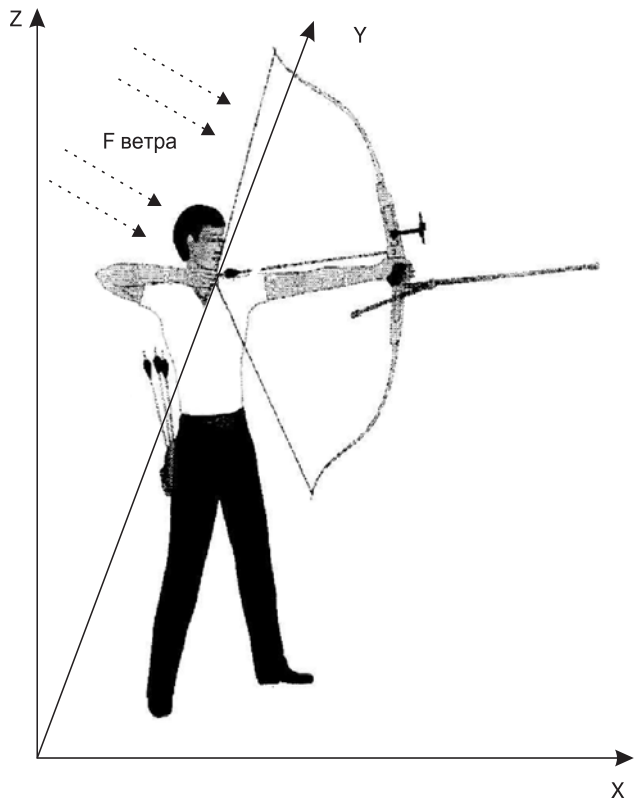

Рис. 1. *Действие ветровой нагрузки на систему стрелок—оружие*

где g — ускорение свободного падения. Такую пару можно реализовать, например, с помощью горизонтальной силы $\vec{F}$, приложенной в центре тяжести, т. е. на высоте $h/2$ от земли. При этом величина силы

$$F=\frac{M}{h/2}\geq mg\frac{d}{h}\ .$$

Подставляя средние параметры стрелка m = 70 кг, h = 1,7 м, d = 0,3 м, g = 9,81 м·с$^{-2}$, получаем

$$F\geq mg\frac{d}{h}=70\cdot 9{,}81\cdot\frac{0{,}3}{1{,}7}=\ 121{,}2\ H\approx 12\ \text{кг}.$$

Для оценки силы давления ветра (ветровой нагрузки) используют следующую формулу:

$$p=k\,q,$$

где p (кг·м$^{-2}$) — давление ветра, нормальное к воспринимающей поверхности, k — аэродинамический коэффициент, зависящий от формы и положения объекта, q (кг·м$^{-2}$) — скоростной напор ветра, соответствующий наибольшей для данного места скорости ветра с учетом особых порывов.

Величина q в зависимости от скорости ветра определяется следующим образом:

$$q=\frac{\gamma}{g}\cdot\frac{v^2}{2}\ ,$$

где γ — масса воздуха (обычно принимается 1,23 кг·м$^{-3}$ при $p_{атм}$ = 760 мм рт. ст. при $t_{атм}$ = 15 °С).

Таким образом, чтобы на площадь $S=d\cdot h$ подействовала сила F = 12 кг, необходимо, чтобы скорость ветра была

$$\sqrt{\frac{16F}{d\cdot h}}=\sqrt{\frac{16\cdot 12}{0{,}3\ \ \cdot 1{,}7}}=\ \sqrt{371}\ \text{м}\cdot\text{с}^{-1}\approx 20\,\text{м}\cdot\text{с}^{-1}.$$

Это очень большая скорость. Обычно при проведении соревнований скорость ветра 1—3 м·с$^{-1}$ считается малой, 4—10 — средней, более 10 м·с$^{-1}$ — большой.

Свободные колебания точки. Рассматриваются колебания точки с массой m под действием центральной силы $\vec{F}=-c\vec{r}$, направленной к неподвижному центру O и пропорциональной расстоянию от этого центра. Силу $\vec{F}$ называют еще восстанавливающей силой, так как она стремится вернуть точку в равновесное положение O, где $\vec{F}=0$, т. е. восстановить равновесие.

Дифференциальное уравнение движения точки имеет вид

$$m\ddot{x}=-c\,x$$

или $\ddot{x}+k^2\,x=0$, где $k^2=\frac{c}{m}$, c — коэффициент, численно равный силе, которая удлиняет пружину на 1 см. Общее решение дифференциального уравнения можно записать в виде

$$x=a\,sin(k\,t+\alpha),$$

где a, α — постоянные интегрирования, которые определяются из начальных условий

$$x=x_0,\ \ \dot{x}=v_0\ \text{при}\ \ t=0$$

Выражения для a, α следующие:

$$a=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{k^2}}\ ,\ \ tg\,\alpha=\frac{x_0\,k}{v_0}\,.$$

Движение точки периодическое с периодом

$$T=\frac{2\pi}{k}.$$

Величину, обратную периоду, которая определяет число колебаний, совершенных за одну секунду, называют частотой колебаний:

$$\omega\ =\frac{1}{T}=\frac{k}{2\pi}\,.$$

Свободные затухающие колебания точки при сопротивлении, пропорциональном скорости. На

Рис. 2. *Проекция центра масс системы на горизонтальную плоскость*

точку с массой m кроме восстанавливающей силы действует сила сопротивления $\vec{R}=-\mu\vec{v}$, пропорциональная скорости и направленная против движения. Дифференциальным уравнением движения точки будет

$$m\ddot{x}=-cx-\mu\dot{x},$$

или

$$\ddot{x}+2b\dot{x}+k^2x=0,$$

где $$k^2=\frac{c}{m},\ 2b=\frac{\mu}{m}.$$

Общее решение дифференциального уравнения можно записать в виде

$$x=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t},$$

где λ_1, λ_2 — корни следующего характеристического уравнения

$$\lambda^2-2b\lambda+k^2=0,$$

а именно $\lambda_{1,2}=-b\pm\sqrt{b^2-k^2}$.

В случае, если:

а) $b<k$, то обозначив $\sqrt{k^2-b^2}=k_1$,

будем иметь $\lambda_1=-b+ik_1$, $\lambda_2=-b-ik_1$. Общее решение принимает вид

$$x=e^{-bt}(c_1e^{ik_1t}+c_2e^{-ik_1t}),$$

или

$$x=e^{-bt}a\sin(k_1t+\alpha),$$

где a, α — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Величина

$$T_1=\frac{2\pi}{k_1}=\frac{2\pi}{\sqrt{k^2-b^2}},$$

период затухающих колебаний. В случае, когда величина b очень мала по сравнению с k, то практически можно считать $k_1\simeq k$ и $T_1\simeq T$;

б) $b>k$, то обозначив $\sqrt{b^2-k^2}=r^2$, находим корни характеристического уравнения, которые будут действительным числом

$$\alpha_1=-b+n,\ \ \alpha_2=-b-n,$$

общее решение принимает вид

$$x=e^{-bt}(c_1e^{nt}+c_2e^{-nt}),$$

или

$$x=e^{-bt}[Ach(nt)+Bch\,t],$$

где A и B — постоянные интегрирования.

Решения показывают, что x будет апериодической функцией, т.е. колебаний в данном случае не будет.

Так как $n<b$, то из выражений для функции x видно, что она с течением времени неограниченно убывает и стремится к нулю, т.е. точка со временем асимптотически приближается к притягивающему центру;

в) $b=k$, корни характеристического уравнения будут

$$\alpha_1=\alpha_2=-b$$

и общее решение уравнения движения примет вид

$$x=e^{-bt}(c_1+c_2t).$$

Так как e^{-bt} убывает быстрее, чем растет t, то движение в этом случае будет тоже апериодическим.

Вынужденные колебания точки при сопротивлении, пропорциональном скорости. Пусть на материальную точку массой m действует восстанавливающая сила $\vec{F}$, сила сопротивления $\vec{R}$ и возмущающая сила $\vec{Q}=\vec{Q}_0\sin pt$. Тогда дифференциальное уравнение движения точки будет

$$m\ddot{x}=-cx-\mu\dot{x}+Q_0\sin pt,$$

или

$$\ddot{x}+2b\dot{x}+k^2x=P\sin pt,$$

где

$$\frac{c}{m}=k^2,\ \frac{\mu}{m}=2b,\ \frac{Q_0}{m}=P.$$

Общим решением неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами будет сумма

общего решения однородного уравнения и какого-либо частного решения неоднородного уравнения. Для случая $k > b$

$$X = a e^{-bt} \sin(k_1 t + \alpha),$$

где X — общее решение однородного уравнения, и a и α — произвольные постоянные, а $k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}$. Будем искать частное решение неоднородного уравнения в виде

$$\xi = A \sin(pt - \beta).$$

После определенных математических действий получаем

$$\xi = \frac{P}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4 p^2 b^2}} \sin(pt - \beta),$$

а общее решение неоднородного уравнения будет

$$x = a e^{-bt} \sin(k_1 t + \alpha) + \\ + \frac{P}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4 p^2 b^2}} \sin(pt - \beta),$$

a и α — произвольные постоянные, определяемые по начальным условиям.

Решение показывает, что при одновременном воздействии на точку восстанавливающей и возмущающей сил точка совершает сложное колебательное движение, которое состоит из собственных колебаний точки и вынужденных колебаний, т. е. колебаний точки под действием возмущающей силы.

В случае отсутствия сопротивления среды ($b = 0$) колебания совершаются по закону

$$x = a \sin(k\ t + \alpha) + \frac{P}{k^2 - p^2} \sin pt.$$

Частота собственных колебаний равна k_1 или k в зависимости от наличия или отсутствия сопротивления; амплитуда a и начальная фаза α колебаний зависят от начальных условий. При наличии сопротивления собственные колебания будут затухающими, так как множитель e^{-bt} со временем уменьшается, стремясь к нулю. Поэтому практически (так как сопротивление неизбежно) можно считать, что по истечении некоторого промежутка времени, называемого периодом установления, точка будет совершать только вынужденные колебания.

Частота вынужденных колебаний равна частоте p гармонической возмущающей силы (эта сила как бы "навязывает" системе свою частоту колебаний).

Вынужденные колебания являются незатухающими; их амплитуда A, а также величина β, характеризующая сдвиг фаз вынужденных колебаний по отношению к фазе возмущающей силы, от начальных условий не зависят и определяются приведенными выше формулами.

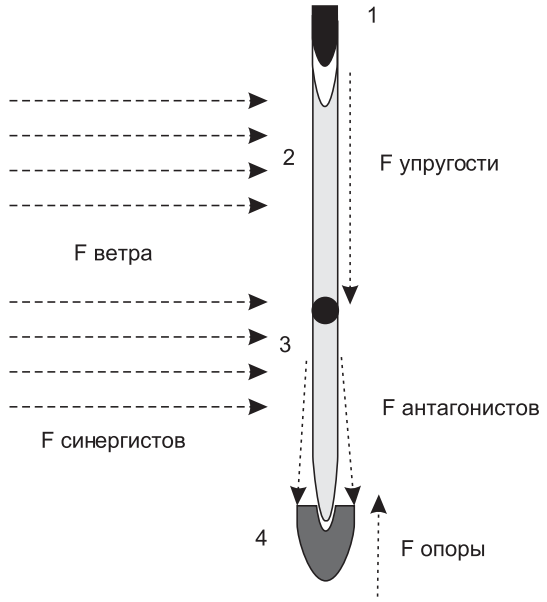

Рис. 3. *Схема сохранения динамической устойчивости удерживающей руки при ветровой нагрузке: 1 — лук, 2 — предплечье, 3 — плечо, 4 — плечевой сустав, 5 — локтевой сустав*

Рассмотрим следующий конкретный пример, а именно колебания элементов системы стрелок—лук под действием ветровых нагрузок.

Совершенствование техники спортивных движений лучников базируется на осмыслении закономерностей использования педагогического инструментария в зависимости от специфики объекта управления, условий его функционирования и конечной цели движения. В конкретном случае объектом управления является структурное образование части плечевого пояса спортсмена, удерживающее лук в условиях внешней ветровой возмущающей нагрузки с целью сохранения устойчивости обозначенной системы и вектора упругих сил в ней (рис. 3, 4).

Для объективизации педагогических воздействий и совершенствования устойчивости удерживающей руки и лука необходимо выполнить работы по созданию обобщенной математической модели условий функционирования биомеха-

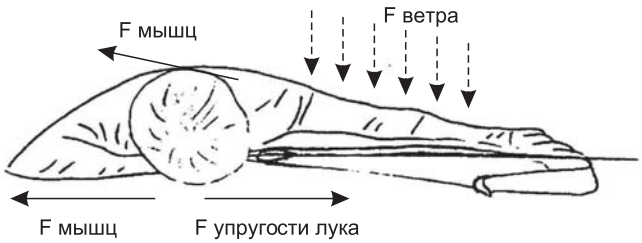

Рис. 4. *Система координат при моделировании действий ветра на устойчивость лучника (вид сверху)*

нической системы. Модель состоит из совокупности тележки и маятника, удерживаемого в “неподвижном” положении двумя группами мышц. Устойчивость удерживающей руки обеспечивается работой двух групп мышц — сгибателей и разгибателей, работающих в смешанном изометрическом и динамическом режиме. Подвижное основание моделирует возможность перемещения координат центра давления упругих сил лука и ветровой нагрузки. Необходимо учитывать вид нелинейной зависимости сил мышц от изменений их длины и скорости этого изменения. Особенности работы мышц таковы, что устойчивость удерживающей руки может быть обеспечена только в динамическом режиме, т. е. при изменениях уровня активности мышц, обусловленного функционированием системы обратных связей. Кроме этого существует явление запаздывания сигнала естественной обратной связи и ее нелинейность. Длительность соревновательной и тренировочной деятельности лучников побуждает при применении педагогических воздействий учитывать оптимальность расходования энергетических затрат на сохранение устойчивости системы удерживающая рука—лук при внешней ветровой сбивающей нагрузке.

Для моделирования действий ветра нами предложена механическая колебательная система с непериодическими колебаниями (рис. 5). Это комбинированный пружинно-математический маятник, который движется в вертикальной плоскости под действием двух сил — тяжести и упругости. Колебательная система состоит из спиральной пружины малой массы с жесткостью k, к которой прикреплен грузик массой m, который крепится к нерастягивающейся нитке (точка Д), перекинутой через блок (точка Б) и передает равнодействующую силу в точке Г на рукоятку лука (1).

В положении А равнодействующая всех сил, действующая на груз m, равняется 0, а при выведении его из равновесия — отлична от 0 и направлена к этому положению.

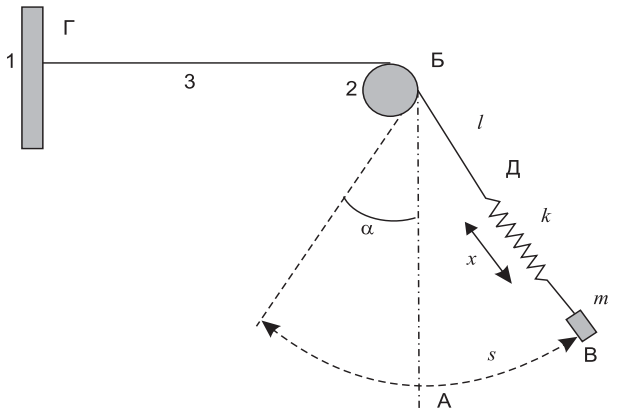

Рис. 5. *Расчетная схема комбинированного маятника*

Колебания системы вызываются силой тяжести $\vec{F}_{тяж} = m\vec{g}$, силой упругости пружины $\vec{F}_{упр} = -kx$. Проекция силы тяжести в направлении движения равняется $\vec{F}_{тяж} = m\vec{g}\sin\alpha$. При малых углах отклонения $\sin\alpha \approx \alpha = \frac{s}{l}$, где s — абсолютное значение смещения от положения равновесия, l — длина. Учитывая, что направление смещения и равнодействующей силы противоположны, получим $\vec{F} = -m\vec{g}\frac{s}{l}$, откуда найдем проекцию ускорения касательной маятника к его траектории: $\vec{a} = -\frac{\vec{g}}{l}s$.

В любой точке траектории сила упругости (которую можно рассчитать за законом Гука) направлена к положению равновесия, прямо пропорциональна отклонению $\vec{F}_{упр} = -k\vec{x}$ и согласно второму закону Ньютона: $\vec{a} = -\frac{k}{m}\vec{x}$.

Равнодействующая сила $\vec{F}_{общ} = \vec{F}_{упр} + \vec{F}_{тяж} = -k\vec{x} - m\vec{g}\frac{s}{l}$. Отсюда видно, что сбивающая сила, моделирующая действие ветровой нагрузки, зависит от жесткости деформированной пружины, линейной величиной растяжения пружины, массы грузика, длины нитки, к которой подвешен грузик, и величины отклонения его от вертикальной линии.

Подставим в последнее равенство жесткость деформированной пружины 10 Н·м$^{-2}$, величину растяжения пружины 0,15 м, массу грузика 0,1 кг, длину нитки, к которой подвешен грузик, 0,5 м, величину отклонения нитки от вертикальной линии 0,2 м, получим

$$F = -10\ (Н{\cdot}м^{-2})\ 0{,}15\ (м) - 0{,}1\ (кг)\ 9{,}81\ (м{\cdot}с^{-2}) \times$$
$$\times\ [0{,}2\ (м) \div 0{,}5\ (м)] = -1{,}8924\ (Н).$$

Для экспериментальной проверки работы тренажера-комбинированного маятника исследовались методы видеометрии. Фиксировались координаты ОЦМ грузика массой 0,1 кг и координаты проекции точки прицеливания на щите через 0,04 с. Характер перемещения показан на рис. 6, 7. Используя соответствующие расчеты, можно определить скорость и ускорение (рис. 8—11). Из рис. 6—11 видно, что существуют непериодические затухающие колебания. Наблюдается относительно большое отклонение точки прицеливания в начальной фазе скачкообраз-

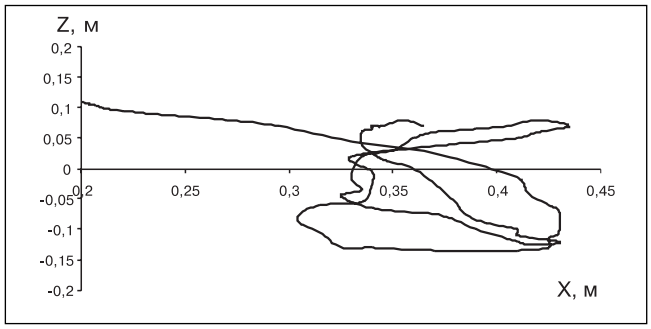

Рис. 6. *Траектория грузика после выведения из состояния равновесия*

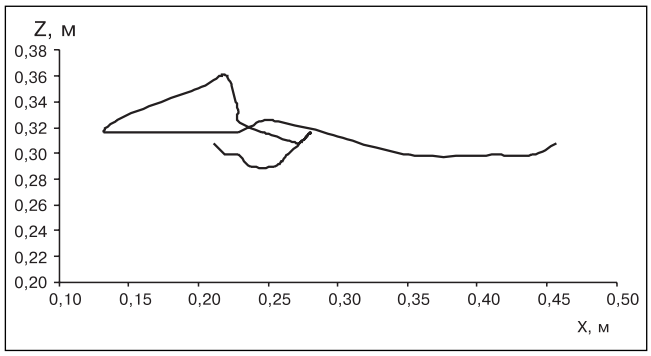

Рис. 7. *Траектория точки прицеливания после выведения из состояния равновесия у МСМК*

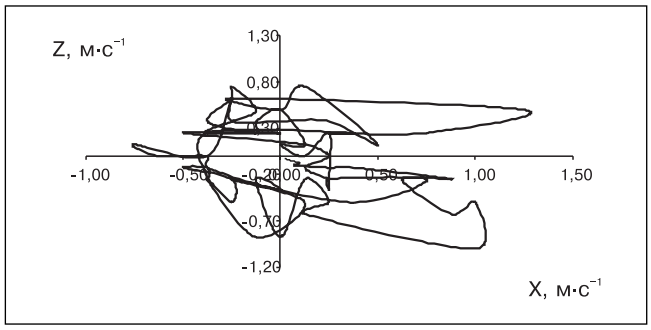

Рис. 8. *Скорость грузика после выведения из состояния равновесия*

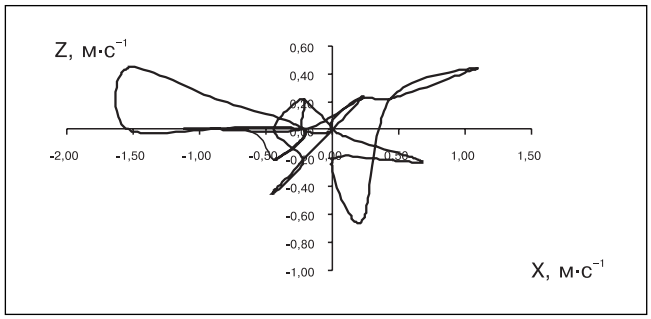

Рис. 9. *Скорость точки прицеливания после выведения из состояния равновесия у МСМК*

ного движения вследствие действий возмущающей силы при отведении грузика от точки равновесия. В дальнейшем перемещения и соответственно скорость и ускорение резко уменьшаются в течение 1—1,5 с.

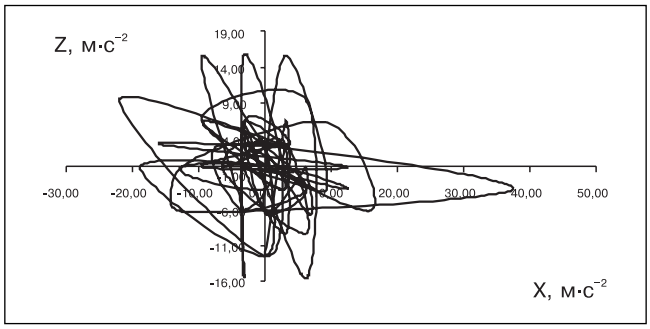

Рис. 10. *Ускорение грузика после выведения из состояния равновесия*

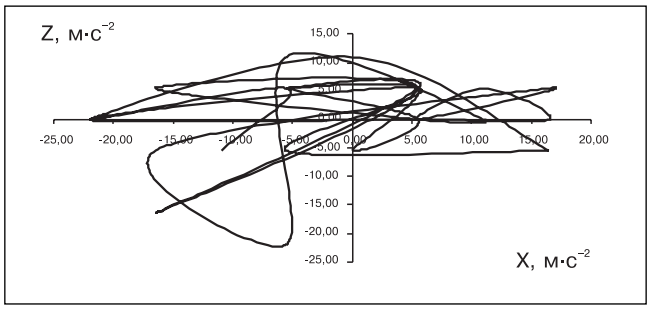

Рис. 11. *Ускорение точки прицеливания после выведения из состояния равновесия у МСМК*

Собственно выстрел из лука происходит в момент минимального перемещения. Аналогичная картина наблюдается и в спортивной практике лучников при стрельбе на открытой местности при непостоянном порывистом ветре.

Дальнейшее исследование предполагается проводить в следующих направлениях:

- разработка адекватных математических моделей комбинированного маятника;
- выявление закономерностей колебательного процесса в биомеханической системе стрелок—колебательный тренажер—оружие—мишень;
- разработка эффективной педагогической методики использования колебательного перемещения в стрелковом спорте.

Выводы

В статье проанализированы возможности метода моделирования по аналогии в стрелковых видах спорта. Моделирование по аналогии при выполнении ряда конкретных процедур может быть использовано как метод научного познания.

Влияние силы ветра на систему стрелок—оружие—мишень можно описать с помощью физико-математической модели, которая дает возможность получить количественные результаты.

Повышение степени адекватности процессов в стрельбе из лука возможно при использовании разработанного тренажера, действующего по аналогии.

Экспериментально доказано аналогию между воздействием ветровой нагрузки и действием сил упругости на устойчивость биомеханической системы стрелок—оружие—мишень. Внедрение современных тренажерных комплексов, действующих по аналогии — одно из перспективных направлений совершенствования педагогического процесса.

1. *Баторoев К.Б.* Аналогии и модели в познании. — Новосибирск: Наука, 1981. — 320 с.

2. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. — Ч. 1. — М.: Наука, 1962. — 468 с.

3. *Венников В.Л.* Теория подобия и моделирования. — М.: Выс. шк., 1986. — 480 с.

4. *Кочергин А.М.* Моделирование мышления. — М.: Из-во Политиздат, 1969. — 224 с.

5. *Лийв Э.Х.* Инфодинамика. Обобщенная энтропия и негэнтропия. — Таллинн, 1988.

6. *Лопатьев А.О., Дзюбачик Н.И., Виноградский Б.А.* О возможных подходах при моделировании сложных систем в стрелковых видах спорта // Наука в олимпийском спорте. — 2004. — № 2. — С. 101—107.

7. *Платонов В.Н, Лапутин А.Н., Кашуба В.А.* Биомеханические эргогенные средства в современном спорте // Наука в олимпийском спорте. — 2004. — № 2. — С. 86—100.

8. *Тихонов А.Н., Костомаров Д.П.* Вводные лекции по прикладной математике. — М.: Наука, 1984. — 190 с.

[1]Центр математического моделирования Института прикладных проблем механики и математики им. Я.С.Пидстригача НАН Украины, Львов
[2]Львовский государственный институт физической культуры, Львов
[3]Национальный университет физического воспитания и спорта, Киев

Поступила 30.06.2005