УДК 514.

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ КРАЙОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ РОЗРАХУНКУ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ В РАЙОНІ ТРІЩИНИ

Саликіна Н. В., Толок В. О.

Аналітичний розв'язок задач про тріщину нормального відриву для смуги скінченних розмірів, навантаженої силами, що розтягують, із крайовою або центральною тріщиною подано в роботі [1] у виді розкладу комплексної функції напружень Вєстєргарда в ряд, при виключенні з якого членів вищих порядків обчислюються напруження, що виникають поблизу тріщини:

$$\sigma_y = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right); \qquad (1)$$

$$\sigma_x = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)-\sigma;$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2};$$

де K_1 — коефіцієнт інтенсивності напружень,

r — відстань від вершини тріщини до деякої точки плоского тіла,

θ — кут між вектором r і віссю абсцис,

σ — величина сили, рівномірно розподіленої по краю смуги.

Для розв'язку задачі розрахунку напружень і зміщень у районі тріщини пропонується ітераційний алгоритм із використанням методу крайових елементів, описаного в роботі[2]. В основу алгоритму покладена ідея розбивки тіла на 2 області, границею контакту яких є передбачувана лінія поширення тріщини. Запишемо граничне інтегральне рівняння з [3]:

$$\frac{1}{2}u_j(\xi)+\int_\Gamma \sigma^*_{ji}(\xi,x)\,u_i(x)\,d\Gamma(x)=\int_\Gamma u^*_{ji}(\xi,x)\,\sigma_i(x)\,d\Gamma(x); \qquad (2)$$

де $u^*_{ji}(\xi,x)$ — функція фундаментальних переміщень,

$\sigma^*_{ji}(\xi,x)$ — функція фундаментальних напружень.

Думаємо, що досягнуте критичне навантаження, що викликає розрив у небезпечній точці. Уведемо такі позначення: Γ_1 — границя контакту двох областей (рис.1), n_l — кількість елементів розбивки границі Γ_1. Нехай l-й крайовий елемент містить точку розриву. Визначимо граничні умови на лінії Γ_1.

На 1-ому кроці ітерації: для першої області думаємо зміщення на Γ_1 рівними нулю. Береги тріщини вільні від напружень, тому в l -ому крайовому елементі $\sigma_{i(l)}$ рівні нулю. На кожному кроці ітерації буде виконуватися рівність нулю напружень для l-го крайового елемента. Уводячи чисельні апроксимації і замінюючи інтегральне рівняння системою алгебраїчних рівнянь, знаходимо $\sigma^{(1)}_{i(n)}$, $n\neq l$, а також переміщення для l-го елемента, а точніше для нижнього берега тріщини.

На границі контакту для 2-ої області задаємо відповідно напруження $\sigma^{(1)}_{i(n)}$, де $n\neq l$. Аналогічно знаходимо переміщення $u^{(2)}_{i(n)}$, $n\neq l$ на лінії продовження тріщини, а також зміщення для верхнього

$$\frac{1}{2}u_j(\xi)+\int_{\Gamma_1}\sigma^*_{ji}(\xi,x)u_i^{(k)}(x)d\Gamma(x)+\int_{\Gamma\setminus\Gamma_1}\sigma^*_{ji}(\xi,x)u_i(x)d\Gamma(x)=\int_{\Gamma_1}u^*_{ji}(\xi,x)\sigma_i^{(k)}(x)d\Gamma(x)+$$
$$\int_{\Gamma\setminus\Gamma_1}u^*_{ji}(\xi,x)\sigma_i(x)d\Gamma(x), \qquad (3)$$

берега тріщини. Переміщення $u^{(2)}_{i(n)}$ будуть відомими граничними умовами на Γ_1 для 1-ої області на другій ітерації Отже, загальне ітераційне граничне рівняння для Γ_1 виглядає так:

k -я ітерація для 1-ої області:

де $u_i^{(k)}$ — відомі величини у вузлових точках границі Γ_1.

k -я ітерація для 2-ої області:

$$\frac{1}{2}u_j(\xi)+\int_{\Gamma_1}\sigma^*_{ji}(\xi,x)u_i^{(k+1)}(x)d\Gamma(x)+\int_{\Gamma\setminus\Gamma_1}\sigma^*_{ji}(\xi,x)u_i(x)d\Gamma(x)=\int_{\Gamma_1}u^*_{ji}(\xi,x)\sigma_i^{(k)}(x)d\Gamma(x)+$$
$$\int_{\Gamma\setminus\Gamma_1}u^*_{ji}(\xi,x)\sigma_i(x)d\Gamma(x), \qquad (4)$$

де $\sigma_i^{(k)}$ — відомі величини у вузлових точках границі Γ_1.

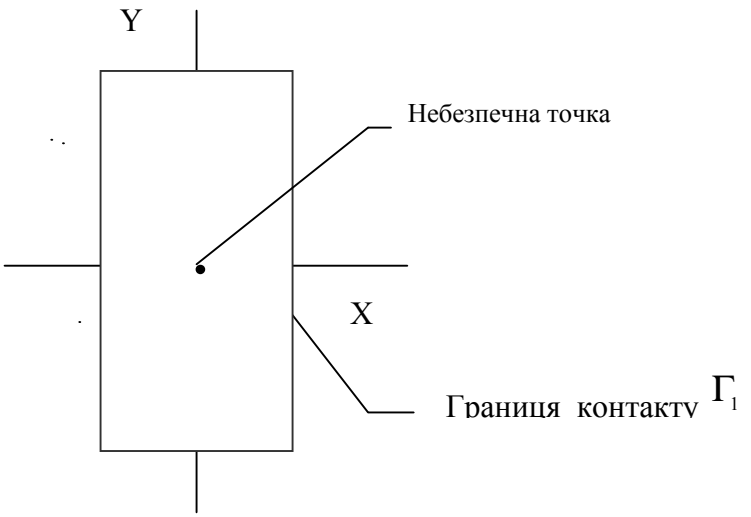


Рис.1. Розбивка плоского тіла на дві області

Довжина тріщини в даному алгоритмі дорівнює довжині *l*-г о елемента. Висока концентрація напружень у вершині тріщини, що утворилася, приведе до подальшого росту по лінії контакту. У цьому випадку ітераційна процедура застосовується для розрахунку тріщини, довжина якої включає декілька крайових елементів.

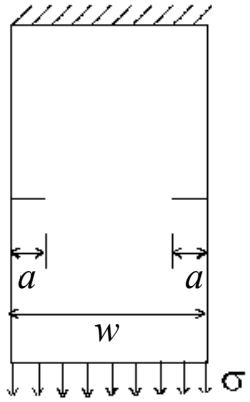
Приведемо результати тестування алгоритму на прикладах деяких задач про тріщину для смуги скінченних розмірів:

1.Смуга шириною w=1см і довжиною S=8см із двома симетрично розташованими щодо осі ординат крайовими тріщинами рівномірно навантажена силами, що розтягують σ =500.0Мпа. Верхній край смуги жорстко затиснений (рис.2).

2. Смуга шириною w=0.6см і довжиною S=8см із крайовою тріщиною, верхній край котрої жорстко затиснений, рівномірно навантажена силами, що розтягують σ =500.0Мпа (рис.3).

3. Смуга шириною w=1см і довжиною S=8см із центральною тріщиною верхній край котрої жорстко затиснений, рівномірно навантажена силами, що розтягують σ =500.0Мпа (рис.4).

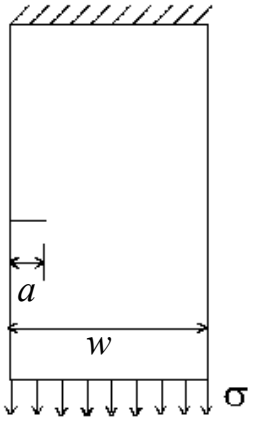
Коефіцієнт Пуассона ν=0.3 і модуль Юнга E=0.2×10^7. Для розглянутих задач границею контакту є вісь абсцис (рис.1), що випливає з граничних умов навантаження і формул (1) (відповідно до цих формул кут поширення тріщини θ=0). Для демонстрації швидкості збіжності обмежимося розглядом результатів для прикладу (2) (табл.1) . Кількість елементів розбивки границі Γ_1 n_1 =12.



1. $K_1 = Y\sigma\sqrt{a}$;

$$Y = 1.99 + 0.76\frac{a}{w} - 8.48\left(\frac{a}{w}\right)^2 + 27.36\left(\frac{a}{w}\right)^3;$$

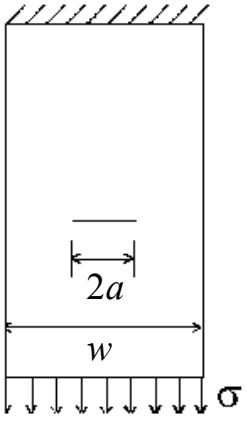
Рис.2. Задача про тріщину (1) для лінійно-пружного тіла



2. $K_1 = Y\sigma\sqrt{a}$;

$$Y = 1.99 - 0.41\frac{a}{w} + 18.7\left(\frac{a}{w}\right)^2 - 38.48\left(\frac{a}{w}\right)^3 + 53.85\left(\frac{a}{w}\right)^4;$$

Рис.3. Задача про тріщину (2) для лінійно-пружного тіла



3. $$K_1 = \sigma\sqrt{\pi a}\left(\sec\frac{\pi a}{w}\right)^{1/2};$$

Рис.4. Задача про тріщину (3) для лінійно-пружного тіла

Таблиця 1— Напруження і зміщення на лінії контакту при довжині тріщини, що включає один крайовий елемент

перша область					друга область			
елемент	$u_x^{(1)}$	$u_y^{(1)}$	$\sigma_s^{(1)}$	$\sigma_n^{(1)}$	$u_x^{(2)}$	$u_y^{(2)}$	$\sigma_s^{(1)}$	$\sigma_n^{(1)}$
1	0.000000	0.000000	-130.8	795.7	-0.000003	0.000902	130.8	795.7
2	0.000000	0.000000	-125.7	433.2	-0.000003	0.000902	125.7	433.2
3	0.000000	0.000000	-87.3	439.3	-0.000003	0.000902	87.3	439.3
4	0.000000	0.000000	-56.4	446.3	-0.000003	0.000902	56.4	446.3
5	0.000000	0.000000	-28.2	455.8	-0.000003	0.000902	28.2	455.8
6	0.000000	0.000000	-1.7	464.4	-0.000003	0.000902	1.7	464.4
7	0.000000	0.000000	24.2	472.8	-0.000003	0.000902	-24.2	472.8
8	0.000000	0.000000	51.6	483.2	-0.000003	0.000902	-51.6	483.2
9	0.000000	0.000000	82.3	502.7	-0.000003	0.000902	-82.3	502.7
10	0.000000	0.000000	123.0	534.1	-0.000003	0.000902	-123.0	534.1
11	0.000000	0.000000	138.6	1009.3	-0.000003	0.000902	-138.6	1009.3
12	0.000006	0.000033	0.0	0.0	-0.000003	0.000869	0.0	0.0
елемент	$u_x^{(2)}$	$u_y^{(2)}$	$\sigma_s^{(2)}$	$\sigma_n^{(2)}$	$u_x^{(3)}$	$u_y^{(3)}$	$\sigma_s^{(2)}$	$\sigma_n^{(2)}$
1	-0.000003	0.000902	-130.5	795.6	-0.000003	0.000902	130.5	795.6
2	-0.000003	0.000902	-125.6	433.3	-0.000003	0.000902	125.6	433.3
3	-0.000003	0.000902	-87.2	439.4	-0.000003	0.000902	87.2	439.4
4	-0.000003	0.000902	-56.4	446.4	-0.000003	0.000902	56.4	446.4
5	-0.000003	0.000902	-28.2	456.0	-0.000003	0.000902	28.2	456.0
6	-0.000003	0.000902	-1.8	464.6	-0.000003	0.000902	1.8	464.6
7	-0.000003	0.000902	24.2	472.9	-0.000003	0.000902	-24.2	472.9
8	-0.000003	0.000902	51.4	483.3	-0.000003	0.000902	-51.4	483.3
9	-0.000003	0.000902	82.1	502.7	-0.000003	0.000902	-82.1	502.7
10	-0.000003	0.000902	122.8	534.0	-0.000003	0.000902	-122.8	534.0
11	-0.000003	0.000902	138.5	1008.9	-0.000003	0.000902	-138.5	1008.9
12	0.000003	0.000935	0.0	0.0	0.000003	0.000869	0.0	0.0
елемент	$u_x^{(3)}$	$u_y^{(3)}$	$\sigma_s^{(3)}$	$\sigma_n^{(3)}$	$u_x^{(4)}$	$u_y^{(4)}$	$\sigma_s^{(3)}$	$\sigma_n^{(3)}$
1	-0.000003	0.000902	-130.2	795.7	-0.000003	0.000902	130.2	795.7
2	-0.000003	0.000902	-125.5	433.3	-0.000003	0.000902	125.5	433.3
3	-0.000003	0.000902	-87.1	439.4	-0.000003	0.000902	87.1	439.4
4	-0.000003	0.000902	-56.4	446.4	-0.000003	0.000902	56.4	446.4
5	-0.000003	0.000902	-28.1	455.9	-0.000003	0.000902	28.1	455.9
6	-0.000003	0.000902	-1.8	464.5	-0.000003	0.000902	1.8	464.5
7	-0.000003	0.000902	24.2	472.9	-0.000003	0.000902	-24.2	472.9
8	-0.000003	0.000902	51.4	483.2	-0.000003	0.000902	-51.4	483.2
9	-0.000003	0.000902	82.1	502.7	-0.000003	0.000902	-82.1	502.7
10	-0.000003	0.000902	122.8	534.0	-0.000003	0.000902	-122.8	534.0
11	-0.000003	0.000902	138.4	1009.0	-0.000003	0.000902	-138.4	1009.0
12	0.000003	0.000935	0.0	0.0	0.000002	0.000869	0.0	0.0

Як видно з таблиці, ми використовуємо усього лише три наближення для досягнення збіжності розв'язку. Швидка збіжність характерна і для розв'язків прикладів (1) і (3). Найбільш важливою характеристикою напружено-деформованого стану у вершини тріщини є розтягуюче напруження σ_n. Саме досягнення ним критичного значення є загальною умовою розриву [4]. Порівняємо результати розрахунку нормальних напружень з аналітичними, обчисленими за формулою (1). Зіставлення розв'язків представимо у виді графіків аналітичної і наближеної функцій розподілу напружень (рис.5, рис.7, рис.9). На рисунках уведені такі позначення: *a* — довжина граничного елемента, w — ширина розглянутої смуги, u_n і u_s — відповідно нормальні і дотичні зміщення. На кожному з рисунків приведені графіки аналітичного і наближеного розподілу нормальних напружень, що відповідають довжині тріщини, рівної *a,2a…,6a* (тобто що включає n (*для* задачі (3) — 2n крайових елементів), де n змінюється *від* 1 до 6). По отриманих графіках щодо всіх розглянутих прикладів видно, що ріст тріщини тягне за собою ріст нормальних напружень. В усіх випадках чисельні результати знаходяться в узгодженні з аналітичним розв'язком за винятком точок, що знаходяться на великій відстані від вершини тріщини, де формули (1) не є точними для визначення напружень удалині від вершини тріщини. Форму тріщини, що поширюється, також можна визначити відповідно до зміщень для нижнього і верхнього берегів тріщини, що відповідають нульовим напруженням. На рис.6,8,10 зображені фрагменти тіла, що деформується, із тріщиною для прикладів (1)-(3).

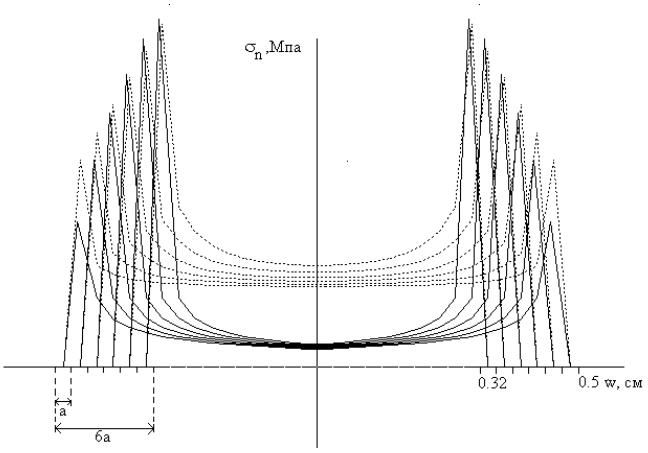


Рис.5. Розподіл нормальних напружень σ_n на лінії продовження тріщини у відповідності з аналітичним (суцільна крива) і наближеним (штрихова крива) розв'язками для прикладу (1)

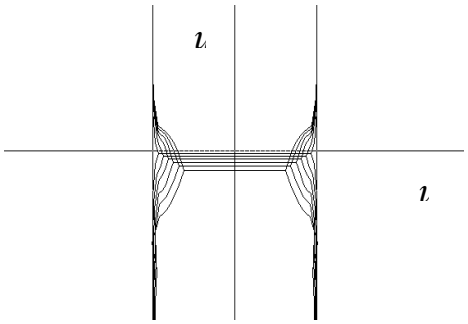


Рис. 6. Поширення двох симетрично розташованих щодо осі ординат тріщин для прикладу (1)

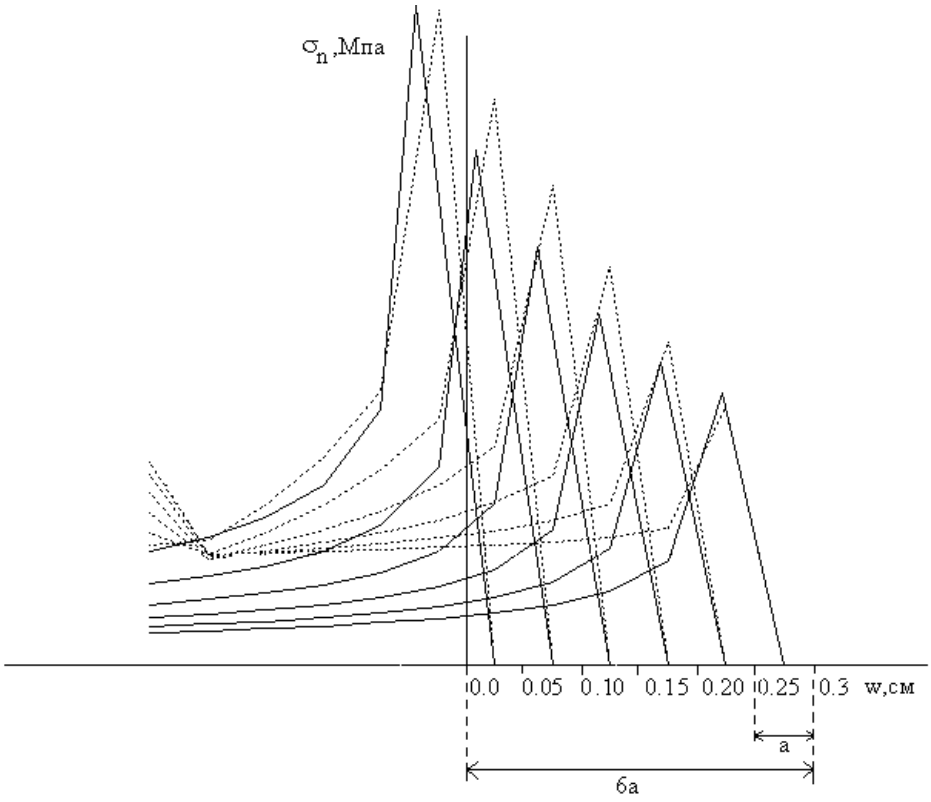


Рис.7. Розподіл нормальних напружень σ_n на лінії продовження тріщини у відповідності з аналітичним (суцільна крива) і наближеним (штрихова крива) розв'язками для прикладу (2)

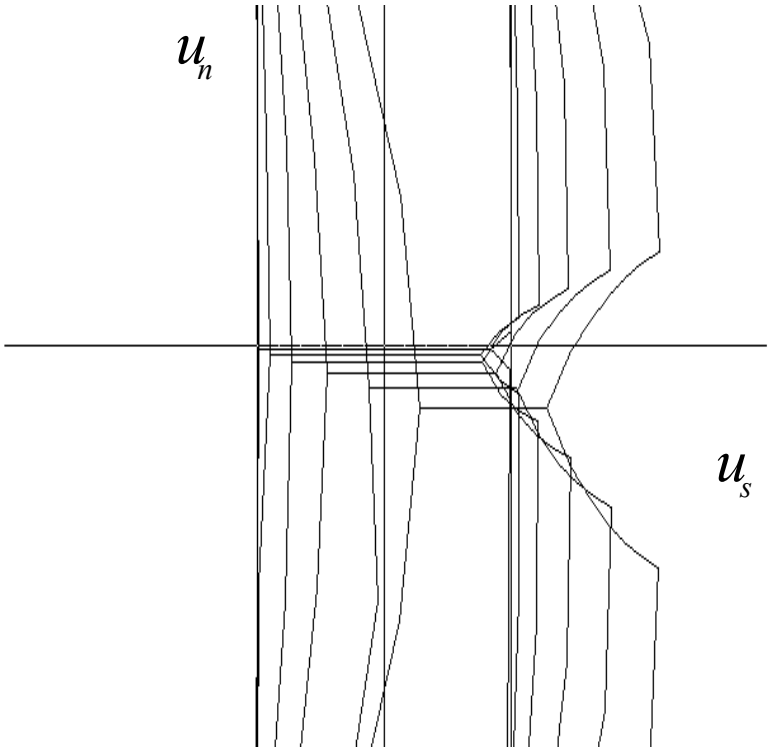


Рис.8. Поширення крайової тріщини для прикладу (2)

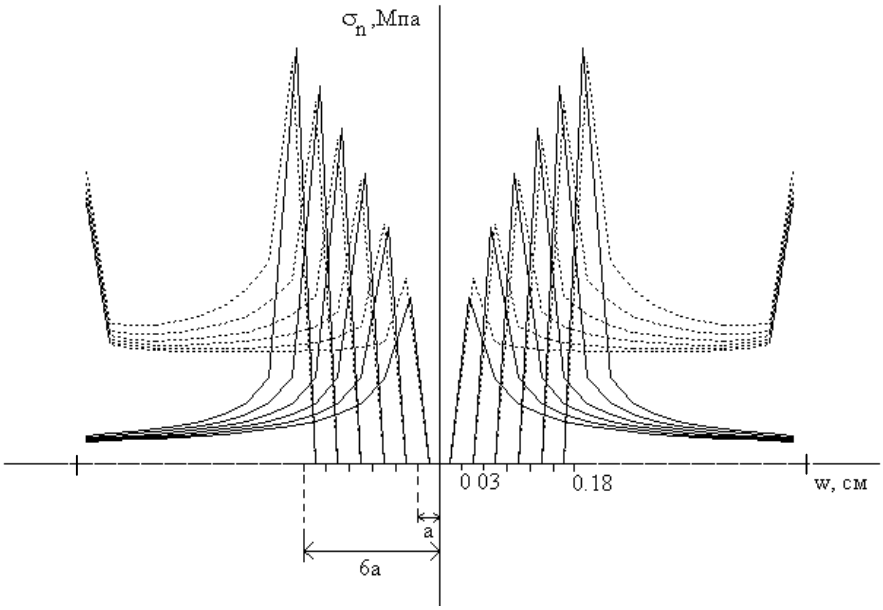


Рис.9. Розподіл нормальних напружень σ_n на лінії продовження тріщини у відповідності з аналітичним (суцільна крива) і наближеним (штрихова крива) розв'язками для прикладу (3)

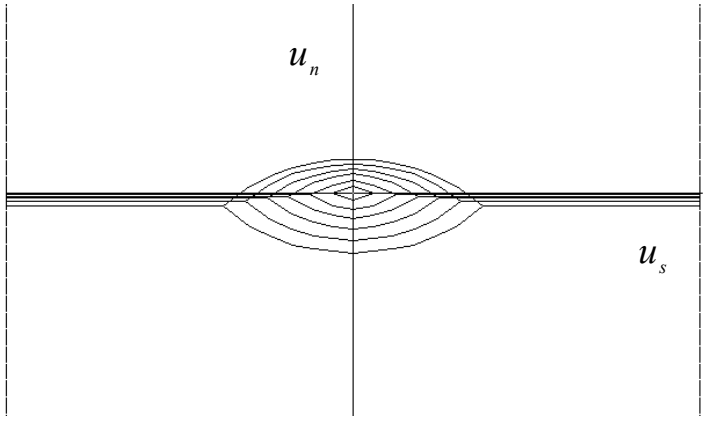


Рис.10. Поширення центральної тріщини

Графіки чисельного й аналітичного розв'язків розглянутих задач про тріщину показують узгодженість в околиці вершини тріщини. Моделювання явища нормального відриву для даних конфігурацій дає реальну картину поширення тріщини.

ЛІТЕРАТУРА

1. Броек Д. Основы механики разрушения – М.:Высшая школа, 1980. –368 с.
2. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов – М.: Мир, 1987. – 524 с.
3. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела –М.: Мир, 1987. – 328 с.
4. Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости: Учебное пособие – М.: Наука, 1981. – 688 с.