УДК 517.982.3

СКІНЧЕННОВИМІРНА АПРОКСИМАЦІЯ В ЗАДАЧІ ПРО МІНІМІЗАЦІЮ ФУНКЦІОНАЛА

Богун І.В.

Розглянемо задачу про знаходження допустимого керування, яке мінімізує деякий функціонал.

Нехай процес описується рівнянням:

$$\frac{\partial\, u(t,x)}{\partial\, t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial\, x^2} + p(t,x), \tag{1}$$

де $p(t,x)$ - керування, а функція $u(t,x)$ означена в області $D = [0,T]\times[0,1]$ та на межі цієї області задовольняє умовам:

$$\frac{\partial\, u(t,0)}{\partial\, x} = 0, \frac{\partial\, u(t,1)}{\partial\, x} + \alpha\, u(t,1) = 0, \tag{2}$$

$$u(0,x) = g(x), \tag{3}$$

де $\alpha = const > 0$, а $g(x) \in L_2[0,1]$ - задана функція.

Допустимими керуваннями будемо вважати функції із простору $L_2(D)$.

Нам потрібно знайти таке допустиме керування $p(t,x)$ та такий відповідний до нього розв'язок задачі (1)-(3) $u(t,x)$, щоб на них функціонал

$$I[p] = \int_0^1 [u(T,x) - \phi(x)]^2\, dx + \beta \int_0^T \int_0^1 p^2(t,x)\, dx\, dt + \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 u(t,x) Q(x,s) u(t,s)\, ds\, dx\, dt \tag{4}$$

набував найменше можливе значення. Тут $\beta = const > 0$, $\phi(x) \in L_2[0,1]$ та $Q(x,s) \ge 0$ - задані функції.

Подамо розв'язок задачі (1)-(3) у вигляді ряду Фур'є за власними функціями задачі Штурма-Ліувілля:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0; X'(0) = X'(1) + \alpha X(1) = 0,$$

тобто

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x). \tag{5}$$

Аналогічно поступимо з керуючою функцією та функцією $g(x)$:

$$p(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) X_n(x), \tag{6}$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n X_n(x). \tag{7}$$

Тоді задача (1)-(3) розпадеться на нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь з початковими умовами для коефіцієнтів Фур'є функції $u(t,x)$:

$$u_n'(t)+\lambda_n^2 u_n(t)=p_n(t), u_n(0)=g_n, n=1,2,3,... \quad (8)$$

Припустимо, що функцію $Q(x,s)$ можна подати у вигляді:

$$Q(x,s)=\sum_{n,m=1}^{\infty}\delta_{nm}q_n X_n(x)X_m(s), \quad (9)$$

де δ_{nm} - символ Кронекера.

Якщо

$$\phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n X_n(x), \quad (10)$$

тоді функціонал (4) набуває вигляду:

$$I[p]=\sum_{n=1}^{\infty}\left([u_n(T)-\phi_n]^2+\beta\int_0^T p_n^2(t)dt+q_n\int_0^T u_n^2(t)dt\right). \quad (11)$$

Залишаючи скінченне число доданків у рядах (5)-(7), (9)-(11), ми зведемо початкову проблему до нескінченної системи незалежних задач про знаходження таких функцій $p_n(t)$ та відповідних до них функцій $u_n(t)$, які задовольняють (8), щоб на парах $p_n(t),u_n(t)$ функціонали

$$I_n=[u_n(T)-\phi_n]^2+\beta\int_0^T p_n^2(t)dt+q_n\int_0^T u_n^2(t)dt \quad (12)$$

набували найменші можливі значення.

Оскільки допустимими керуваннями вважались функції із простору $L_2(D)$, тому в скінченновимірній задачі будемо вимагати, щоб $p_n(t)\in L_2[0,T]$.

Для розв'язання нової задачі скористуємося методами динамічного програмування. Для цього введемо функціонал:

$$S_n[t,u_n]=\min_{\substack{p\in L_2\\ t\le\tau\le T}}\{[u_n(T)-\phi_n]^2+\beta\int_0^T p_n^2(t)dt+q_n\int_0^T u_n^2(t)dt\},$$

де $t\in[0,T]$.

Рівняння Беллмана для цього функціонала має вигляд:

$$-\frac{\partial S_n[t,u_n]}{\partial t}=\min_{p\in L_2}\left\{\beta p_n^2(t)+q_n u_n^2(t)+\frac{\partial S_n[t,u_n]}{\partial u_n}(p_n(t)-\lambda_n^2 u_n(t))\right\} \quad (13)$$

з початковою умовою

$$S_n[t,u_n]=[u_n(T)-\phi_n]^2. \quad (14)$$

Мінімум у правій частині (13) досягається при

$$p_n(t)=-\frac{1}{2\beta}\frac{\partial S_n[t,u_n]}{\partial u_n}. \quad (15)$$

Тоді (13) можна переписати у вигляді:

$$\frac{\partial S_n[t,u_n]}{\partial t}=\frac{\partial S_n[t,u_n]}{\partial u_n}\left(\lambda_n^2 u_n(t)+\frac{1}{4\beta}\right)-q_n u_n^2(t). \tag{16}$$

Розв'язок рівняння (16) з початковою умовою (14) шукаємо у вигляді:

$$S_n[t,u_n]=K_n(t)u_n^2(t)+\varphi_n(t)u_n(t)+\eta_n(t), \tag{17}$$

де $K_n(t),\varphi_n(t),\eta_n(t)$ - функції, які підлягають визначенню. Після підстановки (17) у рівняння (16) дістанемо такі задачі для визначення цих функцій:

$$K_n'(t)-4\lambda_n^2K_n(t)+q_n=\frac{3}{\beta}K_n^2(t), \tag{18}$$

$$\varphi_n'(t)-2\lambda_n^2\varphi_n(t)=\frac{3}{\beta}K_n(t)\varphi_n(t), \tag{19}$$

$$\eta_n'(t)=\frac{3}{4\beta}\varphi_n^2(t). \tag{20}$$

Враховуючи початкову умову (14), дістанемо початкові умови для задач (18)-(20), відповідно:

$$K_n(T)=1, \tag{21}$$

$$\varphi_n(T)=-2\phi_n, \tag{22}$$

$$\eta_n(T)=\phi_n^2. \tag{23}$$

Таким чином, для визначення функції $K_n(t)$ ми маємо рівняння Ріккаті (18) з початковою умовою (21).

Заміною $z_n(t)=\frac{3}{\beta}K_n(t)+2\lambda_n^2$ рівняння (18) зводиться до вигляду:

$$z_n'(t)=z_n^2(t)-\left(4\lambda_n^4+\frac{3q_n}{\beta}\right),z_n(T)=2\lambda_n^2+\frac{3}{\beta}. \tag{24}$$

Частинним розв'язком цього рівняння є функція $z_n(t)=\sqrt{4\lambda_n^4+\frac{3q_n}{\beta}}\equiv b_n$, знаючи яку, рівняння (24) заміною $y_n(t)=z_n(t)-b_n$ зводиться до рівняння Бернуллі, яке у свою чергу перетворюється до лінійного рівняння та легко інтегрується у квадратурах. При цьому ми отримуємо такий розв'язок задачі (18),(21):

$$K_n(t)=\frac{\beta}{3}\left(\frac{2b_n(a_n-2b_n)}{a_n\left(e^{2b_n(T-t)}-1\right)+2b_n}+b_n-2\lambda_n^2\right), \tag{25}$$

де $a_n=\frac{3}{\beta}+2\lambda_n^2+b_n$.

ЛЕМА 1. Якщо $q_n\le\frac{3}{\beta}+2\lambda_n^2$, тоді функція $K_n(t)$ задовольняє умові: $0\le K_n(t)\le 1$.

Доведення. Відмітимо, що

$$a_n-2b_n=\frac{3}{\beta}+2\lambda_n^2-b_n=\frac{3}{\beta}+2\lambda_n^2-\sqrt{4\lambda_n^4+\frac{3q_n}{\beta}}\ge\frac{3}{\beta}+2\lambda_n^2-\sqrt{4\lambda_n^4+\frac{6\lambda_n^2}{\beta}+\frac{9}{\beta^2}}=0.$$

Крім того, $b_n - 2\lambda_n^2 \geq 0$. Значить, $K_n(t) \geq 0$.Оскільки $a_n - 2b_n \geq 0$, то функція $K_n(t)$ є неспадною та $\forall t \in [0,T]$ $K_n(t) \leq K_n(T) \leq 1$, що й потрібно було довести.

Відмітимо, що умову $q_n \leq \frac{3}{\beta} + 2\lambda_n^2$ можна здобути за рахунок зміни параметра β.

Знаючи функцію $K_n(t)$, з рівняння з відокремлюваними змінними (19) з початковою умовою (22) визначимо функцію

$$\varphi_n(t) = -\frac{4\phi_n b_n e^{b_n(T-t)}}{a_n\left(e^{2b_n(T-t)} - 1\right) + 2b_n}. \tag{26}$$

ЛЕМА 2. Функція $\varphi_n(t)$ задовольняє умові : $|\varphi_n(t)| \leq 2|\phi_n|$.

Доведення. Оскільки

$$|\ \varphi_n'(t)\ | = \frac{4|\phi_n| b_n e^{b_n(T-t)}}{(\ a_n\left(e^{2b_n(T-t)} - 1\right) + 2b_n\ )^2}\left(a_n e^{2b_n(T-t)} + a_n - 2b_n\right) \geq 0,$$

то функція $|\ \varphi_n(t)\ |$ є неспадною, тобто $|\ \varphi_n(t)\ | \leq |\ \varphi_n(T)\ | = 2|\ \phi_n\ |$, що й потрібно було довести.

Враховуючи (15) та (17), отримуємо, що

$$p_n(t) = -\frac{1}{2\beta}\left(2K_n(t)u_n(t) + \varphi_n(t)\right), \tag{27}$$

де функції $K_n(t)$ та $\varphi_n(t)$ визначаються формулами (25) та (26), відповідно. Після підстановки функції $p_n(t)$ у вигляді (27) у рівняння (8) дістанемо задачу для визначення функції $u_n(t)$, з якої випливає, що

$$u_n(t) = e^{-\int_0^t \left(\lambda_n^2 + \frac{K_n(\tau)}{\beta}\right)d\tau}\left(g_n - \frac{1}{2\beta}\int_0^t \varphi_n(\tau) e^{\int_0^\tau \left(\lambda_n^2 + \frac{K_n(s)}{\beta}\right)ds} d\tau\right). \tag{28}$$

Таким чином, керування $p_n(t)$ однозначно визначає розв'язок задачі (8).

ТЕОРЕМА. Керування (27), де функція $u_n(t)$ визначається формулою (28), належить простору $L_2[0,T]$.

Доведення. Оцінимо

$$\int_0^T u_n^2(t)dt = \int_0^T e^{-2\int_0^t \left(\lambda_n^2 + \frac{K_n(\tau)}{\beta}\right)d\tau}\left(g_n - \frac{1}{2\beta}\int_0^t \varphi_n(\tau) e^{\int_0^\tau \left(\lambda_n^2 + \frac{K_n(s)}{\beta}\right)ds} d\tau\right)^2 dt \leq$$

$$\leq 2\int_0^T e^{-2\int_0^t \left(\lambda_n^2 + \frac{K_n(\tau)}{\beta}\right)d\tau}\left(g_n^2 + \frac{1}{4\beta^2}\left(\int_0^t |\varphi_n(\tau)| e^{\int_0^\tau \left(\lambda_n^2 + \frac{K_n(s)}{\beta}\right)ds} d\tau\right)^2\right)dt.$$

З використанням результатів лем 1 та 2 одержимо, що

$$\int_0^T u_n^2(t)dt \le 2\int_0^T e^{-2\lambda_n^2 t}\left(g_n^2+\frac{\phi_n^2}{\beta^2}\left(\int_0^t e^{\left(\lambda_n^2+\frac{1}{\beta}\right)\tau}d\tau\right)^2\right)dt \le$$

$$\le 2\int_0^T e^{-2\lambda_n^2 t}\left(g_n^2+\frac{\phi_n^2 e^{2\left(\lambda_n^2+\frac{1}{\beta}\right)t}}{\beta^2\left(\lambda_n^2+\frac{1}{\beta}\right)^2}\right)dt \le \frac{g_n^2}{\lambda_n^2}+\frac{\phi_n^2 e^{\frac{2T}{\beta}}}{\beta\lambda_n^4}.$$

З врахуванням (27) отримуємо, що

$$\int_0^T p_n^2(t)dt = \frac{1}{4\beta^2}\int_0^T\left(2K_n(t)u_n(t)+\varphi_n(t)\right)^2 dt \le \frac{1}{2\beta^2}\int_0^T\left(4K_n^2(t)u_n^2(t)+\varphi_n^2(t)\right)dt \le$$

$$\le \frac{1}{2\beta^2}\left(4\left(\frac{g_n^2}{\lambda_n^2}+\frac{\phi_n^2 e^{\frac{2T}{\beta}}}{\beta\lambda_n^4}\right)+2\frac{\phi_n^2}{\lambda_n^2}\right)=\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{\phi_n^2+2g_n^2}{\lambda_n^2}+2\frac{\phi_n^2 e^{\frac{2T}{\beta}}}{\beta\lambda_n^4}\right)<\infty,$$

тобто одержане нами керування є дійсно допустимим.

Таким чином, з допомогою апроксимації початкової задачі скінченновимірною системою, ми отримали такі наближення для функцій $u(t,x)$ та $p(t,x)$, відповідно:

$$u^N(t,x)=\sum_{n=1}^N u_n(t)X_n(x), \tag{29}$$

$$p^N(t,x)=\sum_{n=1}^N p_n(t)X_n(x). \tag{30}$$

При цьому, як випливає з теореми, $\forall N \quad p^N(t,x)\in L_2(D)$.

Крім того, з останньої оцінки, отриманої в теоремі, випливає, що $\int_0^1\left(\mathrm{p}^{\mathrm{N}_1}(\mathrm{t},\mathrm{x})-\mathrm{p}^{\mathrm{N}_2}(\mathrm{t},\mathrm{x})\right)^2\mathrm{dx}\to 0$ рівномірно по t при $\mathrm{N}_1,\mathrm{N}_2\to\infty$, тобто існує гранична функція для послідовності наближень $\left\{p^N(t,x)\right\}_{N=1}^{\infty}$, яка дорівнює $\mathrm{p}(\mathrm{t},\mathrm{x})=\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\mathrm{p_n}(\mathrm{t})\mathrm{X_n}(\mathrm{x})$. А оскільки при $\mathrm{N}_1\le\mathrm{N}_2$

$$\left\|p^{N_1}(t,x)-p^{N_2}(t,x)\right\|_{L_2}^2=\sum_{n=N_1+1}^{N_2}\int_0^T p_n^2(t)dt \le \sum_{n=N_1+1}^{N_2}\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{\phi_n^2+2g_n^2}{\lambda_n^2}+2\frac{\phi_n^2 e^{\frac{2T}{\beta}}}{\beta\lambda_n^4}\right)\to 0$$

при $\mathrm{N}_1,\mathrm{N}_2\to\infty$, тоді в силу повноти простору $\mathrm{L}_2(\mathrm{D})$ гранична функція $p(t,x)$ належить цьому простору.

У [1] показано, що послідовність (29) фундаментальна у просторі $\mathrm{W}_2^{0,1}(\mathrm{D})$ та має своєю границею функцію (5), яка є є єдиним узагальненим розв'язком задачі (1)-(3). У просторі $W_2^{0,1}(D)$ будемо розглядати скалярний добуток

$$(u,v)_{W_2}=\int_0^T\int_0^1\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\frac{\partial v(t,x)}{\partial x}dx\,dt+\alpha\int_0^T u(t,1)v(t,1)dt,$$

породний норму, еквівалентну звичайній нормі цього простору. Тоді отримаємо таку оцінку відхилення скінченновимірного наближення $\mathrm{u}^{\mathrm{N}}(\mathrm{t},\mathrm{x})$ від розв'язку задачі (1)-(3) $u(t,x)$ за нормою простору $W_2^{0,1}(D)$:

$$\left\|u(t,x)-u^N(t,x)\right\|_{W_2}^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty}\int_0^T \lambda_n^2 u_n^2(t)dt \le \sum_{n=N+1}^{\infty}\left(g_n^2+\frac{\phi_n^2 e^{\frac{2T}{\beta}}}{\beta\lambda_n^2}\right).$$

Аналогічну оцінку отримаємо для відхилення скінченновимірного наближення функції $p(t,x)$ у просторі $\mathrm{L}_2(\mathrm{D})$:

$$\left\|p(t,x)-p^N(t,x)\right\|_{L_2}^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty}\int_0^T p_n^2(t)dt \le \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{\phi_n^2+2g_n^2}{\lambda_n^2}+2\frac{\phi_n^2 e^{\frac{2T}{\beta}}}{\beta\lambda_n^4}\right).$$

Крім того, оскільки функціонал (4) можна подати у вигляді $\mathrm{I}[\mathrm{p}]=\sum_{\mathrm{n=l}}^{\infty}\mathrm{I}_{\mathrm{n}}$, де I_n визначається формулою (12), оцінимо, як наближене значення цього функціонала $\mathrm{I}^{\mathrm{N}}[\mathrm{p}]=\sum_{\mathrm{n=l}}^{\mathrm{N}}\mathrm{I}_{\mathrm{n}}$ відхиляється від значення $I[p]$:

$$I[p]-I^N[p]=\sum_{n=N+1}^{\infty}\left([u_n(T)-\phi_n]^2+\beta\int_0^T p_n^2(t)dt+q_n\int_0^T u_n^2(t)dt\right)=$$

$$=\sum_{n=N+1}^{\infty}\left\{\left[e^{-\int_0^T\left(\lambda_n^2+\frac{K_n(\tau)}{\beta}\right)d\tau}\left(g_n-\frac{1}{2\beta}\int_0^T\varphi_n(\tau)e^{\int_0^\tau\left(\lambda_n^2+\frac{K_n(s)}{\beta}\right)ds}d\tau\right)-\phi_n\right]^2+\right.$$
$$\left.+\beta\int_0^T p_n^2(t)dt+q_n\int_0^T u_n^2(t)dt\right\}\le$$

$$\le\sum_{n=N+1}^{\infty}\left\{2\left[2e^{-2\lambda_n^2 T}\left(g_n^2+\frac{\phi_n^2}{\beta^2}\left(\int_0^T e^{\left(\lambda_n^2+\frac{1}{\beta}\right)\tau}d\tau\right)^2\right)+\phi_n^2\right]+\beta\int_0^T p_n^2(t)dt+q_n\int_0^T u_n^2(t)dt\right\}\le$$

$$\le\sum_{n=N+1}^{\infty}\left\{4g_n^2+\frac{4\phi_n^2 e^{\frac{2T}{\beta}}}{\beta^2\left(\lambda_n^2+\frac{1}{\beta}\right)^2}+2\phi_n^2+\frac{1}{\beta}\left(\frac{\phi_n^2+2g_n^2}{\lambda_n^2}+\frac{2\phi_n^2 e^{\frac{2T}{\beta}}}{\beta\ \lambda_n^4}\right)+q_n\left(\frac{g_n^2}{\lambda_n^2}+\frac{\phi_n^2 e^{\frac{2T}{\beta}}}{\beta\ \lambda_n^4}\right)\right\},$$

тобто

$$I[p]-I^N[p]\le\sum_{n=N+1}^{\infty}\left\{4g_n^2+2\phi_n^2+\frac{\phi_n^2+g_n^2(2+\beta q_n)}{\beta\lambda_n^2}+\frac{\phi_n^2 e^{\frac{2T}{\beta}}(6+\beta q_n)}{\beta^2\lambda_n^4}\right\}.$$

Таким чином, початкова задача була зведена до скінченної системи задач, які описуються звичайними диференціальними рівняннями, здобуті розв'язки цих задач та оцінки відхилення наближених розв'язків від точних.

ЛІТЕРАТУРА

1. Богун И.В., Егоров А.И. О решении одной задачи оптимального управления/ Праці П'ятої Української конференції з автоматичного управління "Автоматика-98":-Ч.1.- К.: Видавництво НТУУ «Київський політехнічний інститут», 1998.-С.29-38