УДК 539.3

НЕЛІНІЙНИЙ АНАЛІЗ ЧУТЛИВОСТІ СТИСНЕНОЇ АНІЗОТРОПНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ДО НЕДОСКОНАЛОСТЕЙ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ФОРМИ ТА ТОВЩИНИ

Головань О.О., к.ф.-м.н., ст. викладач, Грищак В.З., д.т.н., професор, Соколова М.Б., пошукач

Запорізький державний університет

У роботі в дусі досліджень [1,2] розв'язується задача про чутливість стисненої кругової анізотропної циліндричної оболонки змінної товщини з урахуванням геометричних недосконалостей форми серединної поверхні. Аналіз будується на основі енергетичного підходу з урахуванням геометричної нелінійності. Пропонується наближена асимптотична формула для обчислювання параметра критичних напружень у стисненій циліндричній оболонці з локалізованими дефектами товщини вздовж головних координат. Надається чисельний аналіз чутливості оболонки до дефектів при заданих параметрах характеру анізотропії матеріалу оболонки.

1.ВСТУП

Існує значна кількість наукових праць, присвячених чутливості стисненої кругової ізотропної циліндричної оболонки до початкових недосконалостей геометричної форми та товщини. У роботі [3] виведена аналітична формула, що дозволяє знаходити критичне навантаження, і показано, що його зниження пропорційне $a_l^{2/3}$, де a_l - амплітуда локалізованої недосконалості.

Аналіз чутливості кругової ізотропної циліндричної оболонки до періодичних дефектів товщини проводився в [4]. Досліджувалася лінійна розв'язувальна система диференціальних рівнянь, і за допомогою асимптотичного методу були виведені аналітичні вирази, що дозволяють оцінити зниження величини параметра критичного зусилля. Нелінійний аналіз впливу локалізованих дефектів геометричної форми та товщини на поведінку стисненої ізотропної оболонки на базі енергетичного підходу надається у роботі [5].

Проблема чутливості тонких анізотропних циліндричних оболонок до взаємодії дефектів геометричної форми та товщини залишається відкритою.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нелінійний функціонал повної енергії анізотропної циліндричної оболонки з недосконалостями товщини та геометричної форми під дією осьового стискувального навантаження береться у формі [6]

$$P[u,v,w,w_0]=\frac{\Pi}{R^3}, \tag{1}$$

де Π – повна енергія системи, яка описує приріст енергії при переході конструкції з основного стану у згинну конфігурацію при осьовому стискувальному навантаженні, має вигляд:

$$\Pi = P_2 + P_3 + P_4 . \tag{2}$$

Як показано в ряді досліджень [1,2], для аналізу критичних зусиль в ізотропних циліндричних оболонках можна обмежитись лише квадратичним та кубічним складовими функціоналу повної енергії досліджуваної системи. Таким чином, повний функціонал енергії береться у формі:

$$P_2 = \frac{1}{2}\iint\Big\{\frac{1}{R^2}[C_{11}(u'_x)^2 + C_{22}(\dot v_y + w)^2 +$$

$$+ C_{66}(\dot u_y + v'_x)^2 + 2C_{12}u'_x(\dot v_y + w) + 2C_{16}u'_x(\dot u_y + v'_x) + 2C_{26}(\dot v_y + w)(\dot u_y + v'_x)\Big] +$$

$$+ \frac{1}{R^3}[2K_{11}u'_x w''_{xx} + 2K_{12}u'_x \ddot w_{yy} + 3K_{16}u'_x \dot w'_{xy} + 2K_{22}(\dot v_y + w)\ddot w_{yy} + 2K_{12}(w + \dot v_y)w''_{xx} + 3K_{26}(\dot v_y + w)\dot w'_{xy} +$$

$$+ 3K_{66}(\dot u_y + v'_x)\dot w'_{xy} + 2K_{16}(\dot u_y + v'_x)w''_{xx} + 2K_{26}(\dot u_y + v'_x)\ddot w_{yy}] + \frac{1}{R^4}\Big[D_{11}(w''_{xx})^2 +$$

$$+ D_{22}(\ddot w_{yy})^2 + 2D_{66}(\dot w'_{xy})^2 + 2D_{12}\ddot w_{yy}w''_{xx} + 3D_{16}w''_{xx}\dot w'_{xy} + 3D_{26}\ddot w_{xx}\dot w'_{xy}] -$$

$$-\sigma h\frac{1}{R^2}\left((w'_x)^2+2w'_x w'_0\right)\Big\}dxdy, \tag{3}$$

$$P_3=\frac{1}{2}\iint\Big\{\frac{1}{R^3}\Big[C_{11}u'_x(w'_x)^2+2C_{66}\left(\dot u_y+v'_x\right)w'_x\dot w_y+C_{22}\left(\dot v_y+w\right)\left(\dot w_y\right)^2+C_{12}u'_x(\dot w_y)^2+2C_{16}u'_x w'_x\dot w_y+$$

$$+C_{12}\left(\dot v_y+w\right)(w'_x)^2+C_{16}\left(\dot u_y+v'_x\right)(w'_x)^2+2C_{26}\left(\dot v_y+w\right)w'_x\dot w_y+C_{26}\left(\dot u_y+v'_x\right)\left(\dot w_y\right)^2\Big]+\frac{1}{R^4}\Big[K_{11}w''_{xx}(w'_x)^2+$$

$$+K_{12}(\dot w_y)^2w''_{xx}+\frac{3}{2}K_{26}\left(\dot w_y\right)^2\dot w'_{xy}+3K_{66}w'_x\dot w_y\dot w'_{xy}+2K_{16}w'_x\dot w_y w''_{xx}+2K_{26}w'_x\dot w_y\ddot w_{yy}+$$

$$+K_{22}\left(\dot w_y\right)^2\ddot w_{yy}+K_{12}(w'_x)^2\ddot w_{yy}+\frac{3}{2}K_{16}(w'_x)^2\dot w'_{xy}\Big]\Big\}dxdy, \tag{4}$$

де $u(x,y)$, $v(x,y)$, $w(x,y)$ - переміщення в осьовому, круговому і нормальному напрямках відповідно, $w_0(x,y)$ - функція початкової недосконалості серединної поверхні, $h(x,y)$ - товщина оболонки, R - радіус оболонки, σ - осьове навантаження, x - безрозмірна координата в осьовому напрямку, y - безрозмірна координата в круговому напрямку, $[f]'_x$ - похідна за координатою x, $[\dot f]_y$ - похідна за координатою y, C_{ij}, D_{ij}, K_{ij} - параметри жорсткості для анізотропної оболонки [6].

Для виявлення основних залежностей параметра критичного зусилля від характеру анізотропії матеріалу в роботі розглядається випадок ортотропної циліндричної оболонки обертання. У цьому випадку коефіцієнти K_{ij} не враховуються у функціоналах (3)-(4).

Вибираємо функції переміщення в такому вигляді [2]:

$$u(x,y)=b_0\left(-\frac{1}{2m}\sin(2mx)+\frac{1}{m}\sin(mx)\cos(my)\right)\exp\left(-\frac{\mu^2}{2}\left(x^2+y^2\right)\right), \tag{5}$$

$$v(x,y)=b_0\left(-\frac{1}{m}\cos(mx)\sin(my)\right)\exp\left(-\frac{\mu^2}{2}\left(x^2+y^2\right)\right), \tag{6}$$

$$w(x,y)=b_0(\cos(2mx)+4\cos(mx)\cos(my))\exp\left(-\frac{\mu^2}{2}\left(x^2+y^2\right)\right), \tag{7}$$

де b_0 - параметр амплітуди переміщення, μ^2 - параметр, що впливає на характер локалізації початкових недосконалостей геометричної форми, $m=\sqrt{\frac{cR}{2h_0}}$ - ціле число півхвиль, коефіцієнт $c=\sqrt{3\left(1-\nu_2^2\right)}$.

Початкові недосконалості геометричної форми серединної поверхні мають вигляд

$$w_0(x,y)=k\,h_0(\cos(2mx)+4\cos(mx)\cos(my))\exp\left(-\frac{\mu^2}{2}\left(x^2+y^2\right)\right), \tag{8}$$

де k - амплітуда локалізованої недосконалості, h_0 - номінальна товщина оболонки.

Розглянемо випадок, коли товщина ортотропної циліндричної оболонки змінюється локалізовано як вздовж осьової, так і кругової координат:

$$h(x,y)=h_0\left(1-\varepsilon\exp\left(-\frac{N^2}{2}\left(x^2+y^2\right)\right)\right), \tag{9}$$

де ε - малий у порівнянні з одиницею параметр, що впливає на амплітудне значення дефекту товщини оболонки, N^2 - параметр, який впливає на характер локалізації товщини.

Характер змінювання дефектів товщини оболонки у формі (9) вздовж осьової координати $\tilde x=mx$ залежно від характеру локалізації показаний на рис 1.

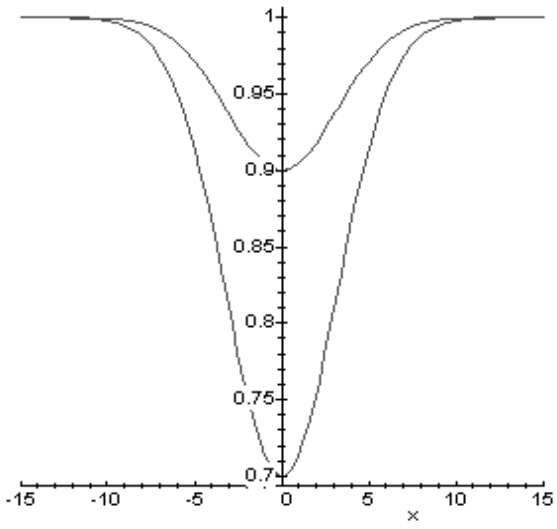


Рис.1 Характер змінювання товщини оболонки вздовж осьової координати

Використовуючи співвідношення (5)-(9), знайдемо усі доданки, що входять до функціонала повної енергії (1), зневажаючи при цьому членами більш високих порядків малості у порівнянні з параметрами ε і $\frac{\mu^2}{m^2}$.

3. ФОРМУЛА ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ КРИТИЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ ДЛЯ АНІЗОТРОПНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ

Використовуючи той факт, що деформування оболонки при осьовому стисканні має локалізований характер, інтегрування по поверхні оболонки можна замінити інтегруванням за змінними x і y в межах від $-\infty$ до $+\infty$. Це дозволяє одержати значення інтегралів в аналітичному вигляді. Після інтегрування вирази (3)-(4) мають такий вигляд:

$$P_2 = \frac{3\pi b_0^2 h_0 E_1}{2R^2\mu^2}\left[\tilde{C}_{11}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\varepsilon\frac{2}{2+\frac{N^2}{\mu^2}}+\frac{1}{16}\frac{\mu^2}{m^2}\right)+\tilde{C}_{22}\left(\frac{11}{12}-\frac{11}{12}\varepsilon\frac{2}{2+\frac{N^2}{\mu^2}}+\frac{1}{24}\frac{\mu^2}{m^2}\right)+\tilde{C}_{66}\frac{5}{48}\frac{\mu^2}{m^2}+\right.$$

$$+\tilde{C}_{12}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\varepsilon\frac{2}{2+\frac{N^2}{\mu^2}}\right)+\frac{m^4}{R^2}\left[\tilde{D}_{11}\left(4-12\varepsilon\frac{2}{2+\frac{N^2}{\mu^2}}+6\frac{\mu^2}{m^2}\right)+\tilde{D}_{22}\left(\frac{4}{3}-4\varepsilon\frac{2}{2+\frac{N^2}{\mu^2}}+4\frac{\mu^2}{m^2}\right)+\right. \qquad (10)$$

$$\left.\left.+\tilde{D}_{66}\left(\frac{8}{3}-8\varepsilon\frac{2}{2+\frac{N^2}{\mu^2}}+\frac{10}{3}\frac{\mu^2}{m^2}\right)+\tilde{D}_{12}\left(\frac{8}{3}-8\varepsilon\frac{2}{2+\frac{N^2}{\mu^2}}+\frac{10}{3}\frac{\mu^2}{m^2}\right)-\frac{m^2\sigma}{E_1}\left(2-2\varepsilon\frac{2}{2+\frac{N^2}{\mu^2}}+\frac{3}{4}\frac{\mu^2}{m^2}\right)\right]\right]$$

$$P_3=\frac{3\pi b_0^3 h_0 E_1}{2R^2\mu^2}\left[\frac{4}{3}\frac{m^2}{R}\left[\tilde{C}_{11}\left(\frac{2}{3}-\varepsilon\frac{2}{3+\frac{N^2}{\mu^2}}\right)+\tilde{C}_{22}\left(\frac{1}{3}-\varepsilon\frac{1}{3+\frac{N^2}{\mu^2}}+\frac{1}{3}\frac{\mu^2}{m^2}\right)+\tilde{C}_{66}\frac{1}{9}\frac{\mu^2}{m^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\tilde{C}_{12}\left(\frac{1}{3}-\varepsilon\frac{1}{3+\frac{N^2}{\mu^2}}+\frac{2}{9}\frac{\mu^2}{m^2}\right)\right]\right]-\frac{3\pi b_0 h_0 E_1}{2R^2\mu^2}\left[\frac{2m^2\sigma h_0 k}{E_1}\left(2-2\varepsilon\frac{2}{2+\frac{N^2}{\mu^2}}+\frac{3}{4}\frac{\mu^2}{m^2}\right)\right], \quad (11)$$

де $\tilde{C}_{ij}=\frac{C_{ij}}{h_0 E_1}$, $\tilde{D}_{ij}=\frac{D_{ij}}{h_0 E_1}$.

Оскільки $m^2\frac{\sigma}{E_1}=\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda_1}$ ($\lambda=\frac{\sigma}{E_1}$, $\lambda_1=\frac{h_0}{cR}$), повна енергія системи матиме вигляд:

$$P=\frac{3\pi}{2}\frac{h_0 E_1}{\mu^2 R^2}\left\{\left[\left(d_1+d_2\frac{\mu^2}{m^2}+d_3\varepsilon\right)-\frac{\lambda}{\lambda_1}\left(1+e\frac{\mu^2}{m^2}+e_1\varepsilon\right)\right]b_0^2+\frac{4}{3}\frac{m^2}{R}\left[l_1+l_2\frac{\mu^2}{m^2}+l_3\varepsilon\right]b_0^3-\right.$$

$$\left.-2\frac{\lambda}{\lambda_1}\left(1+e\frac{\mu^2}{m^2}+e_1\varepsilon\right)k h_0 b_0\right\}, \quad (12)$$

де $d_1=\left(\frac{1}{4}\tilde{C}_{11}+\frac{11}{12}\tilde{C}_{22}+\frac{1}{6}\tilde{C}_{12}\right)+\frac{m^4}{R^2}\left(4\tilde{D}_{11}+\frac{4}{3}\tilde{D}_{22}+\frac{8}{3}\tilde{D}_{12}+\frac{8}{3}\tilde{D}_{66}\right)$;

$d_2=\left(\frac{1}{16}\tilde{C}_{11}+\frac{1}{24}\tilde{C}_{22}+\frac{5}{48}\tilde{C}_{66}\right)+\frac{m^4}{R^2}\left(6\tilde{D}_{11}+4\tilde{D}_{22}+\frac{10}{3}\tilde{D}_{12}+\frac{10}{3}\tilde{D}_{66}\right)$;

$d_3=\left(-\frac{1}{4}\tilde{C}_{11}-\frac{11}{12}\tilde{C}_{22}-\frac{1}{6}\tilde{C}_{12}\right)\frac{2}{2+\frac{N^2}{\mu^2}}+\frac{m^4}{R^2}\left(-12\tilde{D}_{11}-4\tilde{D}_{22}-8\tilde{D}_{12}-8\tilde{D}_{66}\right)\frac{2}{2+\frac{N^2}{\mu^2}}$;

$l_1=\frac{2}{3}\tilde{C}_{11}+\frac{1}{3}\tilde{C}_{22}+\frac{1}{3}\tilde{C}_{12}$; $l_2=\frac{1}{3}\tilde{C}_{22}+\frac{2}{9}\tilde{C}_{12}+\frac{1}{9}\tilde{C}_{66}$; $l_3=\left(-2\tilde{C}_{11}-\tilde{C}_{22}-\tilde{C}_{12}\right)\frac{1}{3+\frac{N^2}{\mu^2}}$;

$$e=\frac{3}{8};\ e_1=-\frac{2}{2+\frac{N^2}{\mu^2}}.$$

Використовуючи умову критичної рівноваги системи $\delta^2 P=0$, визначаємо значення параметра b_0^* амплітуди прогину

$$b_0^*=-\frac{R\left[\left(d_1+d_2\frac{\mu^2}{m^2}+\varepsilon d_3\right)-\frac{\lambda}{\lambda_1}\left(1+e\frac{\mu^2}{m^2}+\varepsilon e_1\right)\right]}{4m^2\left(l_1+l_2\frac{\mu^2}{m^2}+\varepsilon l_3\right)}. \quad (13)$$

Підставляючи значення b_0^* із співвідношення (13) в умову рівноваги системи $\delta P=0$, одержимо вираз для визначення параметра критичного навантаження λ^*

$$\left[\left(d_1+d_2\frac{\mu^2}{m^2}+\varepsilon d_3\right)-\frac{\lambda^*}{\lambda_1}\left(1+e\frac{\mu^2}{m^2}+\varepsilon e_1\right)\right]^2=-4ck\frac{\lambda^*}{\lambda_1}\left(l_1+l_2\frac{\mu^2}{m^2}+\varepsilon l_3\right)\left(1+e\frac{\mu^2}{m^2}-\varepsilon e_1\right). \quad (14)$$

Спрощуючи вираз (14), одержимо остаточну асимптотичну формулу для визначення параметра критичного зусилля:

$$\left[\left(d_1+\left(d_2-d_1\,e\right)\frac{\mu^2}{m^2}+\varepsilon\left(d_3-d_1\,e_1\right)\right)-\frac{\lambda^*}{\lambda_1}\right]^2=-4\,c\,k\,\frac{\lambda^*}{\lambda_1}\left(l_1+\left(l_2-l_1\,e\right)\frac{\mu^2}{m^2}+\varepsilon\left(l_3-l_1\,e_1\right)\right). \qquad (15)$$

Залежність параметра критичного зусилля від амплітуди початкових недосконалостей геометричної форми та анізотропних властивостей матеріалу наведена на рис. 2.

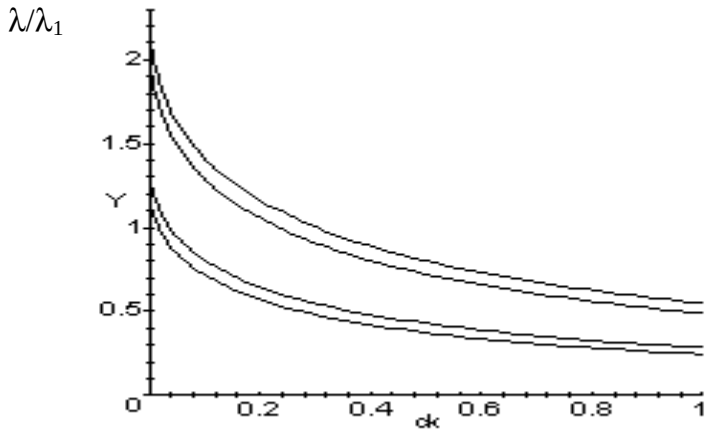


Рис.2. Залежність параметра критичного зусилля від характеру анізотропії матеріалу оболонки

4. ВИСНОВКИ

У роботі запропонована наближена аналітична формула для оцінки впливу змінної товщини анізотропної циліндричної оболонки та початкових недосконалостей геометричної форми на величину критичного навантаження. Чисельний аналіз (рис. 2) показав, що характер анізотропії матеріалу оболонки суттєво впливає на її чутливість до заданих дефектів.

Таким чином, наявність дефектів товщини оболонки може служити причиною зниження критичного навантаження, але вплив анізотропних властивостей матеріалу оболонки може бути основою для раціонального проектування реальних конструкцій.

ЛІТЕРАТУРА

1. Koiter W.T. “ The Influence of More or Less Localized Short-wave Imperfections on the Buckling of Circula Cylindrical Shells under Axial Compression (in a first approximation)”, Rep. WTHD 534, Delft, May 1974/ Комплексный анализ и его приложения.-М:Наука, 1978.-С.242-244.
2. Gristchak V.Z. “ Asymptotic Formula for the Buckling Stress of Axially Compressed Circula Cylindrical Shells with More or Less Localized Short-wave Imperfections”, Rep. WTHD 88, Delft, September 1976.
3. Jamal M., Midani M., Damil N., Potier-Ferry M. “ Influence of Localized Imperfections on the Buckling of Cylindrical Shells under Axial Compression ”, Int.J. Solids Structures, Vol. 36, 1999, 441-464.
4. Koiter W.T., Elishakoff Y.W., Starnes J.H. “Buckling of an Axially Compressed Cylindrical Shell of Variable Thickness”, Int.J. Solids Structures1994, №6.- P. 797-805.
5. Грищак В.З., Головань О.О. Асимптотична формула для визначення критичних напружень у стиснутій циліндричній оболонці змінної товщини // Вісник Запорізького державного університету. - 1999. -№2.- С.35-42.
6. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. - М.: Наука, 1974. - 448 с.