УДК 539.3

ЗАДАЧА ПРО СКРУТ ПІВПРОСТОРУ ПЕРІОДИЧНОЇ СТРУКТУРИ

Величко І.Г., асистент, Стєганцев Є.В., студент

Запорізький державний університет

У статті запропонований алгоритм розв'язання у квадратурах задачі про вісесиметричний скрут шаруватого півпростору періодичної структури. Задача розв'язується за допомогою інтегрального перетворення Ханкеля. Алгоритм заснований на побудованих тут функціях податливості і узагальнює відомий раніше метод на випадок нескінченної кількості шарів.

Під півпростором періодичної структури будемо розуміти невагомий шаруватий півпростір, що складається з нескінченного числа однакових груп по *n* плоскопаралельних зчеплених шарів. Ставиться задача про визначення напружень і переміщень у шарах цього півпростору, якщо на його поверхні прикладені сили, що викликають його вісесиметричний скрут.

Нумерацію шарів будемо проводити зверху вниз, починаючи з одиниці. Пружні характеристики (модуль зсуву G_k і коефіцієнт Пуассона ν_k) і товщини шарів h_k, номери яких відрізняються на число, кратне *n*, збігаються. Із кожним шаром зв'яжемо місцеву циліндричну систему координат з осями OZ_k, які лежать на одній прямій і направлені в глибину шару. Початки всіх систем координат лежать на верхніх межах відповідних шарів.

У роботі [1] запропонований алгоритм розв'язування у квадратурах задачі про знаходження напружень і переміщень точок багатошарової основи, якщо на його поверхні відомі напруження (перша основна задача) або переміщення (друга основна задача). Метод розв'язування цієї задачі заснований на побудованих у ній функціях податливості для багатошарової основи. Однак цей метод може застосовуватися лише для основи зі скінченним числом шарів, тому що для обчислення функцій податливості використовуються рекурентні співвідношення, і для початку розрахунку потрібно знати функції податливості нижнього шару, тобто півпростору. У даній статті запропонований спосіб обчислення однієї з функцій податливості (а саме C_τ) для півпростору періодичної структури, що дає можливість розв'язати у квадратурах першу і другу основні межові задачі для деякого класу поверхневих навантажень.

Задача про визначення напружено-деформованого стану ізотропного шару, що скручується дотичними зусиллями, які прикладені до межових площин $z=0$ і $z=h$ $(0\le h<\infty)$ і залежать лише від радіальної координати r, зводиться до розв'язання диференціального рівняння [2]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0\ . \qquad (1)$$

Відмінні від нуля компоненти тензора напружень і вектора переміщення пов'язані із шуканою функцією $u(r,z)$ співвідношеннями

$$u_\varphi=u,\quad \tau_{\varphi r}=G\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r}\right),\quad \tau_{\varphi z}=G\frac{\partial u}{\partial z}\ . \qquad (2)$$

Для розв'язання (1) використовуємо перетворення Ханкеля

$$\overline{f}(p)=\int_0^\infty rf(r)J_1(pr)dr\ . \qquad (3)$$

Зворотним до нього буде $f(r)=\int_0^\infty p\overline{f}(p)J_1(pr)dp$.

Помножимо рівняння (1) на $rJ_1(pr)$ і проінтегруємо по r від 0 до ∞. Використовуючи властивості

перетворення Ханкеля, одержимо звичайне диференціальне рівняння для визначення трансформанти $\bar{u}(p,z)$:

$$d^2\bar{u}/dz^2 - p^2\bar{u} = 0\ . \qquad (4)$$

Загальний розв'язок рівняння (4) запишеться у вигляді

$$\bar{u}(p,z) = D_1(p)chpz + D_2(p)shpz\ .$$

Для кожного шару введемо допоміжні функції, зв'язані з трансформантами напружень і переміщень на верхній межі шару

$$\tilde{\delta} = \frac{1}{p}\overline{\tau_{\varphi z}}(p,0) \text{ і } \tilde{\gamma} = G\overline{u_\varphi}(p,0).$$

Виразимо трансформанту напруження $\overline{\tau_{\varphi z}}$ через функції D_1 і D_2:

$$\frac{1}{G}\overline{\tau_{\varphi z}} = \frac{\partial}{\partial z}\bar{u} = \frac{\partial}{\partial z}(D_1 chpz + D_2 shpz) = D_1 pshpz + D_2 pchpz\ .$$

Звідси маємо: $D_1 = \bar{u}(p,0) = \frac{\tilde{\gamma}}{G}$, $D_2 = \frac{1}{pG}\overline{\tau_{\varphi z}}(p,0) = \frac{\tilde{\delta}}{G}$.

Трансформанти напружень і переміщень у шарі виразимо через допоміжні функції шару

$$\overline{u_\varphi} = \frac{1}{G}(\tilde{\gamma}chpz + \tilde{\delta}shpz)\ ,\ \overline{\tau_{\varphi z}} = p(\tilde{\gamma}shpz + \tilde{\delta}chpz). \qquad (5)$$

З умов контакту сусідніх шарів (вони вважаються зчепленими)

$$u_{\varphi_k}(r,h_k) = u_{\varphi_{k+1}}(r,0)\ ,\ \tau_{\varphi z_k}(r,h_k) = \tau_{\varphi z_{k+1}}(r,0)$$

випливає, що

$$\overline{u_{\varphi\,k}}(p,h_k) = \overline{u_{\varphi\,k+1}}(p,0)\ ,\ \overline{\tau_{\varphi z\,k}}(p,h_k) = \overline{\tau_{\varphi z\,k+1}}(p,0). \qquad (6)$$

Зі співвідношень (6) одержуємо рекурентні співвідношення між допоміжними функціями сусідніх шарів

$$\tilde{\gamma}_{k+1}(p) = \frac{G_{k+1}}{G_k}(\tilde{\gamma}_k chph_k + \tilde{\delta}_k shph_k),\ \tilde{\delta}_{k+1}(p) = \tilde{\gamma}_k shph_k + \tilde{\delta}_k chph_k\ . \qquad (7)$$

Якщо розглядати багатошаровий пакет із будь-яким скінченним числом шарів, що лежить на півпросторі, то, як показано в роботі [1], допоміжні функції шару не є незалежними, а зв'язані між собою співвідношенням

$$\tilde{\gamma}_k = -C_{\tau k}(p)\tilde{\delta}_k\ . \qquad (8)$$

Функції $C_{\tau k}$, які входять у рівність (8), називаються функціями податливості. Оскільки півпростір періодичної структури можна як завгодно добре апроксимувати багатошаровою основою, то логічно припустити, що співвідношення (8) залишається вірним і для півпростору розглянутого типу.

Описаний у роботі [1] рекурентний алгоритм визначення функцій податливості у випадку нескінченного числа шарів не може бути застосований, тому що немає півпростору, на якому лежить багатошаровий пакет. Тому одержимо формули для знаходження функцій $C_{\tau k}$. Для цього обчислимо $\tilde{\gamma}_{k+1}$ двома способами: з одного боку

$$\tilde{\gamma}_{k+1} = \frac{G_{k+1}}{G_k}\left(-C\tau_k \tilde{\delta}_k C_k + \tilde{\delta}_k S_k\right) = \frac{G_{k+1}}{G_k}\tilde{\delta}_k\left(-C\tau_k C_k + S_k\right),$$

а з іншого

$$\tilde{\gamma}_{k+1} = -C\tau_{k+1}\tilde{\delta}_{k+1} = -C\tau_{k+1}\left(C_k\tilde{\delta}_k + S_k\tilde{\gamma}_k\right) = -C\tau_{k+1}\left(C_k\tilde{\delta}_k - S_k C\tau_k\tilde{\delta}_k\right).$$

Тут $C_k = ch(ph_k),\ S_k = sh(ph_k).$

Прирівнюючи, після скорочення на $\tilde{\delta}_k$, одержимо

$$\frac{G_{k+1}}{G_k}\left(-C\tau_k C_k + S_k\right) = -C\tau_{k+1}\left(C_k - S_k C\tau_k\right),$$

звідки

$$C\tau_k = \frac{C\tau_{k+1}C_k\ G_k/G_{k+1} + S_k}{C\tau_{k+1}S_k\ G_k/G_{k+1} + C_k}\ . \qquad (9)$$

Уведемо позначення $C_{\tau k} = r_k / l_k$. Тоді співвідношення (9) можна переписати у вигляді

$$\begin{pmatrix} r_k \\ l_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_k\ G_k/G_{k+1} & S_k \\ S_k\ G_k/G_{k+1} & C_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_{k+1} \\ l_{k+1} \end{pmatrix}$$

або, більш коротко

$$R_k = N_k R_{k+1}, \qquad (10)$$

де $$R_k = \begin{pmatrix} r_k \\ l_k \end{pmatrix},\quad N_k = \begin{pmatrix} C_k\ G_k/G_{k+1} & S_k \\ S_k\ G_k/G_{k+1} & C_k \end{pmatrix}.$$

Помітимо, що $\det N_k = G_k / G_{k+1}$. Використовуючи формулу (10), одержимо

$$R_1 = N_1 R_2 = N_1 N_2 R_3 = ... = N_1 N_2 ... N_n R_{n+1}. \qquad (11)$$

Позначимо $\tilde{N} = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix} = N_1 N_2 ... N_n$, тоді (11) набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ l_{n+1} \end{pmatrix}, \text{ або } \frac{r_1}{s_1} = \frac{n_{11}r_{n+1} + n_{12}l_{n+1}}{n_{21}r_{n+1} + n_{22}l_{n+1}}.$$

Якщо від вихідного півпростору відокремити одну групу шарів, одержимо вихідний півпростір із тими ж властивостями. А це значить, що функції податливості шарів, номери яких відрізняються на число, кратне *n*, збігаються. Поділимо чисельник і знаменник правої частини останньої рівності на l_{n+1} і, з огляду на те, що $r_{n+1} / l_{n+1} = C_{\tau n+1} = C_{\tau 1}$, одержимо квадратне рівняння для визначення функції $C_{\tau 1}$:

$$C_{\tau 1}\left(n_{21}C_{\tau 1} + n_{22}\right) = n_{11}C_{\tau 1} + n_{12}.$$

Визначник матриці $\tilde{N}$ дорівнює одиниці. З урахуванням цього одержуємо

$$C_{\tau 1} = \frac{n_{11} - n_{22} + \sqrt{(n_{11} + n_{22})^2 - 4}}{2n_{21}}\ . \qquad (12)$$

Для визначення інших функцій $C_{\tau k}$ можна скористатися формулою (9).

Переміщення і напруження в кожному шарі будуть залежати від однієї допоміжної функції відповідного шару – функції $\tilde{\delta}_k$ і від функції податливості $C_{\tau k}$, алгоритм одержання якої зазначений вище. Функцію $\tilde{\delta}_k$ можна обчислити за рекурентними формулами

$$\tilde{\delta}_{k+1} = \tilde{\delta}_k \left(chph_k - C_{\tau k} shph_k \right) \tag{13}$$

починаючи з

$$\tilde{\delta}_1 = 2\pi \int_0^\infty r\tau_{z\varphi 1}(r,0) J_1(pr) dr . \tag{14}$$

Підводячи підсумок, наведемо алгоритм розв'язання задачі про скрут півпростору періодичної структури:

1. Визначаємо функції податливості $C_{\tau\, n+1} = C_{\tau 1}$ за формулами (12), а потім інші функції $C_{\tau\, n}$, $C_{\tau\, n-1}$, ..., $C_{\tau\, 2}$ за формулами (9).

2. Із межових умов задачі визначаємо допоміжну функцію $\tilde{\delta}_1(p)$ за формулою (14) для першої основної межової задачі або використовуючи (8) та (14) для другої основної межової задачі.

3. За допомогою рекурентних співвідношень (13) знаходимо функцію $\tilde{\delta}_k(p)$ і, використовуючи (8), функцію $\tilde{\gamma}_k(p)$ для шару, у якому необхідно визначити напруження і переміщення.

4.За допомогою знайдених допоміжних функцій $\tilde{\delta}_k(p)$ і $\tilde{\gamma}_k(p)$ визначаємо трансформанти напружень і переміщень у *k*-му шарі за формулами (5).

5.Застосовуючи обернене перетворення Ханкеля, знаходимо шукані напруження і переміщення у *k*-му шарі півпростору періодичної структури.

Як приклад розглянемо випадок, коли півпростір складений із груп по два шари.

Тоді $\tilde{N} = \begin{pmatrix} \lambda C_1 & S_1 \\ \lambda S_1 & C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu C_2 & S_2 \\ \mu S_2 & C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1C_2 + \mu S_1S_2 & \lambda C_1S_2 + S_1C_2 \\ S_1C_2 + \mu C_1S_2 & \lambda S_1S_2 + C_1C_2 \end{pmatrix},$

$$C_{\tau 1} = \frac{S_1S_2(\mu - \lambda) + \sqrt{(2C_1C_2 + S_1S_2(\lambda + \mu))^2 - 4}}{2(S_1C_2 + \mu C_1S_2)},$$

$$C_{\tau 2} = \frac{S_1S_2(\lambda - \mu) + \sqrt{(2C_1C_2 + S_1S_2(\lambda + \mu))^2 - 4}}{2(S_1C_2 + \lambda C_1S_2)}.$$

Тут $\lambda = G_1/G_2$, $\mu = 1/\lambda = G_2/G_1$.

Наведемо приклад розрахунку. Нехай на верхній межі шаруватого періодичного півпростору, що складений з груп по два шари, відомі напруження $\sigma_{z1}(r,\varphi) = 0$, $\tau_{z\varphi 1}(r,\varphi) = r\delta(r-a)$.

Нижче наведений графік величини переміщень $-U_{\varphi 1}(r,h_1)\cdot 10^5 [см]$ для багатошарової основи, яка складається з двох шарів, зчеплених із жорстким півпростором (n = 2) і для відповідного шаруватого півпростору періодичної структури (n = infinity). Розрахунок проводився при таких значеннях параметрів: $h_1 = 1$ *см*, $h_2 = 2$ *см*, $G_1 = 3\cdot 10^5$ *кГ/см*, $G_2 = 2\cdot 10^5$ *кГ/см*, $a = 3$ *см*.

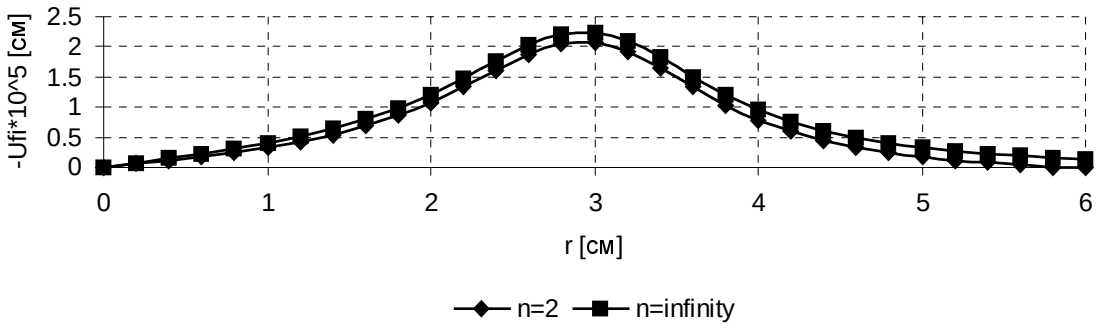


Рис. 1. Графік залежності переміщень U_φ точок нижньої межі верхнього шару від відстані r до осі для двох типів основ при однаковому навантаженні.

Як і очікувалось, для двошарової основи переміщення $U_{\varphi 1}(r, h_1)$ по модулю дещо менші, ніж для шаруватого півпростору.

ЛІТЕРАТУРА

1. Приварников А.К. Ламзюк В.Д. Упругие многослойные основания. Ч.1. // Днепропетровск, 1985.-162с. Деп. в ВИНИТИ 23.12.85, №8789-В.
2. Эйшинский А.М. Кручение анизотропных и неоднородных тел. – Днепропетровск: Полиграфист, 1999. – 389с.