УДК 539.3

ВИЗНАЧЕННЯ ПОЛІВ НАПРУЖЕНЬ І ПЕРЕМІЩЕНЬ В ТОВСТОСТІННИХ НЕОДНОРІДНИХ ЦИЛІНДРАХ

Василенко А.Т., д.ф-м.н., професор

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка Національної Академії наук України

ВИХІДНІ РІВНЯННЯ

Визначення напружено-деформованого стану неоднорідних тіл із анізотропних матеріалів є актуальною задачею механіки елементів композитних конструкцій. Неоднорідність пружних характеристик в поєднанні з властивою для композитних матеріалів анізотропією значно ускладнюють розв'язання конкретних задач. У багатьох випадках напружений стан пружних тіл у вигляді неоднорідних оболонок визначався з використанням класичної і уточнених моделей [1,2]. Для розв'язання задач для товстостінних елементів потрібно виходити із співвідношень просторової задачі теорії пружності анізотропного неоднорідного тіла [3,4]. Враховуючи складність таких задач в загальному випадку анізотропії і неоднорідності матеріалу доцільно проводити дослідження для певних класів пружних тіл, наприклад, циліндрів, які є поширеними конструктивними елементами. Розв'язанню задач про напружений стан товстостінних анізотропних циліндрів приділялась значна увага. Але при цьому головним чином вивчався випадок неоднорідності механічних властивостей в радіальному напрямку для різних типів анізотропії і граничних умов [5]. У статті [6] розглянута задача про напружений стан осесиметрично нагрітого анізотропного циліндра з врахуванням залежності термомеханічних характеристик від температури.

У цій роботі запропоновано підхід до розв'язання в просторовій постановці класу задач про напружений стан порожнистих циліндричних тіл із неоднорідних у коловому напрямку ортотропних композитів. Циліндри, які розглядаються, піддані дії постійних в осьовому напрямку навантажень і мають таку довжину, що дає можливість розглядати задачу в плоскій постановці в координатах r,θ, де r - радіус, θ - полярний кут.

За вихідні приймаються:

рівняння рівноваги

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{r}(\sigma_r-\sigma_\theta)=0,\quad \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{2}{r}\tau_{r\theta}=0\ ; \tag{1}$$

вирази для деформацій через переміщення

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u_r}{\partial r},\quad \varepsilon_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r},\quad \varepsilon_{r\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}\ ; \tag{2}$$

співвідношення узагальненого закону Гука

$$\varepsilon_r=a_{11}\sigma_r+a_{12}\sigma_\theta,\quad \varepsilon_\theta=a_{12}\sigma_r+a_{22}\sigma_\theta,\quad \varepsilon_{r\theta}=a_{44}\tau_{r\theta}\ . \tag{3}$$

Тут $\sigma_r,\sigma_\theta,\tau_{r\theta}$ - напруження, $\varepsilon_r,\varepsilon_\theta,\varepsilon_{r\theta}$ - деформації, u_r,u_θ - переміщення, $a_{11},a_{12},a_{22},a_{44}$ - пружні характеристики ортотропного матеріалу, які є функціями координати θ. Для напружень σ_θ маємо вираз

$$\sigma_\theta=-\frac{a_{12}}{a_{22}}\sigma_r+\frac{1}{a_{22}r}\left(u_r+\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right). \tag{4}$$

На обмежуючих поверхнях $r=r_0$, $r=r_1$ можуть бути задані довільні граничні умови.

РОЗВ'ЯЗУВАЛЬНА СИСТЕМА РІВНЯНЬ

За основні невідомі вибираються величини, через які формулюються граничні умови при $r=r_0$, $r=r_1$, а саме напруження $\sigma_r,\tau_{r\theta}$ і переміщення u_r,u_θ. Із співвідношень (1) - (4) одержуємо для їх визначення розв'язувальну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}=-\frac{1}{r}\left(1+\frac{a_{12}}{a_{22}}\right)\sigma_r-\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{a_{22}r^2}u_r+\frac{1}{a_{22}r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta},$$

$$\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}=\frac{a_{12}}{a_{22}}\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_r}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{a_{12}}{a_{22}}\right)\sigma_r-\frac{2}{r}\tau_{r\theta}-\frac{1}{a_{22}r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{a_{22}}\right)u_r-$$

$$-\frac{1}{a_{22}r^2}\frac{\partial^2u_\theta}{\partial\theta^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{a_{22}}\right)\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\ , \qquad (5)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial\theta}=\left(a_{11}-\frac{a_{12}^2}{a_{22}}\right)\sigma_r+\frac{1}{r}\frac{a_{12}}{a_{22}}u_r+\frac{a_{12}}{a_{22}}\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta},$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial r}=a_{44}\tau_{r\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{1}{r}u_\theta,\quad r_0\le r\le r_1,\quad 0\le\theta\le 2\pi.$$

Розв'язок системи рівнянь (5) шукаємо у вигляді відрізків рядів Фур'є

$$\sigma_r(r,\theta)=\sum_{k=0}^{M}\sigma_k(r)\cos k\theta,\quad \tau_{r\theta}(r,\theta)=\sum_{k=1}^{M}\tau_k(r)\sin k\theta\ ,$$

$$u_r(r,\theta)=\sum_{k=0}^{M}w_k(r)\cos k\theta,\quad u_\theta(r,\theta)=\sum_{k=1}^{M}v_k(r)\sin k\theta\,. \qquad (6)$$

Механічні параметри, що входять в коефіцієнти системи (5), представимо в подібному вигляді

$$\frac{a_{12}}{a_{22}}=\sum_{i=0}^{N}x_i\cos i\theta,\quad \frac{1}{a_{22}}=\sum_{i=0}^{N}y_i\cos i\theta\ ,$$

$$a_{11}-\frac{a_{12}^2}{a_{22}}=\sum_{i=0}^{N}m_i\cos i\theta,\quad a_{44}=\sum_{i=0}^{N}n_i\cos i\theta,\quad (N\le M)\ . \qquad (7)$$

Підставляємо (6), (7) у рівняння (5) і, здійснюючи певні перетворення, прирівнюємо до нуля величини при $\cos k\theta$ і $\sin k\theta$. Тим самим відокремлюємо змінну θ, у результаті чого одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь порядку $2+4M$ зі змінними коефіцієнтами

$$\frac{d\sigma_0}{dr}=\frac{1}{r}(x_0-1)\sigma_0+\frac{y_0}{r^2}w_0-\frac{1}{2r}\sum_{i=1}^{N}x_i\sigma_i+\frac{1}{2r^2}\sum_{i=1}^{N}y_iw_i\ ,$$

$$\frac{dw_0}{dr}=m_0\sigma_0+\frac{x_0}{r}w_0+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\sigma_i+\frac{x_i}{r}w_i+\frac{ix_i}{r}v_i\right),$$

$$\frac{d\sigma_k}{dr}=-\frac{1}{r}\sigma_k-\frac{k}{r}\tau_k-\frac{1}{2r}\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M}p_{ij}\left(x_i\sigma_j-\frac{y_i}{r}w_j\right)+\frac{1}{2r^2}\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{M}jp_{ij}y_iv_j\ ,$$

$$\frac{d\tau_k}{dr}=-\frac{2}{r}\tau_k-\frac{1}{2r}\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{M}jz_{ij}\left(x_i\sigma_j-\frac{y_i}{r}w_j-j\frac{y_i}{r}v_j\right)-\frac{1}{2r}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{M}iq_{ij}\left(x_i\sigma_j-\frac{y_j}{r}w_j\right)+$$

$$+\frac{1}{2r^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}ijq_{ij}y_iv_j\ , \qquad (8)$$

$$\frac{dw_k}{dr}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{M}p_{ij}\left(-m_i\sigma_j+\frac{x_i}{r}w_j+j\frac{m_i}{r}v_j\right),$$

$$\frac{dv_k}{dr}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{M}z_{ij}n_i\tau_j+\frac{k}{r}w_k+\frac{1}{r}v_k, \qquad (r_0\le r\le r_1,\quad k=1,2,\dots,M).$$

Величини p_{ij}, z_{ij}, q_{ij} визначаються так:

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & |j-i|=k,\\ 0, & |j-i|\ne k\end{cases},\quad z_{ij}=\begin{cases}1, & j-i=k,\quad i+j=k,\\ -1, & i-j=k,\\ 0, & |i-j|\ne k,\quad i+j\ne k\end{cases},\quad q_{ij}=\begin{cases}1, & i-j=k,\quad i+j=k,\\ -1, & j-i=k,\\ 0, & |i-j|\ne k,\quad i+j\ne k\end{cases}$$

Напруження σ_θ знаходиться через амплітудні значення розв'язувальних функцій

$$\sigma_\theta(r,\theta)=-\sum_{i=0}^{N}x_i\cos i\theta\sum_{k=0}^{M}\sigma_k\cos k\theta+\frac{1}{r}\sum_{i=0}^{N}y_i\cos i\theta\sum_{k=0}^{M}(w_k+kv_k)\cos k\theta.$$

До рівнянь (8) приєднуються граничні умови, які відображають спосіб навантаження чи закріплення поверхонь $r=r_0$, $r=r_1$. При формулюванні граничних умов слід використати вирази (6).

Крайові задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь (8) розв'язуються стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації, який дозволяє одержувати результати з високою точністю. При цьому важливим питанням є вибір числа членів $M+1$ у відрізках рядів (6). Значення M залежить від значення N і визначається степенем неоднорідності матеріалу і змінюваністю навантаження. Значення M можна вибирати на основі порівняння результатів розв'язання задач при різних його значеннях, тобто на основі оцінки вкладу кожної складової з номером k в сумарний розв'язок задачі.

3. НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН НЕОДНОРІДНОГО В КОЛОВОМУ НАПРЯМКУ ОРТОТРОПНОГО ЦИЛІНДРА

Розглянемо задачу про визначення напружень і переміщень в порожнистому циліндрі із композитного матеріалу, відносний об'ємний вміст μ армуючих елементів якого є функція кута θ

$$\mu(\theta)=\frac{\mu_0+\mu_1}{2}+\frac{\mu_0-\mu_1}{2}\cos 2\theta,\qquad \mu_0=\mu(0),\quad \mu_1=\mu(\pi/2). \tag{9}$$

Для обчислення пружних параметрів використовуються відомі співвідношення механіки композитних матеріалів [7-9]. Ефективні характеристики композиту: модулі пружності E_r, E_θ, модуль зсуву $G_{r\theta}$, коефіцієнт Пуасона $\nu_{\theta r}$ визначаються через відповідні величини армуючих елементів E_f, G_f, ν_f і матриці E_m, G_m, ν_m

$$E_r=\frac{E_m(1+2\mu)}{1-\mu},\qquad E_\theta=E_f\mu+E_m(1-\mu),$$

$$G_{r\theta}=G_m\frac{G_f+G_m+(G_f-G_m)}{G_f+G_m-(G_f-G_m)},\quad \nu_{\theta r}=\nu_f\mu+\nu_m(1-\mu).$$

При обчисленнях прийнято значення

$$E_f=E_0;\ E_m=0{,}025E_0;\ G_f=0{,}4E_0;\ G_m=0{,}0096E_0;$$

$\nu_f=0{,}25;\ \nu_m=0{,}2959$. Ці характеристики відповідають вуглеепоксидному композиту. При розкладі величин x, y, m, n в ряди Фур'є обмежувались значенням $N=8$. На внутрішню поверхню циліндра діє тиск, який змінюється за законом $\sigma_r(r_0)=q_0\cos\theta+q_1\cos 3\theta+q_2\cos 5\theta.$ Зовнішня поверхня

$r = r_1$ жорстко закріплена від переміщень в коловому напрямку $u_\theta(r_1, \theta) = 0.$ При розв'язанні задач в рядах (6) залишались члени з номерами k до 9 включно. При цьому у всіх варіантах приймалось, що $\mu_0 + \mu_1 = 1$, тобто сумарний відносний об'єм армуючих елементів залишався незмінним.

Розрахунки виконано для різних значень μ_0 і двох варіантів навантаження: 1) $q_0 = -0{,}5P;\ q_1 = 0{,}3P;\ q_2 = -0{,}2P;$ 2) $q_0 = -0{,}6P;\ q_1 = 0{,}3P;\ q_2 = -0{,}1P.$ В обох варіантах навантаження має однакове значення при $\theta = 0$, рівне $0{,}4P.$ Ці варіанти відрізняються інтегральною характеристикою $I = \int_0^{\pi/2} \sigma(r_0, \theta) d\theta.$ Відмітимо, що максимальне значення $\sigma_r(r_0, \theta)$ на інтервалі $0 \le \theta \le \pi/2$ досягається в різних точках. Для першого варіанта це $\theta = \theta_1 = 1{,}11795,\ \sigma_r(r_0, \theta_1) = 0{,}71108P$, для другого- $\theta = \theta_2 = 1{,}02627,\ \sigma_r(r_0, \theta_2) = 0{,}65090P.$ Крім цього для другого варіанту на інтервалі $0 \le \theta \le 0{,}4,\ \sigma_r(r_0, \theta)$ практично є постійною величиною. Обчислення виконані для $r_0 = 0{,}5l,\ r_1 = l$, де l =1 - одиниця довжини. У таблицях 1-5 наведено значення радіальних переміщень, колових і радіальних напружень. З наведених даних витікає, що характер розподілу і величина вказаних функцій суттєво залежить від навантаження і неоднорідності пружних сталих. Переміщення і напруження для першого варіанту навантаження менші, ніж для другого. Це пояснюється законами зміни навантажень в колі перерізу $\theta = 0.$ Для малих значень μ_0 спостерігається значна змінюваність переміщень по тій частині товщини, яка включає навантажену поверхню циліндра. Це зумовлено як значною відносною товщиною, так і низькою жорсткістю поперечного зсуву і обтиску, викликаною малим вмістом армуючих елементів. При наближенні μ_0 до одиниці переміщення по товщині змінюються не так значно. Дані таблиці 3 показують, що для всіх розглянутих значень μ_0, найбільші величини колових напружень досягаються на навантаженій поверхні. Із збільшенням μ_0 спостерігається немонотонна зміна $\sigma_\theta.$

Таблиця 1 - Значення переміщень $u_r / PE_0^{-1}l$ в перерізі $\theta = 0$ для першого варіанту навантаження

$\frac{r - r_0}{r_1 - r_0}$	$\mu_0 = 0{,}1$	$\mu_0 = 0{,}2$	$\mu_0 = 0{,}5$	$\mu_0 = 0{,}8$	$\mu_0 = 0{,}9$
0	3,9862	3,2277	1,5610	0,8330	0,8314
0,1	3,3313	2,7144	1,3732	0,8021	0,8355
0,2	2,7654	2,3195	1,2594	0,7798	0,8062
0,3	2,3426	2,0330	1,1897	0,7634	0,7613
0,4	2,0320	1,8253	1,1474	0,7511	0,7082
0,5	1,8014	1,6728	1,1199	0,7390	0,6553
0,6	1,6282	1,5548	1,0994	0,7360	0,6078
0,7	1,4972	1,4654	1,0838	0,7301	0,5686
0,8	1,4026	1,3964	1,0686	0,7237	0,5392
0,9	1,3396	1,3514	1,0534	0,7164	0,5195
1,0	1,3053	1,3229	1,0395	0,7096	0,5090

Таблиця 2 - Значення переміщень $u_r / PE_0^{-1}l$ в перерізі $\theta = 0$ для другого варіанта навантаження

$\frac{r - r_0}{r_1 - r_0}$	$\mu_0 = 0{,}1$	$\mu_0 = 0{,}2$	$\mu_0 = 0{,}5$	$\mu_0 = 0{,}8$	$\mu_0 = 0{,}9$
0	4,4919	3,6703	1,8859	1,0874	1,0624
0,1	3,7933	3,1445	1,6884	1,0510	1,0637
0,2	3,2202	2,7364	1,5632	1,0261	1,0372
0,3	2,7725	2,3904	1,4815	1,0066	0,9947
0,4	2,4278	2,1852	1,4253	0,9940	0,9460
0,5	2,1605	2,0057	1,3830	0,9845	0,8973
0,6	1,9544	1,8627	1,3500	0,9763	0,8531
0,7	1,7970	1,7515	1,3228	0,9684	0,8160
0,8	1,6811	1,6686	1,2990	0,9596	0,7870
0,9	1,6048	1,6101	1,2792	0,9495	0,7664
1,0	1,5639	1,5760	1,2601	0,9380	0,7533

Таблиця 3 - Значення колових напружень σ_θ / P при $\theta = 0$.

r	$\mu_0 = 0{,}1$	$\mu_0 = 0{,}2$	$\mu_0 = 0{,}5$	$\mu_0 = 0{,}8$	$\mu_0 = 0{,}9$
		$q_0 = 0{,}5P,$	$q_1 = -0{,}3P,$	$q_2 = 0{,}2P$	
r_0	0,2912	0,6104	1,2814	1,4580	0,7013
r_1	0,1598	0,2910	0,5328	0,5713	0,4594
		$q_0 = 0{,}6P,$	$q_1 = -0{,}3P,$	$q_2 = 0{,}1P$	
r_0	0,5582	0,9970	1,7904	1,8249	0,9827
r_1	0,1915	0,3467	0,6458	0,7551	0,6797

Таблиця 4 - Значення напружень - σ_r / P в перерізі $\theta = 0$ для першого варіанта навантаження

$\frac{r - r_0}{r_1 - r_0}$	$\mu_0 = 0{,}1$	$\mu_0 = 0{,}2$	$\mu_0 = 0{,}5$	$\mu_0 = 0{,}8$	$\mu_0 = 0{,}9$
0	0,4000	0,4000	0,4000	0,4000	0,4000
0,1	0,3498	0, 3164	0,2277	0,0931	0,0329
0,2	0,2662	0,2254	0,1208	-0,0871	-0,2478
0,3	0,1928	0,1575	0,0586	-0,1874	-0,4410
0,4	0,1416	0,1120	0,0249	-0,2313	-0,5428
0,5	0,1051	0,0813	0,0081	-0,2340	-0,5591
0,6	0,0778	0,0594	0,0009	-0,2076	-0,5052
0,7	0,0557	0,0424	0,0238	-0,1626	-0,4015
0,8	0,0363	0,0239	-0,0011	-0,1084	-0,2506
0,9	0,0180	0,0139	-0,0004	-0,0521	-0,1308

Таблиця 5 - Значення напружень - σ_r / P в перерізі $\theta = 0$ для другого варіанта навантаження

$\frac{r - r_0}{r_1 - r_0}$	$\mu_0 = 0{,}1$	$\mu_0 = 0{,}2$	$\mu_0 = 0{,}5$	$\mu_0 = 0{,}8$	$\mu_0 = 0{,}9$
0	0,4000	0,4000	0,4000	0,4000	0,4000
0,1	0,3397	0,3114	0,2321	0,1043	0,0493
0,2	0,2653	0,2324	0,1354	-0,0698	-0,2235
0,3	0,2022	0,1731	0,0800	-0,1648	-0,4098
0,4	0,1543	0,1467	0,0486	-0,2048	-0,5062
0,5	0,1175	0,0985	0,0304	-0,2065	-0,5205
0,6	0,0804	0,0738	0,0196	-0,1825	-0,4693
0,7	0,0637	0,0531	0,0091	-0,1426	-0,3725
0,8	0,0416	0,0347	0,0078	-0,0950	-0,2506
0,9	0,0207	0,0173	0,0037	-0,0459	-0,1207

З ростом μ_0 градієнт напружень σ_r по товщині збільшується, причому для μ_0, близьких до одиниці напруження майже по всій товщині є розтягуючим, а найбільші величини досягаються не на навантаженій, а поблизу серединної поверхні.

Одержані в цій роботі результати показують значний вплив густини армування в коловому напрямку на величину і характер розподілу напружень і переміщень в ортотропних циліндрах. Це дає можливість керувати напружено-деформованим станом конструктивних елементів у вигляді композитних циліндрів шляхом регулювання законом зміни неоднорідністю їх пружних властивостей.

ЛІТЕРАТУРА

1. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жесткости. - К.: Наук. думка, 1981.- 544с.- (Методы расчёта оболочек: В 5т.; Т.4).
2. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек.- М.: Наука, 1992.- 336с.
3. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела.- М.: Наука, 1977.- 415с.
4. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел.- М.: Изд-во Моск. ун-та, 1977.- 368с.

5. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Задачи теории упругости неоднородных тел.- К.: Наук. думка , 1991.- 216с.

6. Василенко А.Т., Судавцова Г.К. Напряжённое состояние термочувствительных цилиндров из анизотропных композитов // Механика композитных материалов.- 1999, №3.- С.667-374.

7. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление полимерных и композитных материалов.- Рига: Зинатне, 1980.- 572с.

8. Кристенсен Р. Введение в механику композитов.- М.: Мир, 1982.- 334с.

9. Композиционные материалы: Справочник / В.В.Васильев, В.Д. Протасов, В.В. Болотин и др.- М.: Машиностроение, 1990.- 512с.