УДК 517.949.8

ЗБІЖНІСТЬ МЕТОДУ БАРИЦЕНТРИЧНОГО УСЕРЕДНЕННЯ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА В ЦЕНТРІ КРУГА

Валько Н.В., викладач, *Хомченко А.Н, д.ф.-м.н., професор

Херсонський державний педагогічний університет

**Херсонський державний технічний університет*

Ця стаття присвячена збіжності методу барицентричного усереднення знаходження наближеного розв'язку рівняння Лапласа. Цей метод застосовується для знаходження наближеного розв'язку в окремих точках області через значення граничної функції на межі цієї області. До цього часу застосування методу барицентричного усереднення, його збіжність до точного розв'язку не були обгрунтовані.

Розглянемо узагальнену задачу Діріхле:

на межі C круга D радіуса R з центром на початку координат задана функція $u(\zeta)$, де $\zeta = R \cdot e^{i\varphi}$, неперервна скрізь крім, можливо, скінченного числа точок $\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_m$, де вона має точки розриву першого роду. Знайти гармонічну і обмежену в крузі D функцію $u(z)$, яка приймає значення $u(\zeta)$ у всіх точках неперервності цієї функції. Ця функція є розв'язком рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (1)$$

Як відомо [1, с.212, теорема 6], існує не більше однієї функції $u(z)$, гармонічної і обмеженої в області D, яка в точках $\zeta \neq \zeta_k$, $(k = 1, 2, ..., m)$ межі C приймає задані значення $u(\zeta)$. Розв'язком цієї задачі є інтеграл Пуассона:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R \cdot e^{i\varphi}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\varphi - \theta) + r^2} d\varphi, \ (z = re^{i\theta}). \qquad (2)$$

з граничною умовою $u(z) = u(\zeta)$, $\zeta \in C$.

У роботі [2] для знаходження розв'язку був розглянутий метод барицентричного усереднення.

Нехай трикутник $M_1M_2M_3$ з вершинами $M_1(R\cos\varphi_1; R\sin\varphi_1)$, $M_2(R\cos\varphi_2; R\sin\varphi_2)$, $M_3(R\cos\varphi_3; R\sin\varphi_3)$ вписано в коло C. Відрізок $[0; 2\pi]$ розіб'ємо точками $0 = t_{n0} < t_{n1} < t_{n2} < ... < t_{nn} = 2\pi$ $(n \in N)$ на n відрізків, позначивши $\Delta t_{nk} = t_{n,k+1} - t_{nk}$ $(k = 0, 1, 2, .., n-1)$, $\lambda_n = \max\limits_{0 \le k \le n-1} \{\Delta t_{nk}\}$.

Розглянемо систему n трикутників $M_{1k}\ M_{2k}\ M_{3k}$ $(k = 0, 1, 2, .., n-1)$ з вершинами $M_{lk}(R\cos(\varphi_l + t_{nk}); R\sin(\varphi_l + t_{nk}))$ $(l = 1, 2, 3)$.

Через u_{lk} позначимо відповідно значення функції $u(\zeta)$ в точках M_{lk}.

Три точки $(x_1; y_1; z_1)$, $(x_2; y_2; z_2)$, $(x_3; y_3; z_3)$ простору визначають єдину площину, рівняння якої має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Зробивши відповідні перетворення, знайдемо аплікату точки $(x; y)$:

$$z = z_1\xi_1 + z_2\xi_2 + z_3\xi_3.$$

Коефіцієнти при z_1, z_2, z_3 у правій частині отриманої нерівності є барицентричними координатами точки (x; y) відносно трикутника $M_1M_2M_3$ [3, с. 77, 88].

У центрі круга, при *r*=0, матимемо:

$$z_0^{(k)} = \frac{u_{1k}\sin(\varphi_3-\varphi_2)+u_{2k}\sin(\varphi_1-\varphi_3)+u_{3k}\sin(\varphi_2-\varphi_1)}{\sin(\varphi_3-\varphi_2)+\sin(\varphi_1-\varphi_3)+\sin(\varphi_2-\varphi_1)}. \quad (3)$$

Наведену вище схему називатимемо схемою барицентричного усереднення, складеною для функції $u(\zeta)$ в крузі D. Число

$$\bar{u}_n(0) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n-1} z_0^{(k)}\Delta t_{nk} \quad (4)$$

називатимемо *n*-м наближенням схеми барицентричного усереднення в точці z=0.

Означення 1. Схема барицентричного усереднення, складена для граничної функції $u(R\cdot e^{i\varphi})$ рівняння Лапласа в крузі, називається збіжною в точці $z_0=0$, якщо виконується рівність

$$\lim_{n\to\infty}\bar{u}_n(0) = u(0)\cdot$$

Теорема 1. Нехай функція $u(R\cdot e^{i\varphi})$ неперервна в кожній точці $\varphi\in[0;2\pi]$ крім, можливо, скінченного числа точок, в яких вона має розрив першого роду. Якщо виконується рівність

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n = 0\,, \quad (5)$$

то схема барицентричного усереднення, складена для граничної функції $u(R\cdot e^{i\varphi})$ рівняння Лапласа в крузі D радіуса R, є збіжною в точці $z_0=0$, тобто:

$$\lim_{n\to\infty}\bar{u}_n(0) = \frac{1}{2\pi(\sin(\varphi_3-\varphi_2)+\sin(\varphi_1-\varphi_1)+\sin(\varphi_2-\varphi_1))}\times$$

$$\times\lim_{\lambda_n\to 0}(\sin(\varphi_3-\varphi_2)\sum_{k=0}^{n-1}u_{1k}\Delta t_{nk}+\sin(\varphi_1-\varphi_3)\sum_{k=0}^{n-1}u_{2k}\Delta t_{nk}+$$

$$+\sin(\varphi_2-\varphi_1)\sum_{k=0}^{n-1}u_{3k}\Delta t_{nk}) = u(0)\,.$$

Доведення. Нехай функція $u(\zeta)$ неперервна скрізь на колі C, крім, можливо, скінченного числа точок, у яких вона може мати точки розриву лише першого роду. У цьому випадку, за відомою теоремою Гаусса, значення гармонічної функції $u(z)$ у центрі круга D знаходиться як середнє арифметичне її значень на колі C [4, с. 586]:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R\cdot e^{i\varphi})d\varphi\,. \quad (6)$$

Цю формулу можна отримати з формули (2) при *r=0*. Підставивши у вираз (4) значення (3), знаходимо *n*-е наближення схеми барицентричного усереднення в центрі круга:

$$\bar{u}_n(0) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{u_{1k}\sin(\varphi_3-\varphi_2)+u_{2k}\sin(\varphi_1-\varphi_3)+u_{3k}\sin(\varphi_2-\varphi_1)}{\sin(\varphi_3-\varphi_2)+\sin(\varphi_1-\varphi_3)+\sin(\varphi_2-\varphi_1)}\Delta t_{nk} =$$

$$=\frac{1}{2\pi(\sin(\varphi_3-\varphi_2)+\sin(\varphi_1-\varphi_3)+\sin(\varphi_2-\varphi_1))}(\sin(\varphi_3-\varphi_2)\sum_{k=0}^{n-1}u_{1k}\Delta t_{nk}+$$

$$+\sin(\varphi_1-\varphi_3)\sum_{k=0}^{n-1}u_{2k}\Delta t_{nk}+\sin(\varphi_2-\varphi_1)\sum_{k=0}^{n-1}u_{3k}\Delta t_{nk})$$

(7)

Суми $\sum_{k=0}^{n-1}u_{lk}\Delta t_{nk} = \sum_{k=0}^{n-1}u(R\cdot e^{i(\varphi_l+t_{nk})})\Delta t_{nk}$ при *l*=1, 2, 3 є, відповідно, інтегральними сумами, складеними для функцій $u(R\cdot e^{i(\varphi_l+\varphi)})$ на відрізку $[0;2\pi]$, і тому за формулою (6) при умові (5) матимуть скінченні границі які, відповідно, дорівнюють

$$\int_0^{2\pi} u(R;\varphi_l+\varphi)d\varphi = \int_0^{2\pi} u(R;t)dt = 2\pi\, u(0;0),\ \text{при } l=1,\ 2,\ 3.$$

Перейшовши в рівності (7) до границі при $n \to \infty$, маємо:

$$\lim_{n\to\infty} \bar{u}_n(0) = \lim_{\lambda_n\to 0} \bar{u}_n(0) = \frac{1}{2\pi(\sin(\varphi_3-\varphi_2)+\sin(\varphi_1-\varphi_3)+\sin(\varphi_2-\varphi_1))}\times$$

$$\times(\sin(\varphi_3-\varphi_2)\lim_{\lambda_n\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} u_{1k}\Delta t_{nk} + \sin(\varphi_1-\varphi_3)\lim_{\lambda_n\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} u_{2k}\Delta t_{nk} + \sin(\varphi_2-\varphi_1)\lim_{\lambda_n\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} u_{3k}\Delta t_{nk}) =$$

$$= 2\pi u(0)\frac{\sin(\varphi_3-\varphi_2)+\sin(\varphi_1-\varphi_3)+\sin(\varphi_2-\varphi_1)}{2\pi(\sin(\varphi_3-\varphi_2)+\sin(\varphi_1-\varphi_3)+\sin(\varphi_2-\varphi_1))} = u(0).$$

За означенням схема барицентричного усереднення буде збіжною в точці $z=0$. Теорема 1 доведена.

Якщо в схемі барицентричного усереднення зробити рівномірне розбиття, то буде справедливий

Наслідок 1. Якщо функція $u(R\cdot e^{i\varphi})$ неперервна в кожній точці $\varphi \in [0;2\pi]$ крім, можливо, скінченного числа точок, у яких вона має розрив першого роду, то середні арифметичні n-их наближень схеми рівномірних барицентричного усереднення, складеної для граничної функції $u(R\cdot e^{i\varphi})$ рівняння Лапласа в крузі D радіуса R, збігаються в точці $z_0=0$, тобто:

$$\lim_{n\to\infty} \bar{u}_n(0) = \frac{1}{\sin(\varphi_3-\varphi_2)+\sin(\varphi_1-\varphi_3)+\sin(\varphi_2-\varphi_1)}\times$$

$$\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sin(\varphi_3-\varphi_2)\sum_{k=0}^{n-1} u(R\cdot e^{i(\varphi_1+\frac{2\pi k}{n})}) + \sin(\varphi_1-\varphi_3)\sum_{k=0}^{n-1} u(R\cdot e^{i(\varphi_2+\frac{2\pi k}{n})}) +$$

$$+\sin(\varphi_2-\varphi_1)\sum_{k=0}^{n-1} u(R\cdot e^{i(\varphi_3+\frac{2\pi k}{n})})) = u(0).$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. - М.: Наука, 1973.– 736 с.
2. Хомченко А.Н. Упрощенный анализ теплових полей в областях сложной формы // Инж.-физ. журнал. – 1990. – Т. 59, № 1. – С. 146 – 149.
3. Балк М.Б., Болтянский В.Г. Геометрия масс. – М.: Наука, 1987. – 159 с.
4. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М.: Физматгиз, 1962. – 708 с.