УДК 536.24

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЕЗОНАТОРА В КОНДУКТИВНОЙ СУШКЕ МНОГОСЛОЙНЫХ ДИЭЛЕКТРИКОВ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Яковенко В.А., соискатель

Днепропетровский национальный университет

При рациональном подборе частоты колебаний и параметров камер, где происходит преобразование сверхвысокочастотной энергии в тепловую, можно получить относительно равномерное выделение тепла по объему тела. Эффективность преобразования энергии электромагнитного поля в тепло возрастает прямо пропорционально частоте колебаний и квадрату напряженности электрического поля. При этом следует отметить простоту подачи энергии практически к любому участку нагреваемого тела [10].

Важное преимущество такого нагрева — тепловая безинерционность, т.е. возможность практически мгновенного включения и выключения теплового воздействия на обрабатываемый материал. Отсюда высокая точность регулировки процесса нагрева и его воспроизводимость. Достоинством сверхвысокочастотного нагрева является также высокий коэффициент полезного действия преобразования электромагнитной энергии в тепловую, выделяемую в объеме нагреваемых тел. Тепловые потери в подводящих трактах обычно невелики и стенки волноводов, рабочих камер остаются практически холодными, что создает комфортные условия для обслуживающего персонала.

Поэтому актуальной является разработка эффективного метода решения задачи по определению компонент электромагнитных полей резонаторных камер для кондуктивной сушки многослойных диэлектриков переменной толщины. Рассмотрим работы, посвященные данной проблеме.

Применению численного метода для расчета распространения электромагнитных волн в замкнутых тороидальных структурах посвящена работа [1]. Путем введения криволинейной системы координат удалось исключить радиальные компоненты электрического и магнитного полей, оставляя только тангенциальные компоненты. Задача была сведена к одномерной и в новых переменных из уравнений Максвелла были получены два матричных дифференциальных уравнения, которые эквивалентны уравнениям многополюсной линии передачи. Задача решения этих уравнений и нахождение соответствующего дисперсионного уравнения была сведена к матричной алгебраической задаче.

В работах [2-4] описывается методика и результаты расчета резонатора,заполненного многослойным диэлектрическим материалом. Однако область определения компонентов электромагнитного поля в этих работах была постоянной.

Анализируя методы решения задач математической физики для областей с подвижными границами следует отметить, что до 50-х годов достаточно полный обзор дан в работе Л.И.Рубинштейна [5].

В случае равномерного движения границы области в работе [6] предложено вводить подвижную систему координат, движущуюся вместе с границей. Метод интеграла теплового баланса рассмотрен в работе [1]. Однако для этого метода характерным является изменение функции процесса только в одной области, что существенно упрощает задачу.

Идея метода конечных интегральных преобразований была использована в работе [7], что позволило свести одномерную задачу с подвижными границами к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно коэффициентов – изображений.

В работе [8] получено решение задачи для уравнения параболического типа в области с движущейся по произвольному закону границей, которое сводится к построению функций Грина для соответствующей краевой задачи.

Применяя конечное интегральное преобразование с подвижным, зависящим от времени пределом интегрирования, в работе [9] получено решение несимметричной задачи для шара и конуса с подвижной границей.

Рассмотрим кольцевой резонатор круглого сечения с переменным по длине диэлектрическим заполнением.

Определим компоненты электромагнитного поля указанного резонатора, с помощью метода, основывающегося на конечном интегральном преобразовании.

Для этого необходимо решить однородное волновое уравнение в цилиндрической системе координат

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\omega^2 E_a \mu_a u=0, \qquad (1)$$
$$0<r<\xi(z), 0<z<в$$

с соответствующими граничными условиями для электрического поля

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=0}=u(\xi(z),z)=\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=в}=0,$$

для магнитного поля

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\xi(z)}=u(r,0)=u(r,в)=0, \qquad (2)$$

где $\xi(z)$ - заданный закон изменения толщины диэлектрика на внутренней поверхности резонатора длины в.

Для решения рассмотренной задачи применим интегральное преобразование, в котором ядро является решением уравнения по переменной r. Интегральное преобразование, взятое по пространственной координате, является усреднением исследуемой физической величины. Это усреднение должно быть сделано не только в соответствии с характером процесса, но и в соответствии с граничными условиями. В этом случае решение для изображения функции будет представлять самостоятельный интерес, поскольку такое преобразование в физическом отношении будет являться переходом от анализа исследуемых функций к усредненным значениям, сделанным в соответствии с постановкой задачи. Таким образом, на основе анализа решения для усредненных значений можно получить ряд закономерностей протекания физических процессов [1].

Применяя конечное интегральное преобразование с подвижными, зависящими от координаты пределами интегрирования, мы получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно преобразованных функций.

Конечное интегральное преобразование Ханкеля с переменным верхним пределом и формула обращения определяются соответственно выражениями

$$\tilde{U}(\mu_n,z)=\int_0^{\xi} rK_0(\mu_n,r)U(r,z)dr,$$

$$U(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty} NK_0(\mu_n,r)\tilde{U}(\mu_n,z).$$

Для определения ядра интегрального преобразования решим задачу на собственные значения и собственные функции

$$W''(r)+\frac{1}{r}W'(r)+\lambda^2 W(r)=0,$$

$$W'(0)=W(\xi)=0,$$

где λ - произвольный параметр.

Общее решение этого уравнения Бесселя имеет вид :

$$W(r)=C_1 J_0(\lambda r)+C_2 Y_0(\lambda r).$$

Так как при $r \to 0$ $Y_0(\lambda r) \to \infty$, то из условия конечности функции на оси цилиндра следует, что $C_2 = 0$. Что же касается параметра λ, то он находится из граничного условия при $r=\xi(z)$, и очевидно, что этот параметр может принимать бесчисленное множество значений, определяемых по формуле

$$\lambda_n(\tau)=\frac{\mu_n}{\xi},$$

где μ_n - положительные корни уравнения, $J_0(\mu)=0$ - для электрического поля, $J_1(\mu)=0$ - для магнитного поля.

Каждому «фиксированному» значению λ_n^2 будет соответствовать «фиксированная» собственная функция

$$W(r,Z)=J_0\left(\frac{\mu_n r}{\xi}\right).$$

Тогда ядро конечного интегрального преобразования определим в виде

$$K_0(\mu_n r)=\frac{W(r,z)}{N}=\frac{W(r,z)}{\int_0^{\xi} rW^2 dr}=\frac{2J_0(\mu_n r/\xi)}{\xi^2 J_1^2(\mu_n)},$$

где N – норма «фиксированной»собственной функции W(r,z).

Введя обозначения $\psi_n(z)=\tilde{u}(\mu_n,z)N$, выражение искомой функции представим в виде ряда Фурье-Бесселя :

$$u_i(r,z)=\frac{2}{\xi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_{ni}(z)}{J_1^2(\mu_{ni})}J_0(\mu_{ni}r/\xi), \qquad (3)$$

где i = 1, 2 соответствует электрической и магнитной составляющей вектора Герца.

По теореме В.А. Стеклова ряд (3) в области сходимости сходится равномерно и абсолютно.

Для определения коэффициентов ряда (3) умножим члены уравнения (1) на $rJ_0(\mu_n r/\xi)$ и проинтегрируем по переменной r на интервале $[0;\xi]$;

$$\int_0^{\xi}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)J_0(\mu_n r/\xi)dr+\int_{\sigma}^{\xi} r\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}J_0(\mu_n r/\xi)dr+\omega^2 E_a\mu_a\int_0^{\xi} ruJ_0(\mu_n r/\xi)dr=0 \qquad (4)$$

Используя теорему о дифференцировании интеграла по параметру, можно записать

$$\int_0^{\xi} r\frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2}J_0\left(\frac{\mu_{ni}z}{\xi}\right)dr=\frac{d}{dz}\left[\frac{d}{dz}\int_0^{\xi} ru_iJ_0(\mu_{ni}r/\xi)dr-\int_0^{\xi} ru_i\frac{\partial J_0(\mu_{ni}r/\xi)}{\partial z}dr-\dot{\xi}u_i(\xi,z)J_0(\mu_{ni})\right]=$$

$$=\frac{d^2\psi_{ni}}{dz^2}-\int_0^{\xi} ru_i\frac{\partial^2 J_0(\mu_{ni}r/\xi)}{\partial z^2}dr;$$

$$\int_0^{\xi}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_i}{\partial r}\right)J_0(\mu_{ni}r/\xi)dr=-\left(\frac{\mu_{ni}}{\xi}\right)^2\psi_{ni};$$

$$\int_0^{\xi} ruJ_0(\mu_{ni}r/\xi)dr=\psi_{ni.},\ \dot{\xi}=\frac{d\xi}{dz}.$$

Подставляя полученные выражения в соотношение (4), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $\psi_{ni}(z)$

$$\frac{d^2\psi_{ni}}{dz^2}-\frac{2\dot{\xi}}{\xi}\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{nm}\frac{d\psi_{mi}}{dz}-\frac{\ddot{\xi}\xi^2-2\xi\dot{\xi}^2-3\dot{\xi}^2}{\xi^2}\times\sum_{m=1}^{\infty}\left[\omega^2E_a\mu_a-\left(\frac{\mu_{ni}}{\xi}\right)^2\right]\psi_{ni}=0,\ i=1,2 \qquad (5)$$

Краевые условия

$$\left.\frac{d\psi_{n1}}{dz}\right|_{z=0} = \left.\frac{d\psi_{u1}}{dz}\right|_{z=в} = 0 \text{ - для электрического поля} \tag{6}$$

$\psi_{n2}(0) = \psi_{n2}(в) = 0$ - для магнитного поля ,

где

$$\beta_{nm} = \frac{8\mu_{ni}\mu_{mi}^3 J_1(\mu_{ni})}{J_1(\mu_{mi})(\mu_{mi}^2 - \mu_{ni}^2)}, n \neq m, \beta_{nm} = \frac{\mu_{ni}^2 + 10}{3}, n = m$$

$$\Delta_{nm} = \frac{2\mu_{ni}\mu_{mi} J_1(\mu_{ni})}{J_1(\mu_{mi})(\mu_{mi}^2 - \mu_{ni}^2)}, n \neq m \ ; \ \Delta_{nm} = 1, n = m$$

В частном случае, при $\xi(z) = const$, система дифференциальных уравнений (5) преобразуется к одному уравнению, решение которого получается в квадратурах. Используя выражение (3), получим компоненты электромагнитного поля :

$$E_z = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \omega^2 \mu_a E_a u_1, \ H_z = \frac{\partial^2 u_2}{\partial z_2} + \omega^2 E_a \mu_a U_2,$$

$$E_r = \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}, \qquad H_r = \frac{\partial^2 u_2}{\partial z \partial r},$$

$$E_1 = -j\omega\mu_a \frac{\partial u_2}{\partial r}, \qquad H_1 = -j\omega E_a \frac{\partial u_1}{\partial r},$$

где

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} = -\frac{u}{\xi^3}\left(\ddot{\xi} - 3\frac{\dot{\xi}}{\xi}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_{ni}}{J_1^2(\mu_{ni})} J_0\left(\mu_{ni}\frac{r}{\xi}\right) - \frac{8\dot{\xi}}{\xi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\dot{\psi}_{ni}}{J_1(\mu_{ni})} J_0(\mu_{ni} r/\xi) +$$

$$+\frac{2r}{\xi^4}\left(\ddot{\xi} - \frac{6\dot{\xi}^2}{\xi}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_{ni}\mu_{ni}}{J_1^2(\mu_n)} J_1(\mu_{ni} r/\xi) + \frac{4r\dot{\xi}}{\xi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\dot{\psi}_{ni}\mu_{ni}}{J_1^2(\mu_{ni})} J_1(\mu_{ni} r/\xi) + \frac{2}{\xi^2}\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ddot{\psi}_{ni}}{J_1^2(\mu_{ni})} J_0(\mu_{ni} r/\xi) - \frac{2r^2\dot{\xi}^2}{\xi^6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_{ni}\mu_{ni}^2}{J_1^2(\mu_{ni})}\left[\frac{\xi J_1(\mu_{ni} r/\xi)}{\mu_{ni} r} - \frac{\mu_{ni} r}{\xi} J_2(\mu_{ni} r/\xi)\right];$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial r} = -\frac{2}{\xi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_{ni}\mu_{ni}}{J_1^2(\mu_{ni})} J_1(\mu_{ni} r/\xi),$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial z \partial r} = \frac{6\dot{\xi}}{\xi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_{n2}\mu_{n2}}{J_1^2\left(\mu_{n2}\right)} J_1 \times \left(\mu_{n2} r/\xi\right) - \frac{2}{\xi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dot{\psi}_{n2}\mu_{n2}}{J_1^2\left(\mu_{n2}\right)} \times\times J_1\left(\mu_{n2} r/\xi\right) +$$

$$+ \frac{2\dot{\xi} r}{\xi^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_{n2}\mu_{n2}^2}{J_1^2\left(\mu_{n2}\right)} \times \left[\frac{-\xi J_1\left(\mu_{n2} r/\xi\right)}{\mu_{n2} r} - \frac{\mu_{n2} r}{\xi} J_2\left(\mu_{n2} r/\xi\right) \right]$$

Укажем, что метод решения краевых задач такого типа может быть применен и к случаю трех и большего числа независимых переменных.

Этот метод является эффективным и при решении задач о фазовых превращениях, когда одновременно необходимо определить функцию процесса в двух или более соприкасающихся средах и закон, по которому происходит перемещение границ раздела фаз.

В этом случае он может быть положен в основу для применения последовательных приближений, где в качестве нулевого приближения задается закон движения границы раздела фаз на основе тех или иных физических соображений.

Построим математическую модель кондуктивной сушки многослойного диэлектрика с использованием энергии выше определенных сверхвысокочастотных электромагнитных колебаний.

Будем считать, что электромагнитное излучение находится в состоянии термодинамического равновесия с веществом и характеризуется однородностью, изотропностью и неполяризованностью.

Так как излучение распространяется с конечной скоростью , то внутри материала будет существовать электромагнитное поле с постоянной плотностью энергии U [10]

$$U = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2\right),$$

где E и H – напряженности электрического и магнитного полей, ε_0 –электрическая постоянная, μ_0 –магнитная постоянная.

Плотность энергии U можно представить в виде разложения по частоте ω или длине волны λ

$$U = \int_0^{\infty} U_\omega d\omega = \int_0^{\infty} U_\lambda d\lambda,$$

где $U_\omega d\omega$ и $U_\lambda d\lambda$ объемная плотность энергии излучения , приходящаяся на интервал частот $[\omega, \omega + d\omega]$ и интервал длин волн $[\lambda, \lambda + d\lambda]$.

Основная задача состоит в нахождении функции

$$U_\omega = U_\omega(\omega, T),$$

где T -температура материала.

Для построения математической модели процесса сушки материала в камере под действием энергии сверхвысоких частот рассмотрим влажные фракции твердого диэлектрического вещества в виде тела , помещенного в цилиндрическую идеальнопроводящую резонаторную камеру. Материал, в соответствии с технологией его изготовления, должен быть подвергнут воздействию электромагнитного излучения с выделением тепловой энергии и последующей его сушкой . На поверхности $x = 0$ каждой частице передается тепловая энергия излучения , плотность потока которого равна $q(\tau)$, вследствие чего на открытой поверхности $x = 1$ происходят испарение и унос в окружающую среду как пара, образовавшегося на этой поверхности, так и пара, образовавшегося внутри материала и транспортируемого через него. Перенос образовавшегося пара через закрытую поверхность $x = 0$ невозможен. Граница фазового превращения $\eta(\tau)$ определяет переменную толщину сухой области.

Учитывая уравнения ,описывающие термодинамику диэлектриков [10] , математическая формулировка задачи сведена к следующей системе уравнений[11,12]:

сухая область

$$\frac{\partial t_1}{\partial \tau} = a_1 \frac{\partial^2 t_1}{\partial x^2}, (0 \langle x \langle \eta(\tau), \tau \rangle 0), \tag{7}$$

$$t_1(0, x) = \varphi_1(x),$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial x}\bigg|_{x=0} = q(\tau),$$

$$t_1(\eta(\tau), \tau) = \varphi_2(\tau),$$

влажная область:

$$\frac{\partial t_2}{\partial \tau} = a_2 \frac{\partial^2 t_2}{\partial x^2}, (\eta(\tau) \langle x \langle l, \tau \rangle 0), \tag{8}$$

$$t_2(0, x) = \varphi_1(x),$$

$$-\lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial x}\bigg|_{x=l} = (1-\varepsilon) q(\tau),$$

$$t_2(\eta(\tau), \tau) = \varphi_2(\tau),$$

стык областей:

$$\lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial x}\bigg|_{x=\eta} - \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial x}\bigg|_{x=\eta} = m(\tau)\varepsilon + (c_2\rho_2 - c_1\rho_1)\varphi_2(\tau)\frac{\partial \eta}{\partial \tau}, \tag{9}$$

$$t_1(\eta(\tau), \tau) = t_2(\eta(\tau), \tau), \eta(0) = 0,$$

интенсивность источника тепла [10]:

$$P_0 = 0{,}556 \cdot 10^{-12} \cdot \varepsilon_r^{\copyright\copyright} E^2 \omega, \tag{10}$$

$$P(x) = P_0 e^{-2\alpha_d x}, P(x)\big|_{x=l} = P_0 e^{-2\alpha_d l},$$

где ε – коэффициент фазового превращения жидкости в пар, α_d –постоянная затухания, ε_r'' – диэлектрическая проницаемость, t –температура, τ –время, $\varphi(\tau), m(\tau)$ –любая непрерывная функция времени, $q(\tau)$ –плотность потока энергии излучения, x –осевая координата, a –коэффициент температуропроводности, λ –коэффициент теплопроводности, ρ –плотность, c –удельная теплоемкость, P_0 –мощность источника излучения в начальный момент времени на поверхности $x = 0$.

Для решения полученных уравнений с соответствующими краевыми условиями (7–10) применим метод конечных интегральных преобразований, который является наиболее удобным для решения задач такого типа. Применяя интегральное преобразование с подвижным, зависящим от времени пределом интегрирования, получаем системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно преобразованных функций.

Конечное интегральное косинус-преобразование Фурье с переменным верхним пределом и формула обращения определяются соответственно выражениями :

$$\tilde{t}_{1n}(\tau) = \int_0^{\eta(\tau)} t_1(\tau, x) \cos \alpha_n x / \eta dx,$$

$$t_1(\tau, x) = \frac{2}{\eta} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{t}_{1n}(\tau) \cos \alpha_n x / \eta \ ,$$

где $\alpha_n = \pi(2n-1)/2; \cos\alpha_n x/\eta$ –"мгновенные" собственные функции.

Коэффициенты изображений $\tilde{t}_{1n}(\tau)$ определим из системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка :

$$\frac{d\tilde{t}_{1n}}{d\tau} = \frac{1}{2\eta}\frac{d\eta}{d\tau}\sum_{m=1}^{\infty}\omega_{nm}\tilde{t}_{1m} - \left(\frac{\alpha_n}{\eta}\right)^2 a_1\tilde{t}_{1n} + a_1\left[\frac{q(\tau)}{\lambda_1} - (-1)^n\varphi_2(\tau)\right], \tag{11}$$

$$\tilde{t}_{1n}(0) = \int_0^{\eta(0)}\varphi_1(x)\cos\alpha_n x/\eta(0)dx,$$

$$\omega_{nm} = -\frac{(-1)^{n-m}4\alpha_n\alpha_m}{\pi^2(n-m)(n+m-1)}, (n \neq m);$$

$$\omega_{nm} = 1, (n = m).$$

Распределение температуры во влажной области описывается уравнением

$$t_2(x,\tau) = \frac{2}{1-\eta}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{t}_{2n}(\tau)\sin\frac{\alpha_n}{1-\eta}(x-\eta),$$

где $\tilde{t}_{2n}(\tau) = \int_{\eta}^{l} t_2(x,\tau)\sin\frac{\alpha_n}{1-\eta}(x-\eta)dx$ – коэффициенты ряда.

Для их определения воспользуемся следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\tilde{t}_{2n}}{d\tau} = \frac{2}{1-\eta}\frac{d\eta}{d\tau}\sum_{m=1}^{\infty}\overline{\omega}_{nm}\tilde{t}_{2m} + \left(\frac{\alpha_n}{1-\eta}\right)^2 a_2\tilde{t}_{2n} + a_2\left[\frac{(-1)^n(1-\varepsilon)q(\tau)}{\lambda_2} + \frac{\varphi_2(\tau)}{1-\eta}\right], \tag{12}$$

$$\tilde{t}_{2n}(0) = \int_{\eta(0)}^{l}\varphi_1(x)\sin\frac{\alpha_n}{1-\eta(0)}(x-\eta(0))dx,$$

$$\overline{\omega}_{nm} = (-1)^{n-m+1}\cdot\omega_{nm}, (n \neq m),$$
$$\overline{\omega}_{nm} = 1, (n = m)$$

Закон движения границы фазового превращения определим из условия энергетического баланса изотермической поверхности раздела фаз[13]

$$\lambda_2\frac{2}{(1-\eta)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\tilde{t}_{2n}(\tau) + \lambda_1\frac{2}{\eta^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\alpha_n\tilde{t}_{1n}(\tau) =$$
$$= m(\tau)\varepsilon + (c_2\rho_2 - c_1\rho_1)\varphi_2(\tau)\frac{d\eta}{d\tau} \tag{13}$$

Начальное условие этого уравнения имеет вид $\eta(0) = 0$.

Коэффициенты изображений $\tilde{t}_{1n}(\tau), \tilde{t}_{2n}(\tau)$ и профиль поверхности раздела фаз $\eta(\tau)$, а следовательно, температурные функции t_1 и t_2 могут быть определены путем совместного решения систем дифференциальных уравнений (11), (12) и уравнения (13) с соответствующими начальными условиями.

Определение поля влагосодержания и профиля поверхности раздела фаз позволяет исследовать углубления зоны испарения и сопоставить полученные результаты с аналитическими, найденными из решения задачи о температурном поле . Задачу влагообмена, соответствующей процессу сушки , можно сформулировать следующим образом:

$$\frac{\partial U_1}{\partial \tau} = a_{m1}\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}(0 < x < \eta(\tau), \tau > 0) \tag{14}$$

$$U_1(0,x) = \psi_1(x),$$

$$U_1(\tau,0) = \psi_2(\tau), U_1(\tau,\eta(\tau)) = \psi_3(\tau)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial \tau} = a_{m2}\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}(\eta(\tau) < x < l, \tau > 0) \tag{15}$$

$$U_2(0,x) = \psi_1(x),$$

$$U_2(\tau,\eta(\tau)) = \psi_3(\tau), U_1(\tau,l) = \psi_4(\tau)$$

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \frac{1}{U(\tau)}\left(a_{m2}\frac{\partial U_2}{\partial x}\bigg|_{x=\eta} - a_{m1}\frac{\partial U_1}{\partial x}\bigg|_{x=\eta}\right), \eta(0) = 0. \tag{16}$$

Предполагая , что U(τ) равно среднему интегральному влагосодержанию $\overline{U}(\tau)$ во влажной области, находящейся в первой половине толщины материала за сухой областью, приведем решение рассматриваемой задачи в общей постановке.

Применяя интегральное синус-преобразование Фурье с переменным пределом интегрирования к уравнению (14) с его краевыми условиями , распределение влагосодержания в сухой области материала будет иметь вид

$$U_1(\tau,x) = \frac{2}{\eta}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{U}_{1n}(\tau)\sin\frac{n\pi}{\eta}x, \tag{17}$$

где коэффициенты-изображений, при известном законе движения границы раздела фаз η(τ), определяется из системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d\tilde{U}_{1n}}{d\tau} = \frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{d\tau}\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{nm}\tilde{U}_{1m} - \left(\frac{n\pi}{\eta}\right)^2 a_{m1}\tilde{U}_{1n} + \frac{a_{m1}n\pi}{\eta}\left[\psi_2(\tau) - (-1)^n\psi_3(\tau)\right],$$

$$\tilde{U}_{1n}(0) = \int_0^{\eta(0)}\psi_1(x)\sin\frac{n\pi}{\eta(0)}xdx,$$

$$\beta_{nm} = \frac{(-1)^{n+m}2nm}{m^2 - n^2}(n \neq m), \beta_{nm} = 0{,}5(n = m)$$

Решение задачи влагообмена во влажной области может быть представлено уравнением вида

$$U_2(\tau,x) = \frac{2}{l-\eta}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{U}_{2n}(\tau)\sin\frac{n\pi}{l-\eta}(x-\eta) \tag{18}$$

Для коэффициентов-изображений $\tilde{U}_{2n}(\tau)$ получена система диффиренциальных уравнений, имеющая вид

$$\frac{d\tilde{U}_{2n}}{d\tau} = \frac{1}{\eta - l}\frac{d\eta}{d\tau}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{n+m}\beta_{nm}\tilde{U}_{2m} - \left(\frac{n\pi}{l-\eta}\right)^2 a_{m2}\tilde{U}_{2n} +$$

$$+\frac{a_{m2}n\pi}{l-\eta}\left[\psi_3(\tau) - (-1)^n\psi_4(\tau)\right],$$

$$\tilde{U}_{2n}(0) = \int_{\eta(0)}^{l}\psi_1(x)\sin\frac{n\pi}{l-\eta(0)}(x-\eta(0))dx.$$

Выражение для профиля поверхности раздела жидкость-пар $\eta(\tau)$ определим подстановкой уравнений (17) и (18) в соотношение(16)

Выполнив преобразования, окончательно получим

$$\frac{d\eta}{d\tau}=\frac{1}{\tilde{U}(\tau)}\left[a_{m2}\frac{2\pi}{(l-\eta)^2}\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^n\tilde{U}_{2n}-a_{m1}\frac{2\pi}{\eta^2}\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^n\tilde{U}_{1n}\right] \qquad (19)$$

Полученные системы дифференциальных уравнений относительно $\tilde{U}_{1n}(\tau),\tilde{U}_{2n}(\tau)$ совместно с уравнением (19) позволяют определить распределения влагосодержания во влажной и сухой областях, а также закон движения границы фазового превращения.

Полученные значения температур в сухой и влажной зонах для заданного значения частоты, а так же закон (19) позволяют определить оптимальную мощность излучения для определенного режима сушки материала.

Сравнение полученных выше результатов кинетики нагрева слоев с ранее полученными [14] показывает, что влияние энергии излучения сверхвысоких частот на изменение границы раздела фаз существенно для начальных значений времени и повышает скорость сушки материала. Проведенные исследования подтверждают правильность постановки задачи и доказывают справедливость физико-математической модели процесса сушки материалов с применением энергии сверхвысокочастотного излучения .

Таблица 1 - Данные анализа скоростного спектра газовых молекул O_2 при нормальном давлении и t = 20 ^{0}C (значения скоростей молекул O_2 взяты из работы [5], стр.253)

№п/п	Δυ, м/с	u	$f_1(u)$,%	$f_2(u)$,%	n	ℓ_n	r_n
1	0-100	0,128	0,95	0,948	0	3,00	2,98
2	100-200	0,384	7,48	7,474	0,5	3,62	3,59
3	200-300	0,640	15,99	15,93	1,0	4,483	4,437
4	300-400	0,897	20,96	21,00	1,5	5,691	5,614
5	400-500	1,153	20,38	20,42	2,0	7,386	7,255
6	500-600	1,409	15,68	15,72	2,73	11,193	10,914
7	600-700	1,665	9,88	9,92	3,0	13,180	12,810
8	700-800	1,922	5,19	5,21	4,0	25,142	24,094
9	800-900	2,178	2,31	2,32	5,0	50,734	47,763
10	900-1000	2,434	0,87	0,878	10,0	3033,9	2496,5

Примечание. Δυ – интервал скоростей молекул O_2 ; u = υ/υ$_в$, где υ$_в$ = 390,3 м/с – наиболее вероятная скорость молекул. Другие пояснения - в тексте.

Таблица 2 - Данные расчетов характерных признаков теоретического и экспериментального распределения микрочастиц Al_3Mg_2 по размерам при условии: n = 3 и разных значениях m в соотношении (4).

M_{3m}	$3L_3$	mL_m	m	M_{3m}	$3L_3$	mL_m
0,8829	0,1013	0,1013	0,5	0,8936	0,0896	0,0883
0,8288	0,2034	0,2034	1,0	1,1026	0,2394	0,2264
0,7676	0,4297	0,4297	2,0	1,7326	0,8234	0,7657
0,7564	0,5645	0,5645	2,5	2,2047	1,3583	1,2617
0,7566	0,7217	0,7217	3,0	2,8322	2,1653	2,0125
0,7897	1,1349	1,1348	4,0	4,8007	5,2000	4,8536
0,8682	1,7520	1,7520	5,0	8,4086	12,0188	11,287
1,9369	10,5125	10,5125	9,0	103,020	315,323	304,300
Распределение Вагнера [7]: α = ε = 0; U_g = 2; υ$_k$ = 0,25				Сплав: 79,7% Al; 20% Mg; 0,3% Cr; 200 часов при 400^{0}C [6]; α = 0,531; ε = 0,02; U_g = 2,6809; υ$_k$ =0,3623		

Примечание. В таблице приведены абсолютные значения величин.

Таблица 3 - Данные расчетов характерных признаков теоретического и экспериментального распределений микрочастиц по размерам при условии: в соотношении (4) $|L_n| = |L_m|$

n	m	M_{nm}	L_n	L_m	ℓ_{nm}	r_{nm}
Теоретическое распределение: α = 2/3; ε = 0,05; u_g = 2,5355; υ_k = 0,3594						
2	0,54	0,7904	0,1941	0,1940	0,2834	0,2841
2,27	1,20	1,0155	0,2520	0,2524	0,2679	0,2683
4	5,37	5,3057	1,3873	1,3876	1,9062	1,9069
5	7,70	13,7842	3,6629	3,6650	9,9064	9,9081
6	10,01	36,0192	9,6936	9,6944	38,831	38,836
Сплав: 79,7% Al; 20% Mg; 0,3% Cr; 200 часов при 400^0C [6]						
α = 0,531; ε = 0,02; u_g = 2,6809; υ_k = 0,3623						
2	0,31	0,7914	0,1778	0,1779	0,3005	0,2868
2,36	1,20	1,1979	0,2733	0,2734	0,3162	0,2789
4	5,22	8,2911	1,9874	1,9878	2,4350	3,0043
5	7,63	27,2419	6,6568	6,6569	17,508	19,742
6	10,01	89,8539	22,2672	22,2660	89,323	97,675

Примечание. В таблице приведены абсолютные значения величин.

Таблица 4 - Данные анализа соотношения (7) между моментами солнечного спектра [8,10] при условии: n = 2; m = 3; a = 4; b = 4,2; ε_0 = 8,7 и разных значениях величины d.

d	M_{nm}	M_1	M_2	M_3	M_4	ℓ_{nm}	r_{nm}
Теоретическое спектральное распределение [8]							
1	0,1574	0,2351	0,2510	0,00984	0,2349	1,255	1,280
2	0,3147	0,4701	0,5021	0,0197	0,4697	2,510	2,560
3	0,4721	0,7052	0,7531	0,0295	0,7046	3,765	3,841
4	0,6294	0,9403	1,0041	0,0394	0,9393	5,020	5,121
5	0,7868	1,1753	1,2551	0,0492	1,1743	6,275	6,402
6	0,9441	1,4104	1,5062	0,0591	1,4042	7,530	7,482
Эксперементальное спектральное распределение [10]							
1	0,0818	0,0864	0,1185	0,00596	0,0863	0,5091	0,5855
2	0,3272	0,3455	0,4741	0,02386	0,3453	2,036	2,342
3	0,7363	0,7773	1,067	0,0537	0,7769	4,582	5,269
4	1,309	1,382	1,896	0,0954	1,381	8,145	9,367
5	2,045	2,159	2,963	0,1491	2,158	12,730	14,641
6	2,945	3,109	4,267	0,2147	3,108	18,330	21,082

Примечание. Обозначения: $M_1 = M_{n+1,m-1}$; $M_2 = M_{n+1,m-1-\gamma_1}$; $M_3 = M_{n+1-\gamma_2,m+b-1}$; $M_4 = M_{n+1,m-\gamma_3}$. Другие пояснения в тексте.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринберг Г.А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. - М.:АН СССР,1998.-729с.
2. Van der Pauw L.J. // Philips J.Res.-1998.-43,№5-6.-с.492-505.
3. Hui wei Re, Wolff Ingo. // IEEE Trans. Microwave Theory and Techn.-1991.-39. №12.-с.2061-2068.
4. Ho Chien – H sun, Fun Lu, Chang Kai // IEEE Trans. Microwave Theory and Techn.-1994.-42, №1.–с.41-51.
5. Рубинштейн Л.И. Проблема Стефана. Рига: Звайгзне.1967.-457с.
6. Гринберг Г.А. Письмо в редакцию // ЖТФ.-21.вып.3.-1951.-с.382-384.
7. Меламед В.Г. Решение задачи Стефана сведением к системе обыкновенных дифференциальных уравнений: Дис. канд. физ.-мат. Наук. –М.,МГУ,1957.-120с.
8. Карташов Э.М., Бартенев Г.М., Любов Б.Я. // Тепло- и массоперенос.-1972.-т.8.-с.28-31.
9. Чернышевич И.В. // Весці АН БССР – серыя фіз.-энергет. навук,-1971.-№4.-с.42-47.
10. Пюшнер Г. Нагрев энергией сверхвысоких частот. Пер. с англ.– М.: Энергия,1968.–175 с.
11. Яковенко В.А. Теплообмен в упрочняющей технологии на основе электронно-лучевого источника тепла //.Вісник Дніпропетровського університету. Механіка рідини та газу .–1999.– Вып. 2, Т. 1.– С.113-117.
12. Яковенко В.А. Математична модель поширення тепла при агрегатній зміні середовища //Системні технології. .Системне моделювання технологічних процесів.–Дніпропетровськ.–1999.–Вип.6.– С.154-159.
13. Лыков А.В. Тепломассообмен: Справочник.–М.: Энергия,1971.–560 с.
14. Красников В.В. Кондуктивная сушка.–М.: Энергия,1973.–223 с.