УДК 519.63:539.3

О ДРОБНО – РАЦИОНАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ НА ШЕСТИУГОЛЬНОМ КОНЕЧНОМ ЭЛЕМЕНТЕ

Хомченко А.Н., д.ф.-м.н., профессор

Херсонский государственный технический университет

В статье представлен метод построения локализованных функций формы для правильного шестиугольника. Шестиугольные функции формы конструируются как произведения геометрических вероятностей на четырех треугольниках, составляющих шестиугольник.

Ключевые слова: шестиугольный конечный элемент, геометрическая вероятность, дробно-рациональная функция формы, принцип сохранения весового баланса, нормировка базиса.

Хомченко А.Н ПРО ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНІЙ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ НА ШЕСТИКУТНОМУ СКІНЧЕННОМУ ЕЛЕМЕНТІ / Херсонський державний технічний університет, Украина

У статі подано метод побудови локалізованих функцій форми для правильного шестикутника. Шестикутні функції форми конструюються як добуток геометричних ймовірностей на чотирьох трикутниках, що складають шестикутник.

Ключові слова: шестикутний скінченний елемент, геометрична ймовірність, дробово-раціональна функція форми, принцип збереження вагового балансу, нормування базису.

Khomchenko A.N. ABOUT FRACTIONAL-RATIONAL INTERPOLATION ON HEXAGONAL FINITE ELEMENT / Kherson State Technical University, Ukraine

Presented in this paper is method of construction of the localized shape functions for a regular hexagon. The hexagonal shape functions are constructed as the products of geometrical probabilities on four triangles constituting the hexagon.

Key words: hexagonal finite element, geometrical probability, fractional-rational function of shape, principle of weight balance conservation, normalization of basis.

На основе вероятностно-геометрических представлений строится интерполяционный базис Уачспресса – Ишигуро на конечном элементе в форме правильного шестиугольника с узлами в вершинах. Обсуждается и устраняется причина нарушения весового баланса в системе интерполирующих полиномов, образованных методом “перемножения плоскостей”.

Конечный элемент в форме правильного шестиугольника (КЭ - 6) применяется в конечно-элементных расчетах ядерных реакторов и других конструкций с фрагментами сотовой геометрии [1,2]. Попытка построить полиномиальный базис КЭ – 6 средствами матричной алгебры приводит к СЛАУ шестого порядка с вырожденной матрицей. Чтобы обойти проблему сингулярности матриц, можно использовать геометрические подходы, которые, как правило, на сложных КЭ приводят к дробно – рациональным базисам (ДРБ). Заметный вклад в теорию дробно-рациональной интерполяции на КЭ внес Уачспресс [3]. Идеи Уачспресса применительно к КЭ – 6 реализовал Ишигуро в [1]. Представляет интерес вероятностная интерпретация процедуры конструирования ДРБ на КЭ – 6.

В системе координат OXY рассмотрим правильный шестиугольник с единичной стороной (рис. 1). Пусть узлы интерполяции расположены в вершинах $1\left(1;0\right)$, $2\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $3\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $4\left(-1;0\right)$, $5\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $6\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Построим систему функций, решающих задачу интерполяции на КЭ – 6.

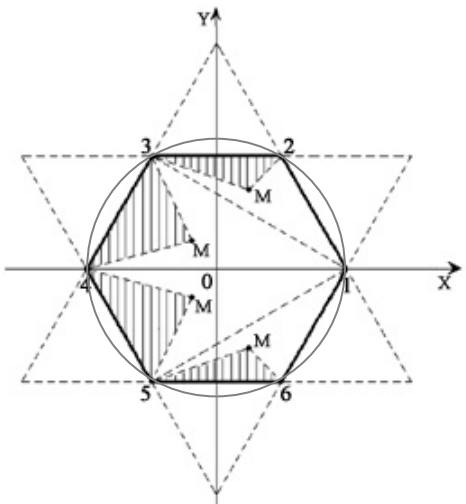


Рис.1

Для построения $\varphi_1(x,y)$, ассоциированной с первым узлом, разобьем КЭ – 6 на четыре треугольника с общей вершиной в узле 1. Кстати, именно с помощью разбиения КЭ – 6 на треугольные КЭ были выполнены первые расчеты на гексагональных решетках. И только в начале 80-х годов прошлого века стали рассматривать КЭ – 6 как единый цельный элемент со своим собственным базисом. Для построения такого базиса в каждом треугольнике выберем текущую точку М и рассмотрим треугольную подобласть, противолежащую узлу 1 (на рис. такие области заштрихованы). Проведем эксперимент со случайным исходом. В каждый из треугольников с общей вершиной в узле 1 будем вбрасывать случайную точку. Поставим задачу: найти вероятность попадания случайной точки в заштрихованную подобласть треугольника. В соответствии с рис.1 случайные события обозначим через A_{23}, A_{34}, A_{45} и A_{56}. Тогда

$$P(A_{23}) = 1 - \frac{2y}{\sqrt{3}}; \qquad P(A_{34}) = \frac{1}{2}\left(1 + x - \frac{y}{\sqrt{3}}\right);$$

$$P(A_{45}) = \frac{1}{2}\left(1 + x + \frac{y}{\sqrt{3}}\right); \qquad P(A_{56}) = 1 + \frac{2y}{\sqrt{3}}. \qquad (1)$$

Очевидно, что произведение этих вероятностей решает интерполяционную задачу

$\varphi_1(x_k, y_k) = \delta_{1k} \quad (k = \overline{1,6})$, где δ_{1k} - символ Кронекера. (2)

Поэтому для узла 1 можно записать

$$P(A_{23}) \cdot P(A_{34}) \cdot P(A_{45}) \cdot P(A_{56}) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{4y^2}{3}\right)\left((1+x)^2 - \frac{y^2}{3}\right). \qquad (3)$$

Остальные пять функций можно построить путем вычислений геометрических вероятностей на каждом “квартете” треугольников либо на основе формулы (3) с помощью последовательного поворота системы координат на угол 60^o. Как следствие мы получим систему из шести функций

$$\varphi_{1,4}(x,y) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{4y^2}{3}\right)\left((1 \pm x)^2 - \frac{y^2}{3}\right),$$

$$\varphi_{2,6}(x,y) = \frac{1}{4}\left(1 \pm \frac{2y}{\sqrt{3}}\right)\left((1+x)^2 - \frac{y^2}{3}\right)\left(1 - x \pm \frac{y}{\sqrt{3}}\right), \qquad (4)$$

$$\varphi_{3,5}(x,y) = \frac{1}{4}\left(1 \pm \frac{2y}{\sqrt{3}}\right)\left((1-x)^2 - \frac{y^2}{3}\right)\left(1 + x \pm \frac{y}{\sqrt{3}}\right).$$

Заметим, что $\varphi_{1,4}(x,y)$ симметричны относительно оси OX. Аналогично, остальные функции в (4) симметричны относительно диагонали, проходящей через соответствующий узел и центр КЭ – 6. Все функции $\varphi_k(x,y)$ одинаковы, что является следствием симметрии правильного шестиугольника. Такое конструирование системы (4) в работе [1] названо “произведением плоскостей”. Автор [1] предпринял попытку распространить на КЭ – 6 геометрический метод Уачспресса, хорошо зарекомендовавший себя на треугольных КЭ. Однако на КЭ – 6 возникли специфические проблемы, вынудившие Ишигуро отказаться от первоначального намерения построить на КЭ – 6 полиномиальный базис.

Аномалия системы (4) заключается в нарушении важного требования, которому должна удовлетворять система базисных функций. Оказалось, что

$$\sum_{k=1}^{6}\varphi_k(x,y)\geq 1.$$

Максимум этой суммы, равный $\frac{3}{2}$, достигается в центре КЭ – 6, к границе элемента сумма уменьшается до 1.

Рассмотрим причину этой аномалии и способ нормализации “базиса” (4). Легко убедиться, что интерполяционная гипотеза (2) безусловно выполняется. Однако, на многоугольнике, составленном из треугольников, может нарушаться гипотеза о независимости случайных событий. Геометрическая вероятность, вычисленная на собственном треугольнике – носителе, распространяясь на соседние треугольники КЭ – 6 (что необходимо возникает при умножении), вызывает интерференцию. Ее проявление можно обнаружить методом сечений. На рис. 2 показаны сечения поверхности $\varphi_1(x,y)$ координатными плоскостями $x=0$ и $y=0$.

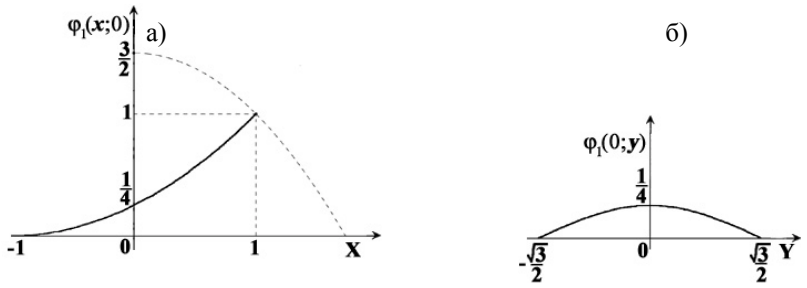


Рис. 2 Сечения $\varphi_1(x,y)$ координатными плоскостями.

Можно заметить, что в окрестности точки $\left(0;0;\frac{1}{4}\right)$ поверхность $\varphi_1(x,y)$ имеет форму седла. Начальная аппликата превышает “норму” в 1,5 раза. Это искажает систему построенных функций и не позволяет предъявить ее в качестве базиса типа Лагранжа. Указанный недостаток можно устранить сжатием поверхности $\varphi_1(x,y)$ к плоскости $z=0$. Однако, чтобы не нарушить интерполяционную гипотезу, нужно пользоваться переменным коэффициентом сжатия, который изменяется в зависимости от расстояния текущей точки поверхности до оси OZ. Максимум деформации (в 1,5 раза) должен отвечать центру элемента. При удалении от центра деформация должна ослабевать и вовсе исчезать в вершинах шестиугольника. Выбор подходящей модели деформирования легко осуществить с помощью рис. 2а. Достаточно выбрать симметричную относительно OZ параболу, проходящую через точки $\left(0;\frac{3}{2}\right)$ и $(1;1)$, а затем с ее помощью образовать параболоид вращения около оси OZ. Теперь остается систему функций (4) пронормировать с помощью переменного множителя с эффектом затухающего сжатия

$$\lambda(x,y)=2\left(3-x^2-y^2\right)^{-1},$$

и мы получим дробно – рациональный базис

$$\psi_k(x,y)=\lambda(x,y)\cdot\varphi_k(x,y). \qquad (5)$$

Такой базис удовлетворяет всем условиям задачи интерполяции на КЭ – 6. Интересно, что окружность нулевого уровня корректирующего параболоида проходит через все вершины шестиугольной “звезды”, образованные пересечениями продолженных сторон КЭ – 6 (рис. 1). Понятно, что окружность единичного уровня проходит через все вершины КЭ – 6.

В заключение заметим, что построение ДРБ в какой-то мере охладило оптимизм приверженцев полиномиальной интерполяции. И все же сомнения некоторых специалистов относительно возможности построения на КЭ – 6 полиномиальных базисов оказались необоснованными. Проблему сингулярности матрицы СЛАУ удалось обойти, а существование полиномиальных базисов на КЭ – 6 было доказано конструктивно [2, 4, 5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ishiguro M. Construction of hexagonal basis functions applied in the Galerkin–type finite element method // J. Inf. Process. 1984. V.7, №2. – P. 89-95.

2. Хомченко А.Н. К расчету температурных полей в сотовых структурах методом конечных элементов // Инж. – физич. журнал. – 1987. – Т.52, №2. – С. 301-305.

3. Митчелл Э., Уэйт Р. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. – М.: Мир, 1981. – 216 с.

4. Гучек П.И., Литвиненко Е.И., Хомченко А.Н. Геометрическое моделирование полиномиальных базисов гексагональных конечных элементов // Матем. моделирование. – К.: Институт математики НАН Украины, 1996. – С. 84-87.

5. Литвиненко Е.И. Геометрия интерполяционных полиномов на шестиугольнике // Сб. тр. IV Межд. конф. “Соврем. проблемы геом. моделирования”. – Ч. 1. – Мелитополь: ТГАТА, 1997. – С. 99-102.