УДК 517.95+518.517+532.533

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПО ЗМЕЕВИКАМ

Максименко-Шейко К.В., аспирант, Рвачев В.Л., д.ф.-м.н., профессор, академик НАН Украины, Шейко Т.И., д.т.н., профессор

Институт проблем машиностроения им. А.Н.Подгорного НАН Украины.

В работе построены математические модели движения вязкой несжимаемой жидкости по змеевикам. Получены уравнения Навье-Стокса и неразрывности движения в криволинейных неортогональных координатах. Для определения распределения давления в жидкости по известному распределению скоростей сформулирована задача Неймана для уравнения Пуассона. Для змеевиков бесконечной длины с постоянным сечением трехмерная задача сведена к плоской.

Ключевые слова: змеевик, несжимаемая вязкая жидкость, уравнение Навье-Стокса, криволинейные неортогональные координаты, обобщенные координаты, тензор скоростей деформаций, тензор напряжений, метрический тензор, символы Кристоффеля.

Максименко-Шейко К.В., Рвачев В.Л., Шейко Т.І. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ РУХУ В'ЯЗКОЇ НЕСТИСЛИВОЇ РІДИНИ ПО ЗМІЙОВИКАХ / Інститут проблем машинобудування А.М.Підгорного НАН України.

У роботі побудовані математичні моделі руху в'язкої нестисливої рідини по змійовиках. Отримані рівняння Нав'є-Стокса і нерозривності руху в криволінійних неортогональних координатах. Для визначення розподілення тиску в рідині за відомим розподіленням швидкостей сформульована задача Неймана для рівняння Пуассона. Для змійовиків нескінченної довжини з постійним перерізом тривимірна задача зведена до плоскої.

Ключові слова: змійовик, нестислива в'язка, рівняння Нав'є-Стокса, криволінійні неортогональні координати, тензор швидкостей деформацій, тензор напруг, метричний тензор. символи Крістоффеля.

Maksymenko-Sheyko K.V., Rvachev V.L., Sheyko T.I. MATHEMATICAL MODELS OF INCOMPRESSIBLE VISCOUS LIQUID MOTION IN COILED PIPES / Institute for problems of mechanical engineering by A.N.Podgorny Ukrainian NAS.

In the paper the mathematical models of incompressible viscous liquid motion in coiled pipes are constructed. The equations of Navier-Stokes and continuity of motion in curvilinear non-orthogonal coordinates are obtained. For definition of pressure profile in a liquid on a known velocity distribution the problem of Neumann for a Poisson equation is formulated. For coiled pipes of infinite length with uniform cross section the 3D problem is reduced to 2D.

Key words: coiled pipe, incompressible viscous liquid, equation of Navier-Stokes, curvilinear non-orthogonal coordinates, tensor of speeds of deformations, tensor of pressure(voltage), metric tensor, symbols of Christoffel.

Закрученные потоки широко используются в энергетических установках для интенсификации тепло- и массообмена в каналах, в газотурбинных и ракетных двигателях, в вихревых МГД-генераторах и др. Как отмечено в работах члена-корреспондента НАН Украины Халатова А.А. [3], среди разнообразных способов закрутки потока (шнеки, оребрение, спиральные накатки) скрученные трубы и змеевики — простое и удобное средство для интенсификации тепло- и массообмена. Большинство математических моделей течения несжимаемой вязкой жидкости сформулировано в ортогональных координатах (декартовых, цилиндрических, сферических) [1]. Известен ряд работ [5-7] , в которых трехмерное физическое поле (скалярное, векторное) может быть описано как двухмерное в криволинейных неортогональных системах координат для естественно- скрученных цилиндров и змеевиков. Целью данной работы является построение математической модели течения несжимаемой вязкой жидкости в криволинейных неортогональных координатах для змеевиков постоянного поперечного сечения и рассмотрение еще одного класса трехмерных задач, которые могут быть сведены к двухмерным.

Уравнение движения несжимаемой вязкой жидкости (уравнение Навье-Стокса) при $\mu = const$ имеет вид [1,2]:

$$\rho \frac{\partial V_i}{\partial t} + \rho V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} = \rho f_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_k \partial x_k} \qquad (1)$$

или, в векторной записи,

$$\rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\rho\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V}=\rho\vec{f}-\nabla P+\mu\Delta\vec{V}\,, \tag{2}$$

где ρ — плотность, μ — коэффициент вязкости жидкости, $\vec{f}$ — интенсивность массовых сил, $p_{ik}=-P\delta_{ik}+2\mu V_{ik}$ — тензор напряжений, P — гидростатическое давление, $V_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k}+\frac{\partial V_k}{\partial x_i}\right)$ — тензор скоростей деформаций, $V_{ll}\equiv div\vec{V}=0$ — свертка тензора скоростей деформаций или уравнение неразрывности движения.

Пусть поле скоростей есть функция времени t и обобщенных координат x^1,x^2,x^3, т.е. $\vec{V}=\vec{V}\left(x^1,x^2,x^3,t\right)$. Тогда приращение скорости частицы жидкости при перемещении из точки с координатами x^i в точку x^i+dx^i равно
$d\vec{V}=d\vec{V}_{лок}+d\vec{V}_{конв}$,

где $d\vec{V}_{лок}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}dt$ — локальная часть изменения скорости, а $d\vec{V}_{конв}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial x^k}dx^k$ — конвективная часть изменения скорости, т.е. $\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\frac{\partial\vec{V}}{\partial x^k}V^k$. Здесь $V^k=\frac{dx^k}{dt}$ — контравариантные компоненты скорости. Отсюда, учитывая определение контравариантной производной $\frac{\partial\vec{V}}{\partial x^k}\vec{e}^{\,i}\equiv V^i_{,k}$, получим контравариантные компоненты ускорения [2]:

$$\frac{d\vec{V}}{dt}\vec{e}^{\,i}=\left(\frac{dV}{dt}\right)^i=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\vec{e}^{\,i}+\frac{\partial\vec{V}}{\partial x^k}\vec{e}^{\,i}V^k=\frac{\partial V^i}{\partial t}+V^kV^i_{,k} \tag{3}$$

Вычислим $p^{ik}_{,k}$ —дивергенцию тензора напряжений.

$p^{ik}_{,k}=-P_{,k}g^{ik}+2\mu V^{ik}_{,k}$. Но $V^{ik}_{,k}=g^{il}g^{km}\frac{1}{2}\left[\left(V_{i,m}\right)_{,k}+\left(V_{m,i}\right)_{,k}\right]=\frac{1}{2}g^{km}\left(V^i_m\right)_{,k}+\frac{1}{2}g^{il}\left(V^k_l\right)_{,k}$.

Предполагая, что $\frac{\partial^2V^i}{\partial x^k\partial x^l}=\frac{\partial^2V^i}{\partial x^l\partial x^k}$, получим $\left(V^i_l\right)_{,k}=\left(V^i_k\right)_{,l}$.

Таким образом, в случае обобщенных координат вместо (1) имеем:

$$\rho\frac{\partial V^i}{\partial t}+\rho V^kV^i_{,k}=\rho f^i-g^{ik}\frac{\partial P}{\partial x^k}+\mu g^{km}\left(V^i_{,m}\right)_{,k}\,. \tag{4}$$

Змеевики так же, как и скрученные трубы [3], являются простым и удобным средством, способствующим процессам интенсификации тепло- и массообмена.

Для построения уравнения бесконечного змеевика рассмотрим тор с сечением, уравнение границы которого $\omega\left(\sqrt{x^2+y^2}-c,z\right)=0$. Предполагается, что функция $\omega\left(\sqrt{x^2+y^2}-c,z\right)$ нормализована [4], т.е. $\left.\frac{\partial\omega}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=1$, где n — внутренняя, нормаль к $\partial\Omega$. После подстановки $z\Leftarrow z-\alpha arctg\frac{y}{x}$, где $\alpha=\frac{H}{2\pi}$, в уравнение $\omega\left(\sqrt{x^2+y^2}-c,z\right)=0$, получим уравнение $\omega_b(x,y,z)\equiv\omega\left(\sqrt{x^2+y^2}-c,\ z-\alpha arctg\frac{y}{x}\right)=0$ бесконечной поверхности $\partial\Omega_b$ (Рис.1) [5,6,7], ограничивающей область Ω_b змеевика, с шагом H и поперечным сечением $\partial\Omega$. Нормализованное

уравнение этой поверхности будет: $\omega_1(x,y,z) \equiv \dfrac{\omega(r-c,\hat{z})}{\sqrt{1+\dfrac{\alpha^2}{r^2}\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial\hat{z}}\right)^2}} = 0$, т.е. $\left.\dfrac{\partial\omega_1}{\partial n_1}\right|_{\partial\Omega_b} = 1$, где n_1 — внутренняя нормаль к $\partial\Omega_b$, а $\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \hat{z} = z - \alpha arctg\dfrac{y}{x} \end{cases}$. Заметим, что для змеевиков $r \neq 0$.

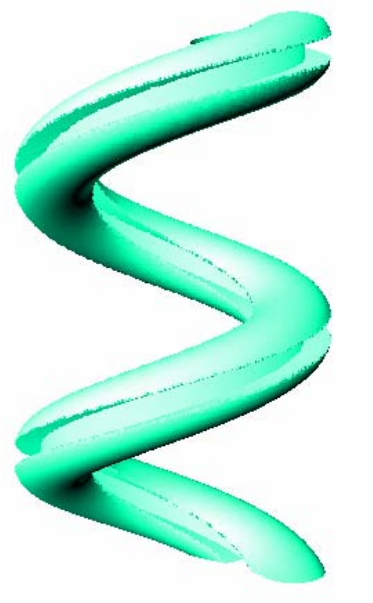


Рис. 1. Фрагмент змеевика сложного поперечного сечения, построенный в системе РАНОК [8].

Рассмотрим неортогональные криволинейные координаты, связанные с декартовыми соотношениями:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = \hat{z} + \alpha\varphi \end{cases} \qquad (5)$$

и выпишем ковариантные $g_{ik} = \sum_l \dfrac{\partial x_l}{\partial x_i}\dfrac{\partial x_l}{\partial x_k}$ и контравариантные $g^{ik} = \dfrac{G^{ik}}{g}$ составляющие метрического тензора

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 + r^2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}; \; g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{r^2} & \dfrac{\alpha}{r^2} \\ 0 & \dfrac{\alpha}{r^2} & \dfrac{\alpha^2+r^2}{r^2} \end{pmatrix}; \qquad g = \det(g_{ik}) = r^2,$$

где G^{ik} — алгебраическое дополнение g_{ik} в определителе $g = \det(g_{ik})$.

Отличными от нуля символы Кристоффеля первого $\Gamma_{i,jk} = \Gamma_{i,kj} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} + \dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} - \dfrac{\partial g_{kj}}{\partial x_i}\right)$ и второго $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj} = g^{il}\Gamma_{l,jk}$ рода будут следующие:

$$\Gamma_{1,22}=\Gamma_{1,22}=-r;\Gamma_{2,12}=\Gamma_{2,21}=r;\Gamma^1_{22}=\Gamma^1_{22}=-r;\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\frac{1}{r}.$$

Уравнение Навье-Стокса в обобщенных координатах для установившегося движения несжимаемой вязкой жидкости в случае отсутствия массовых сил имеет вид:

$$\rho V^k V^i_{;k}=-g^{ik}\frac{\partial P}{\partial x^k}+\mu g^{km}\left(V^i_{;m}\right)_{;k} \qquad (6)$$

Вычисления для первых производных $V^i_{,k}=\frac{\partial V^i}{\partial x^k}+V^j\Gamma^i_{jk}$ дают:

$$V^1_{,1}=\frac{\partial V^r}{\partial r};\ V^1_{,2}=\frac{\partial V^r}{\partial\varphi}-V^\varphi r;\ V^1_{,3}=\frac{\partial V^r}{\partial z};\ V^2_{,1}=\frac{\partial V^\varphi}{\partial r}+\frac{V^\varphi}{r};\ V^2_{,2}=\frac{\partial V^\varphi}{\partial\varphi}+\frac{V^r}{r};$$

$$V^2_{,3}=\frac{\partial V^\varphi}{\partial z};\ V^3_{,1}=\frac{\partial V^z}{\partial r};\ V^3_{,2}=\frac{\partial V^z}{\partial\varphi};\ V^3_{,3}=\frac{\partial V^z}{\partial z}.$$

(Здесь и ниже для простоты записи под z подразумевается $\hat{z}$.)

Вычисления для вторых производных $\left(V^i_{,m}\right)_{,k}=\frac{\partial V^{,i}_{,m}}{\partial x^k}+V^j_{,m}\Gamma^i_{jk}-V^i_{,j}\Gamma^j_{mk}$ дают:

$$\left(V^1_{,1}\right)_{,1}=\frac{\partial V^{,1}_{,1}}{\partial x^1}=\frac{\partial^2 V^r}{\partial r^2};\left(V^1_{,2}\right)_{,2}=\frac{\partial V^1_{,2}}{\partial x^2}-V^2_{,2}r+V^1_{,1}r=\frac{\partial^2 V^r}{\partial\varphi^2}-2r\frac{\partial V^\varphi}{\partial\varphi}-V^r+r\frac{\partial V^r}{\partial r};$$

$$\left(V^1_{,2}\right)_{,3}=\left(V^1_{,3}\right)_{,2}=\frac{\partial V^1_{,2}}{\partial x^3}=\frac{\partial^2 V^r}{\partial\varphi\partial z}-r\frac{\partial V^\varphi}{\partial z};\left(V^1_{,3}\right)_{,3}=\frac{\partial V^1_{,3}}{\partial x^3}=\frac{\partial^2 V^r}{\partial z^2};$$

$$\left(V^2_{,1}\right)_{,1}=\frac{\partial V^{,2}_{,1}}{\partial x^1}+\frac{V^2_{,1}}{r}=\frac{\partial^2 V^\varphi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial V^\varphi}{\partial r};$$

$$\left(V^2_{,2}\right)_{,2}=\frac{\partial V^2_{,2}}{\partial x^2}+\frac{V^1_{,2}}{r}+V^2_{,1}r=\frac{\partial^2 V^\varphi}{\partial\varphi^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial V^r}{\partial\varphi}+r\frac{\partial V^\varphi}{\partial r};$$

$$\left(V^2_{,2}\right)_{,3}=\left(V^2_{,3}\right)_{,2}=\frac{\partial V^2_{,2}}{\partial x^3}=\frac{\partial^2 V^\varphi}{\partial\varphi\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial V^r}{\partial z};\left(V^2_{,3}\right)_{,3}=\frac{\partial V^2_{,3}}{\partial x^3}=\frac{\partial^2 V^\varphi}{\partial z^2};\left(V^3_{,1}\right)_{,1}=\frac{\partial V^{,3}_{,1}}{\partial x^1}=\frac{\partial^2 V^z}{\partial r^2};$$

$$\left(V^3_{,2}\right)_{,2}=\frac{\partial V^3_{,2}}{\partial x^2}+V^3_{,1}r=\frac{\partial^2 V^z}{\partial\varphi^2}+r\frac{\partial V^z}{\partial r};\left(V^3_{,2}\right)_{,3}=\left(V^3_{,3}\right)_2=\frac{\partial V^3_{,2}}{\partial x^3}=\frac{\partial^2 V^z}{\partial\varphi\partial z};\left(V^3_{,3}\right)_{,3}=\frac{\partial V^3_{,3}}{\partial x^3}=\frac{\partial^2 V^z}{\partial z^2};$$

Таким образом, в нашем случае в криволинейных неортогональных координатах (5) уравнения Навье-Стокса приводятся к виду:

$$V^r\frac{\partial V^r}{\partial r}+V^\varphi\left(\frac{\partial V^r}{\partial\varphi}-V^\varphi r\right)+V^z\frac{\partial V_r}{\partial z}=$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{\mu}{\rho}\left[\frac{\partial^2V^r}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2V^r}{\partial\varphi^2}-2r\frac{\partial V^\varphi}{\partial\varphi}-V^r+r\frac{\partial V^r}{\partial r}\right)-\frac{2\alpha}{r^2}\left(\frac{\partial^2V^r}{\partial\varphi\partial z}-r\frac{\partial V^\varphi}{\partial z}\right)+\frac{\alpha^2+r^2}{r^2}\frac{\partial^2V^r}{\partial z^2}\right];$$

$$V^r\left(\frac{\partial V^\varphi}{\partial r}+\frac{V^\varphi}{r}\right)+V^\varphi\left(\frac{\partial V^\varphi}{\partial\varphi}+\frac{V^r}{r}\right)+V^z\frac{\partial V^\varphi}{\partial z}=$$

$$=-\frac{1}{r^2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial\varphi}+\frac{\alpha}{r^2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\mu}{\rho}\left[\frac{\partial^2V^\varphi}{\partial r^2}+\frac{3}{r}\frac{\partial V^\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2V^\varphi}{\partial\varphi^2}-\frac{2\alpha}{r^2}\left(\frac{\partial^2V^\varphi}{\partial\varphi\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial V^r}{\partial z}\right)+\frac{\alpha^2+r^2}{r^2}\frac{\partial^2V^\varphi}{\partial z^2}+\frac{2}{r^3}\frac{\partial V^r}{\partial\varphi}\right];$$

$$V^r\frac{\partial V^z}{\partial r}+V^\varphi\frac{\partial V^z}{\partial\varphi}+V^z\frac{\partial V^z}{\partial z}=$$

$$=\frac{\alpha}{r^2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial\varphi}-\frac{\alpha^2+r^2}{r^2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\mu}{\rho}\left[\frac{\partial^2V^z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2V^z}{\partial\varphi^2}+r\frac{\partial V^z}{\partial r}\right)-\frac{\alpha}{r^2}\frac{\partial^2V^z}{\partial\varphi\partial z}+\frac{\alpha^2+r^2}{r^2}\frac{\partial^2V^z}{\partial z^2}\right]$$

Подставляя физические компоненты вектора скорости $\breve{V}_r=V^r;\ \breve{V}_\varphi=\sqrt{\alpha^2+r^2}V^\varphi;\ \breve{V}_z=V^z$ и переходя к безразмерному виду, имеем:

$$\begin{cases}\left(\vec{V}\nabla\right)\breve{V}^r-\dfrac{\breve{V}^{\varphi\,2}r}{\alpha^2+r^2}=-Eu\dfrac{\partial P}{\partial r}+\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left[\Delta\breve{V}^r+\dfrac{2}{r\sqrt{\alpha^2+r^2}}\left(\alpha\dfrac{\partial\breve{V}^\varphi}{\partial z}-\dfrac{\partial\breve{V}^\varphi}{\partial\varphi}\right)-\dfrac{\breve{V}^r}{r^2}\right];\\ \left(\vec{V}\nabla\right)\breve{V}^\varphi+\dfrac{\breve{V}^r\breve{V}^\varphi\left(r^2+2\alpha^2\right)}{r\left(\alpha^2+r^2\right)}=Eu\sqrt{\alpha^2+r^2}\left(-\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial P}{\partial\varphi}+\dfrac{\alpha}{r^2}\dfrac{\partial P}{\partial z}\right)+\\ +\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left[\Delta\breve{V}^\varphi+\dfrac{2\alpha^2}{r\left(\alpha^2+r^2\right)}\dfrac{\partial\breve{V}^\varphi}{\partial r}-\dfrac{4\alpha^2+r^2}{\left(\alpha^2+r^2\right)^2}\breve{V}^\varphi-\dfrac{2\sqrt{\alpha^2+r^2}}{r^3}\left(\alpha\dfrac{\partial\breve{V}^r}{\partial z}+\dfrac{\partial\breve{V}^r}{\partial\varphi}\right)\right];\\ \left(\vec{V}\nabla\right)\breve{V}^z=Eu\left(\dfrac{\alpha}{r^2}\dfrac{\partial P}{\partial\varphi}-\dfrac{\alpha^2+r^2}{r^2}\dfrac{\partial P}{\partial z}\right)+\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left[\Delta\breve{V}^z+\dfrac{\alpha}{r^2}\dfrac{\partial^2\breve{V}^z}{\partial\varphi\partial z}\right].\end{cases}\qquad(7)$$

где

$$\left(\vec{V}\nabla\right)f=\breve{V}^r\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\breve{V}^\varphi}{\sqrt{\alpha^2+r^2}}\frac{\partial f}{\partial\varphi}+\breve{V}^z\frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\Delta u=\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}-\frac{2\alpha}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi\partial z}+\frac{\alpha^2+r^2}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial z^2}.$$

(Заметим, что при $\alpha=0$ получаем уравнения в цилиндрической системе координат.)

Граничные условия формулируются как условие прилипания частиц жидкости к твердой стенке. Это означает отсутствие как нормальной к твердой поверхности относительной скорости между частицами жидкости и близлежащими точками поверхности , так и касательных составляющих относительной скорости т.е. отсутствие скорости скольжения жидкости по поверхности. Таким образом

$$\vec{V}\Big|_{\partial\Omega}=0\qquad(8)$$

Уравнение неразрывности движения имеет вид:

$$div\vec{V} \equiv \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|g|}V^i\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x^1}\left(rV^1\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(V^2\right) + \frac{\partial}{\partial x^3}\left(V^3\right) =$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\breve{V}^r\right) + \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + r^2}}\frac{\partial \breve{V}^\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \breve{V}^z}{\partial z} = 0$$

По известному распределению скоростей распределение давления в жидкости может быть найдено путем решения уравнения типа Пуассона, которое получается применением к уравнению Навье-Стокса операции div.

$$-\Delta P = div\left(\rho\left(\vec{V}\nabla\right)\vec{V}\right) - div\left(\mu\Delta\vec{V}\right)$$

Так как $\Delta\vec{V} = \nabla div\vec{V} - rotrot\vec{V}$, $div\vec{V} = 0$, $divrot\vec{A} = 0$, то $div\Delta\vec{V} = 0$, и, следовательно, $-\Delta P = \rho\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\sqrt{g}\left(V^k V^i_{,k}\right)\right]$

$$-\Delta P = \rho\frac{1}{\sqrt{g}}\left\{\left(V^k V^i_{,k}\right)\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^i} + \sqrt{g}V_{,i}{}^k V^i_{,k} + \sqrt{g}V^k\left(V,^i_k\right)_{,i}\right\}$$

Так как $\left(V,^i_k\right)_{,i} = \left(V,^i_i\right)_{,k}$, а $\left(V,^i_i\right) = 0$, то

$$-\Delta P = \rho\left\{\frac{1}{\sqrt{g}}\left(V^k V^i_{,k}\right)\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^i} + V_{,i}{}^k V^i_{,k}\right\}.$$

В нашем случае $g = r^2$, и поэтому

$$-\Delta P = \rho\left\{\frac{1}{r}\left(V^k V^1_{,k}\right) + V_{,i}{}^k V^i_{,k}\right\}$$

$$-\frac{1}{\rho}\Delta P = \frac{1}{r}\left(V^r\frac{\partial V^r}{\partial r} + V^\varphi\left(\frac{\partial V^r}{\partial\varphi} - V^\varphi r\right) + V^z\frac{\partial V_r}{\partial z}\right) +$$

$$+2\left(\left(\frac{\partial V^\varphi}{\partial r} + \frac{V^\varphi}{r}\right)\left(\frac{\partial V^r}{\partial\varphi} - V^\varphi r\right) + \frac{\partial V^z}{\partial r}\frac{\partial V^r}{\partial z} + \frac{\partial V^z}{\partial\varphi}\frac{\partial V^\varphi}{\partial z} - \frac{\partial V^r}{\partial r}\left(\frac{\partial V^\varphi}{\partial\varphi} + \frac{V^r}{r}\right) - \right. \qquad (9)$$

$$\left. - \frac{\partial V^z}{\partial z}\left(\frac{\partial V^\varphi}{\partial\varphi} + \frac{V^r}{r}\right) - \frac{\partial V^r}{\partial r}\frac{\partial V^z}{\partial z}\right)$$

Граничное условие:

$$\left.\frac{\partial P}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \left(\nabla P\cdot\nabla\omega\right)\Big|_{\partial\Omega} = g_{ik}g^{ij}g^{km}\left.\frac{\partial P}{\partial x^j}\frac{\partial\omega}{\partial x^m}\right|_{\partial\Omega} =$$

$$= \frac{\partial P}{\partial r}\frac{\partial\omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial P}{\partial\varphi}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi} - \frac{\alpha}{r^2}\left(\frac{\partial P}{\partial\varphi}\frac{\partial\omega}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\right) + \left.\frac{\alpha^2 + r^2}{r^2}\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial\omega}{\partial z}\right|_{\partial\Omega} = \qquad (10)$$

$$= \mu\left[\Delta\breve{V}^r + \frac{2}{r\sqrt{\alpha^2 + r^2}}\left(\alpha\frac{\partial\breve{V}^\varphi}{\partial z} - \frac{\partial\breve{V}^\varphi}{\partial\varphi}\right)\right]\frac{\partial\omega}{\partial r} +$$

$$+\mu\left[\Delta\breve{V}^\varphi + \frac{2\alpha^2}{r\left(\alpha^2 + r^2\right)}\frac{\partial\breve{V}^\varphi}{\partial r} - \frac{2\sqrt{\alpha^2 + r^2}}{r^3}\left(\alpha\frac{\partial\breve{V}^r}{\partial z} + \frac{\partial\breve{V}^r}{\partial\varphi}\right)\right]\frac{\partial\omega}{\partial\varphi} + \mu\left[\Delta\breve{V}^z + \frac{\alpha}{r^2}\frac{\partial^2\breve{V}^z}{\partial\varphi\partial z}\right].\frac{\partial\omega}{\partial z}$$

Для разрешимости задачи (9) при условии (10), т.е. неоднородной задачи Неймана $\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = f(r,\varphi,z)$ для уравнения Пуассона $-\Delta p = F(r,\varphi,z)$ необходимо выполнение условия:

$$\int_{\Omega} F d\Omega = \int_{\partial\Omega} f d\partial\Omega, \tag{11}$$

Но так как $\vec{F} = div\left(\rho\left(\vec{V}\nabla\right)\vec{V} + \mu\Delta\vec{V}\right)$, а $f = \left(\left(\rho\left(\vec{V}\nabla\right)\vec{V} + \mu\Delta\vec{V}\right) * \vec{n}\right)$, имеем

$$\int_{\Omega} div\left(\left(\vec{V} * \nabla\right)\vec{V} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\vec{V}\right)d\Omega = \int_{\partial\Omega}\left(\left(\left(\vec{V} * \nabla\right)\vec{V} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\vec{V}\right) * \vec{n}\right)d\partial\Omega, \tag{12}$$

то есть формулу Остроградского:

$$\int_{\Omega} div\vec{\Psi} d\Omega = \int_{\partial\Omega}\left(\vec{\Psi} * \vec{n}\right)d\partial\Omega,$$

которая справедлива для любого $\vec{\Psi}$, а, следовательно, и для любого вектора скорости, т.е. условие выполняется автоматически.

Так как вектор скорости направлен по касательной к линии тока, то для змеевика постоянного поперечного сечения положим: $V^r = 0;\ V^z = 0$. Тогда из уравнения неразрывности движения получим:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + r^2}}\frac{\partial \breve{V}_{\varphi}}{\partial\varphi} = 0;$$

Следовательно, $\breve{V}^{\varphi} = \breve{V}^{\varphi}(r,z)$.

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + r^2}\frac{\partial P}{\partial\varphi}$$

Тогда:
$$\mu\left[\Delta\breve{V}^{\varphi} + \frac{2\alpha^2}{r\left(\alpha^2 + r^2\right)}\frac{\partial\breve{V}^{\varphi}}{\partial r} - \frac{4\alpha^2 + r^2}{\left(\alpha^2 + r^2\right)^2}\breve{V}^{\varphi}\right] = -\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + r^2}}\frac{\partial P}{\partial\varphi}; \tag{13}$$

$$V^{\varphi}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{14}$$

$$-\frac{1}{\rho}\Delta P = -\frac{3\alpha^2 + r^2}{\left(\alpha^2 + r^2\right)^2}V^{\varphi 2} - \frac{2r}{\alpha^2 + r^2}V^{\varphi}\frac{\partial V^{\varphi}}{\partial r} \tag{15}$$

$$\left.\frac{\partial P}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \frac{2\alpha\mu}{r\sqrt{\alpha^2 + r^2}}\frac{\partial V^{\varphi}}{\partial z}\frac{\partial\omega}{\partial r} \tag{16}$$

Таким образом, от трехмерных краевых задач (7)-(10) приходим к двухмерным задачам (13)-(16), для решения которых могут быть применены методы наименьших квадратов или Бубнова-Галеркина для (13)-(14) и метод Ритца для (15)-(16) на основе теории R-функций [4]. Следует отметить, что вывод системы (7) в криволинейных неортогональных координатах позволит получать решения существенно трехмерных задач. Использование метода R-функций дает возможность рассматривать змеевики неклассических поперечных сечений, строить нормализованные уравнения их поверхностей и структуры решений, точно удовлетворяющие граничным условиям разных типов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М., Наука, 1970. — 904 с.

2. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. Харьков, Вища школа, 1978. — 216 с.

3. Халатов А.А., Авраменко А.А., Шевчук И.В. Теплообмен и гидродинамика в полях центробежных массовых сил. В 4-х т. – Киев, Ин-т техн.теплофизики НАН Украины, 2000. -Т.3: Закрученные потоки. – 474 с.

4. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые её приложения. К., Наук. думка, 1982. – 552 с.

5. Лурье А.И., Джанелидзе Г.Ю. Задача Сен-Венана для естественно-скрученных стержней // ДАН СССР, 1939, № 1, т.XXIV, с. 23-26.

6. Максименко-Шейко К.В. Исследование течения несжимаемой вязкой жидкости в скрученных каналах сложного профиля методом R-функций. Проблемы машиностроения, 2001, т.4, №3-4, с.108-116.

7. Максименко-Шейко К.В., Рвачев В.Л. Шейко Т.И. Математические модели физических полей в скрученных цилиндрах произвольного сечения. Вестник Запорожского государственного университета, 2001, №1, с.54-60.

8. Максименко-Шейко К.В., Шейко Т.И. Математические модели физических полей в змеевиках произвольного сечения. Вестник Запорожского государственного университета, 2002, №2, с.65-74.

9. Рвачев В.Л., Толок А.В., Уваров Р.А., Шейко Т.И. Новые подходы к построению уравнений трехмерных локусов с помощью R-функций. // Вестник Запорожского государственного университета, 2000, №2, с.119-130.

10. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М., Наука, 1970. – 512 с.

11. Михлин С.Г. Прямые методы в метематической физике. – М.-Л., ГИТТЛ, 1950. – 428с.

12. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М., Л., Гостехиздат, 1950. – 695 с.