УДК 517.929.7

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ІНДУКЦІЙНОГО НАГРІВУ РУХОМОГО ТІЛА

*Ляшенко В.П., к. ф.-м.н., професор, Кирилаха Н.Г., старший викладач

**Кременчуцький державний політехнічний університет,*
Інститут економіки та нових технологій

Розглядається задача на спряження визначення температурного розподілу у двошаровому рухомому циліндрі з джерелами тепла, що діють у поверхневому шарі. Розглядається нелокальна інтегральна умова та умова імпедансного типу на границі циліндрів.

Ключові слова: задача на спряження, нелокальна інтегральна умова, умова імпедансного типу.

Ляшенко В.П., Кирилаха Н.Г. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИНДУКЦИОННОГО НАГРЕВА ПОДВИЖНОГО ТЕЛА / Кременчугский государственный политехнический университет, Институт экономики и новых технологий, Украина

Рассматривается задача на сопряжение определения температурного распределения в двухслойном цилиндре с источниками тепла, действующими в поверхностном слое. Применяется нелокальное интегральное условие и условие импедансного типа на границе цилиндров.

Ключевые слова: задача на сопряжение, нелокальное интегральное условие, условие импедансного типа.

Lyashenko V., Kirilaha N. MATHEMATICAL MODEL OF INDUCTION HEAT OF A RELATIVE FRAME SKEW FIELD / Kremenchuk State polytechnic University, Institute of economics and advanced technologies, Kremenchuk, Ukraine

The problem on conjugation of definition temperature allocation in the two-sheeted relative frame cylinder with radiants of heat is considered which work in a surface stratum. The nonlocal integrated condition and condition of an impedance type on boundary of cylinders is applied.

Key words: a problem on conjugation, nonlocal integrated condition, condition of an impedance type.

При нагріванні зразків циліндричної форми індукційним способом джерела тепла за рахунок скін-ефекту зосереджені в поверхневому шарі товщиною Δ, а далі, у напрямку радіуса, нагрівання йде шляхом передачі тепла теплопровідністю [1]. Математична модель температурного поля зони нагріву середовища індукційним способом може бути представлена як розігрів двошарового циліндра одночасно внутрішніми і зовнішніми джерелами тепла. При цьому в зовнішньому циліндрі з товщиною стінки Δ діє джерело тепла потужністю w, а до внутрішнього циліндра тепло передається за рахунок теплопровідності.

Математична модель такого температурного розподілу приводить до розв'язання задачі на спряження для рівняння теплопровідності $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$,

де Ω: $\{0 < z < L, \quad 0 < r < r_0 - \Delta, \quad r_0 - \Delta < r < r_0\}$, Γ_i - границі циліндрів [2] .

$$\lambda \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - vc\rho_n \frac{\partial T}{\partial z} = \begin{cases} \dfrac{J^2 \rho_0 (1+\beta T)}{\pi^2 S^2}, & r - \Delta \le r < r_0, \\ 0, & 0 < r < r_0 - \Delta \end{cases} \tag{1}$$

$$0 < z < L,$$

$$T(r,0) = T_0, \qquad T(r,L) = T_L, \tag{2}$$

$$\frac{\partial T(r_0 - \Delta - 0, z)}{\partial r} = \frac{\partial T(r_0 - \Delta + 0, z)}{\partial r}, \tag{3}$$

$$T(r_0 - \Delta - 0, z) = T(r_0 - \Delta + 0, z), \tag{4}$$

$$\lambda \frac{\partial T(r_0, z)}{\partial r} = -\alpha (T - T_c), \qquad \frac{\partial T(0,z)}{\partial r} = 0. \tag{5}$$

Найбільший інтерес представляє температурний розподіл у внутрішньому циліндрі. Для визначення теплового потоку на поверхні внутрішнього циліндра застосуємо оператор усереднення

$u(z)=\frac{2}{S}\int\limits_{r_0-\Delta}^{r_0}T(r,z)rdr$ до рівняння (1) і з врахуванням умов на границі області (3) отримаємо:

$$\lambda(r_0-\Delta)\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=r_0-\Delta+0}=\frac{\lambda S}{2}\frac{d^2u}{dz^2}-\frac{1}{2}vc\rho_n\frac{du}{dz}+\frac{J^2\rho_0+2\pi^2Sr_0\alpha T_c}{2\pi^2S}+\frac{J^2\rho_0\beta-2\pi^2Sr_0\alpha}{2\pi^2S}u \quad (6)$$

Якщо розділити обидві частини рівняння (6) на $(r_0-\Delta)$, скористатися умовою спряження (4), і прийняти $u(z)\approx T(r_0-\Delta,z)$, прийдемо до крайової умови на границі внутрішнього і зовнішнього циліндрів:

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=r_0-\Delta-0}=\frac{\lambda S}{2(r_0-\Delta)}\frac{d^2T}{dz^2}-\frac{vc\rho_nS}{2(r_0-\Delta)}\frac{dT}{dz}+\frac{J^2\rho_0+2\pi^2Sr_0\alpha T_c}{2\pi^2S(r_0-\Delta)}+\frac{J^2\rho_0\beta-2\pi^2Sr_0\alpha}{2\pi^2S(r_0-\Delta)}T\,. \quad (7)$$

Таким чином задача (1)- (5) звелась до задачі для внутрішнього циліндра з крайовою умовою імпедансного типу на його поверхні.

$$\lambda\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial T}{\partial r})+\lambda\frac{\partial^2T}{\partial z^2}-vc\rho_n\frac{\partial T}{\partial z}=0\,, \quad (8)$$

$$0<r<r_0-\Delta\,,\qquad 0<z<L$$

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=r_0-\Delta-0}=\frac{\lambda S}{2(r_0-\Delta)}\frac{d^2T}{dz^2}-\frac{vc\rho_nS}{2(r_0-\Delta)}\frac{dT}{dz}+\frac{J^2\rho_0+2\pi^2Sr_0\alpha T_c}{2\pi^2S(r_0-\Delta)}+\frac{J^2\rho_0\beta-2\pi^2Sr_0\alpha}{2\pi^2S(r_0-\Delta)}T\,,\ \frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=0}=0 \quad (9)$$

Після переходу до безрозмірних координат і параметрів і застосування заміни $u=\theta(x,\rho)\cdot e^{\frac{Pe}{2}x}$ задача набуде вигляду:

$$\eta^2\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho^2}+\eta^2\frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial\rho}+\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}-\frac{Pe^2}{4}\theta=0\,,\quad 0<\rho<1,\quad 0<x<1 \quad (10)$$

$$\theta(\rho,0)=0\,,\qquad \theta(\rho,1)=uL\cdot e^{-\frac{Pe}{2}}=\theta_L \quad (11)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=0}=0\,,\qquad \frac{\partial\theta}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=1}=(A\frac{Pe^2}{4}-B\frac{Pe}{2}+C)\theta+A\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+De^{-\frac{Pe}{2}x} \quad (12)$$

де

$$\rho=\frac{r}{r_0-\Delta}\,,\quad x=\frac{z}{L}\,,\quad u=\frac{T-T_1}{T_c}\,,\quad uL=\frac{T_L-T_1}{T_c}\,,\quad Pe=\frac{vc\rho_nL}{\lambda}\,,\quad \eta=\frac{L}{r_0-\Delta} \quad (13)$$

$$A=\frac{S}{2L^2}\,,\quad B=\frac{vc\rho_nS}{2\lambda L}\,,\quad C=\frac{I^2\rho_0\beta-2\pi^2r_0S\alpha}{2\pi^2S\lambda}\,,$$
$$D=\frac{I^2\rho_0\beta T_1+I^2\rho_0+2\pi^2r_0S\alpha(T_c-T_1)}{2\pi^2S\lambda T_c} \quad (14)$$

Розв'язок задачі (10)- (12) шукаємо у вигляді суми [3]: $\theta(x,\rho)=\theta_1(x,\rho)+\theta_2(x,\rho)$. При цьому $\theta_1(x,\rho)$ і $\theta_2(x,\rho)$ розв'язками задач є

$$\eta^2\frac{\partial^2\theta_1}{\partial\rho^2}+\eta^2\frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta_1}{\partial\rho}+\frac{\partial^2\theta_1}{\partial x^2}-\frac{Pe^2}{4}\theta_1-\frac{Pe^2}{4}\theta_L\cdot x=0,\quad 0<\rho<1,\quad 0<x<1, \tag{15}$$

$$\theta_1(\rho,0)=0,\qquad \theta_1(\rho,1)=0, \tag{16}$$

$$\left.\frac{\partial\theta_1}{\partial\rho}\right|_{\rho=0}=0$$

$$\left.\frac{\partial\theta_1}{\partial\rho}\right|_{\rho=1}=(A\frac{Pe^2}{4}-B\frac{Pe}{2}+C)\theta_1+A\frac{\partial^2\theta_1}{\partial x^2}+De^{-\frac{Pe}{2}x}+(A\frac{Pe^2}{4}-B\frac{Pe}{2}+C)\theta_L x, \tag{17}$$

$$\eta^2\frac{\partial^2\theta_2}{\partial\rho^2}+\eta^2\frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta_2}{\partial\rho}+\frac{\partial^2\theta_2}{\partial x^2}=0,\quad 0<\rho<1,\quad 0<x<1, \tag{18}$$

$$\theta_2(\rho,0)=0,\qquad \theta_2(\rho,1)=\theta_L, \tag{19}$$

$$\left.\frac{\partial\theta_2}{\partial\rho}\right|_{\rho=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial\theta_2}{\partial\rho}\right|_{\rho=1}=0, \tag{20}$$

Розв'язком задачі (18)-(20) є функція $\theta_2(\rho,x)=\theta_L\cdot x$.

Для задачі (15)- (17) застосуємо перетворення Фур'є :

$$\widetilde{\Theta}=\int_0^1\theta_1(\rho,x)K(\beta_m,x)dx\ , \tag{21}$$

де ядро перетворення $K(\beta_m,x)=\sqrt{2}\sin(\beta_m\cdot x)$, власні числа β_m визначаються з рівняння $tg(\beta_m)=0$, тобто $\beta_m=\pi m$ [3]. У просторі зображень для кожного m отримаємо розв'язок у вигляді:

$$\widetilde{\Theta}_m(\rho)=\frac{(T_mR_m+P_mS_m)\eta}{(\sqrt{P_m}I_1(\frac{\sqrt{P_m}}{\eta})-T_mI_0(\frac{\sqrt{P_m}}{\eta})\cdot\eta)\cdot P_m}I_0(\frac{\sqrt{P_m}}{\eta}\rho) \tag{22}$$

Перехід до оригіналу здійснюється за формулою обертання [3]:

$$\theta_1(\rho,x)=\sum_{m=1}^{\infty}K(\beta_m,x)\cdot\widetilde{\Theta}_m(\rho) \tag{23}$$

У реальних технологічних процесах температура в кінці зони нагріву, як правило, невідома. Тому при моделюванні такого процесу перша крайова умова не завжди адекватно описує температурний розподіл. Замість першої крайової умови введемо нелокальну інтегральну умову, що визначає баланс енергії зони відпалу.

$$\begin{aligned}&c\rho_n\int_0^L\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0-\Delta}[T_1(r,z)-T_0]rdrd\varphi dz+c\rho_n\int_0^L\int_0^{2\pi}\int_{r_0-\Delta}^{r_0}[T_2(r,z)-T_0]rdrd\varphi dz+\\&+\frac{r_0\alpha L}{\nu}\int_0^L\int_0^{2\pi}[T_2(r,z)-T_c]d\varphi dz=\frac{J^2\rho_0L}{\pi^2S^2\nu}\int_0^L\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0}[1+\beta T_2(r,z)]rdrd\varphi dz,\end{aligned} \tag{24}$$

де $T_1(r,z)-$ температура внутрішнього циліндра, $T_2(r,z)-$ температура зовнішнього циліндра. Після переходу до безрозмірних координат, перетворень, використовуючи умову спряження , задачу визначення температурного розподілу у внутрішньому циліндрі з використанням нелокальної інтегральної умови можна записати у вигляді

$$\eta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \eta^2 \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - Pe\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0 < \rho < 1, \quad 0 < x < 1, \tag{25}$$

$$u(\rho,0) = 0\ , \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=0} = 0\ , \tag{26}$$

$$\int_0^1\int_0^1 u(\rho,x)\rho d\rho dx = M + N\int_0^1 u(1,x)dx\ , \tag{27}$$

де $$M = \frac{I^2\rho_0 L(1+\beta T_0) + 2\pi^2 Sr_0\alpha L(T_c - T_0)}{2\pi^2 Svc\rho_n T_c (r_0 - \Delta)^2},$$

$$N = \frac{I^2\rho_0 L\beta - \pi^2 Svc\rho_n\Delta(2r_0 - \Delta) - 2\pi^2 Sr_0\alpha L}{2\pi^2 Svc\rho_n (r_0 - \Delta)^2} \tag{28}$$

Застосуємо метод поділу змінних [3]. Шукаємо розв'язок у вигляді добутку: $u(\rho,x) = T(x)\cdot R(\rho)$. При цьому приходимо до розв'язування звичайних диференціальних рівнянь з параметром μ:

$$\eta^2 R'' + \eta^2\frac{1}{\rho}R' - \mu R = 0 \tag{29}$$

$$T'' - PeT' + \mu T = 0 \tag{30}$$

Загальний розв'язок рівняння (29) має вигляд:

$$R(\rho) = C_{11}I_0(\frac{\sqrt{\lambda}\rho}{\eta}) + C_{12}K_0(\frac{\sqrt{\lambda}\rho}{\eta}),. \tag{31}$$

де $I_0(x),\quad K_0(x)$ - функції Бесселя.

З крайової умови (26) випливає, що $\left.\frac{\partial R}{\partial \rho}\right|_{\rho=0} = 0$, а це можливо при $C_{12} = 0$. Нетривіальні розв'язки рівняння (30), з урахуванням крайової умови (26), існують тільки при $\mu > \frac{Pe^2}{4}$.

$$T(x) = C_{21}\sin(\frac{\sqrt{\left|Pe^2 - 4\mu\right|}}{2}x) + C_{22}\cos(\frac{\sqrt{\left|Pe^2 - 4\mu\right|}}{2}x)\ , \tag{32}$$

а з (26) випливає, що $T(0) = 0$, тому приймаємо $C_{22} = 0$.

Отже, розв'язок рівняння (25), що задовольняє умовам (26) має вигляд

$$u(\rho,x) = C\cdot I_0(\frac{\sqrt{\mu}\rho}{\eta})e^{\frac{Pe}{2}x}\sin(\sigma x)\ , \tag{33}$$

де $$\sigma = \frac{\sqrt{\left|Pe^2 - 4\mu\right|}}{2}.$$

З іншого боку, зрозуміло, що шукана функція приймає найбільше значення на границі області при $x = 1$, тому приймаємо $\sigma = \frac{\pi}{2}$, тоді $\mu = \frac{Pe^2 + \pi^2}{4}$. Для визначення константи C у виразі (33) зажадаємо виконання умови (27). Після перетворень маємо

$$C = \frac{M(Pe^2 + 4\sigma^2)}{4(e^{\frac{Pe}{2}}\frac{Pe}{2} + \frac{\pi}{2})(\frac{\sqrt{\mu}}{\eta} I_1(\frac{\sqrt{\mu}}{\eta}) - NI_0(\frac{\sqrt{\mu}}{\eta}))} \tag{34}$$

Підставивши (34) в (33), отримаємо розв'язок задачі (25)- (27) у вигляді

$$u(\rho, x) = \frac{M(Pe^2 + 4\sigma^2)}{4(e^{\frac{Pe}{2}}\frac{Pe}{2} + \frac{\pi}{2})(\frac{\sqrt{\mu}}{\eta} I_1(\frac{\sqrt{\mu}}{\eta}) - NI_0(\frac{\sqrt{\mu}}{\eta}))} I_0(\frac{\sqrt{\mu}\rho}{\eta}) e^{\frac{Pe}{2}x} \sin(\sigma x) \tag{35}$$

На рис. 1 зображені графіки температурних розподілів, отримані по розв'язках задачі (8)-(9) (пунктирна лінія) і розв'язкам (35) задачі (25)- (27) (суцільна лінія). Аналізуючи дані чисельних експериментів, можна стверджувати, що розв'язок задачі з інтегральною умовою (27) більш точно визначає температурний розподіл.

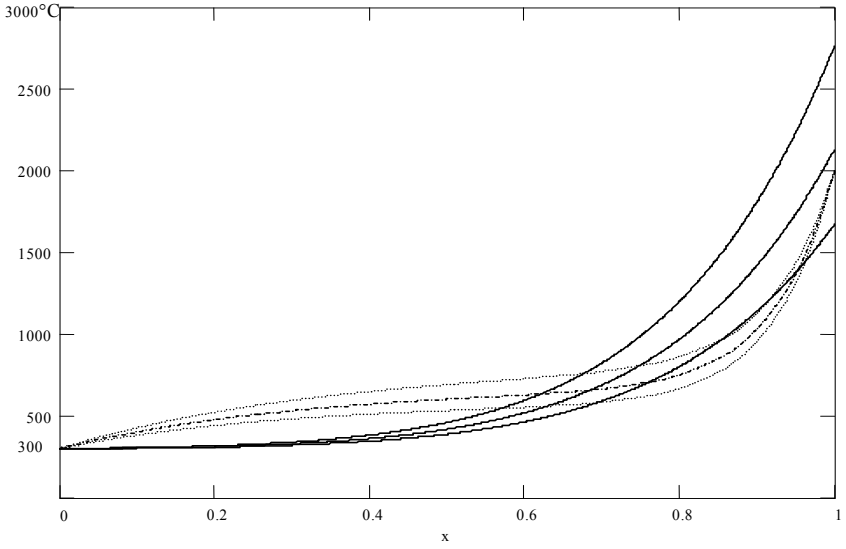


Рис.1 Графіки температурних розподілів при різних значеннях сили струму
Tc=298°K, T_0=300°K, T_1=2000°K, c=140Дж/кг·К,
α=90 Ватт/м²·К, λ=126 Ватт/м·К, ρ_n=19.1·10³кг/м³,
r_0=0.005m, Δ=0.001m, L=0.5m,
v=0.0009m/c,
1)I=320A, 2)I=350 A, 3)I=380A

Застосування нелокальної інтегральної умови розширює можливість моделювання процесів з урахуванням законів збереження енергії.

ЛІТЕРАТУРА

1. Свенчанский А.Д. Перспективы развития электротермии и электротермического оборудования. //Современное состояние электропечестроения. -М.: Информэлектро, 1975. - 68 с.

2. Ляшенко В.П. Индукционный нагрев движущейся проволоки // Нелинейные дифференциальные уравнения в прикладных задачах. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1984.

3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1972, -735 с.