УКД 539.3

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАНЬ ПЛАСТИНИ В УМОВАХ АГРЕСИВНОГО СЕРЕДОВИЩА

Лобур О.В., аспірант, *Зайцева Т.А., к.ф.-м.н., доцент, Шишканова С.Ф., д.т.н., доцент

Запорізький державний університет
**Дніпропетровський національний університет*

Із використанням законів динаміки для тіл змінної маси отримано рівняння коливань пластинок в умовах агресивного середовища, знайдені розв'язки цих рівнянь, визначені вирази частот і амплітуд для деяких спеціальних залежностей товщин пластинок від часу.

Ключові слова: математична модель, змінна маса, пластинка, пружність, амплітуда, частота, диференціальне рівняння.

Лобур О.В., *Зайцева Т.А., Шишканова С.Ф. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНКИ В УСЛОВИЯХ АГРЕССИВНОЙ СРЕДЫ / Запорожский государственный университет, *Днепропетровский национальный университет, Украина.

С использованием законов динамики для тел переменной массы получены уравнения колебаний пластинок в условиях агрессивной среды, найдены решения этих уравнений, определены выражения частот и амплитуд для некоторых специальных зависимостей толщин пластинок от времени.

Ключевые слова: математическая модель, переменная масса, пластинка, упругость, амплитуда, частота, дифференциальные уравнения.

Lobur E.V., *Zaytseva T.A., Shyshkanova S.F. MATHEMATICAL MODELING OF PLATE VIBRATION IN AGGRESSIVE SURROUNDING / Zaporizhzhya State University, *Dnepropetrovsk National University, Ukraine.

The equations of plate vibrations in aggressive surrounding are obtained with use of dynamics laws for bodies with variable mass. Their solutions are found. Expressions of frequency and amplitude for some plate thickness-time special relations are defined.

Key words: mathematical models, variable mass, plate, elastic, amplitude, frequency, differential equations.

У багатьох задачах механіки доводиться вивчати рух систем, у яких розміри, отже і маси окремих елементів, є заданими функціями часу. Наприклад, коливна панель із теплозахисним екраном, що обгоряє, плаваюча крижина, маса якої зростає внаслідок намерзання або спадає внаслідок танення, елементи конструкцій в умовах агресивного середовища металургійних і хімічних підприємств, де внаслідок інтенсивної корозії зменшуються розміри конструкції, робочі і напрямівні лопатки компресору і турбіни газотурбінних двигунів, які зазнають корозійно-ерозійного зносу, та ін.

Аналіз впливу інтенсивної корозії на коливання елементів металоконструкцій дозволяє оцінювати і прогнозувати ступінь ерозійно-корозійних пошкоджень за зміненням амплітудно-частотних характеристик елементів конструкцій, що періодично фіксуються вібраційними датчиками.

Розглянемо малі поперечні коливання круглої пластини, товщина якої є величиною змінною за часом. Припустимо, що нормальні сили в серединній поверхні пластини відсутні. Диференціальне рівняння пружної поверхні пластини в цьому випадку має вигляд [1]

$$D\Delta\Delta w = q\,, \tag{1}$$

де у випадку вільних коливань q - сила інерції, яку для змінної маси представлено виразом [2]

$$q = -m\frac{\partial \upsilon}{\partial t} - (\upsilon - u)\frac{\partial m}{\partial t} \tag{2}$$

при припущенні, що до системи безперервно приєднуються (від'єднуються) частинки нескінченно малих мас таким чином, що швидкості точок системи змінюються неперервно, тоді як швидкості частинок змінюються на скінченну величину в момент їх приєднання (від'єднання) до системи. У виразі (2) через u позначено абсолютну швидкість приєднаних (від'єднаних) частин.

Припустимо, що абсолютна швидкість від'єднаних частин дорівнює нулю, тоді диференціальне рівняння (1) вільних коливань пластини набуде вигляду

$$D\Delta\Delta w + m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial \upsilon}{\partial t}\frac{\partial m}{\partial t} = 0 \tag{3}$$

Тут w - динамічний вгин пластини, m - маса одиниці площини пластини, D - циліндрична жорсткість, t - час роботи пластини в конкретному циклі. Припускаючи, що товщина пластини змінюється за часом, отже і маса одиниці площини пластини та її циліндрична жорсткість є функціями часу, позначимо

$$D = D_0\psi_1(t),\ \ m = m_0\psi_2(t)\ . \tag{4}$$

Подамо шукану функцію вгину $w(r,\varphi,t)$ як добуток у вигляді

$$w(r,\varphi,t) = W(r,\varphi)T(t). \tag{5}$$

Тут $r = \frac{\rho}{r_0}$ - безрозмірна координата, що змінюється повздовж радіуса пластини від нуля до одиниці, r_0 - радіус пластини, ρ,φ - полярні координати. Внесемо вираз (5) до диференціального рівняння (3) і, враховуючи позначення (4), одержимо, що рівняння (3) перетвориться у два самостійні рівняння

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \frac{1}{\psi_2}\frac{d\psi_2}{dt}\frac{dT}{dt} + \frac{\psi_1\omega^2}{\psi_2}T = 0 \tag{6}$$

$$\Delta\Delta W - \lambda^4 W = 0 \tag{7}$$

$$\lambda^4 = \frac{\omega^2 m_0}{r_0^4 D_0}\ . \tag{8}$$

Величина ω визначається, якщо відомі власні значення λ розглядуваної крайової задачі. Припустимо, що пластина затиснена повздовж контуру, тобто

$$W = 0,\ \frac{\partial W}{\partial r} = 0 \text{ при } r = 1\ . \tag{9}$$

Вгин такої пластини є функцією, яка обмежена в центрі пластини і не має особливостей типу зосередженої сили при $r = 0$. Тому розв'язок рівняння (7) має вигляд:

$$W = \left[C_1 J_n(\lambda r) + C_2 I_n(\lambda r)\right]\sin(n\varphi + \alpha), \tag{10}$$

де C_1, C_2 - деякі сталі, $J_n(\lambda r)$, $I_n(\lambda r)$ - функція Бесселя першого роду і модифікована функція Бесселя першого роду індексу n.

Через те, що в нашому випадку пластина затиснена повздовж контуру, з межових умов (9) одержуємо однорідні рівняння першого степеня відносно сталих C_1, C_2. Для того, щоб ця система мала не тривіальні, тобто відмінні від нуля, розв'язки, необхідно, щоб визначник, складений із коефіцієнтів при невідомих, дорівнював нулю, звідки отримуємо:

$$J_n(\lambda_n)I_n'(\lambda_n) - J_n'(\lambda_n)I_n(\lambda_n) = 0\ . \tag{11}$$

Це трансцендентне рівняння має нескінченну множину коренів

$$\lambda_n = \lambda_{1n}, \lambda_{2n}, \ldots$$

де $\lambda_{1n}, \lambda_{2n}, \ldots$ - корені (11) при певному значенні n, які обчислені рядом авторів, таблицю вказаних коренів можна знайти, зокрема, у довіднику [3]. Далі, використовуючи (8), легко виразити ω через корені рівняння (11)

$$\omega(k,n) = r_0^2\lambda_{kn}^2\sqrt{\frac{D_0}{m_0}}\ . \tag{12}$$

Після визначення ω приступимо до розв'язання рівняння (6). Розглянемо випадок, коли товщина пластини h внаслідок дії агресивного середовища з часом змінюється обернено пропорційно часу знаходження пластини в умовах агресивного середовища, тобто

$$h = \frac{h_0}{\beta(\tau + t) + 1}.$$

Тут h_0 - початкова товщина пластини, τ - час перебування пластини в умовах агресивного середовища до початку роботи в конкретному циклі, t - поточний час роботи пластини в конкретному циклі, β - параметр, що визначається експериментально.

Через те, що для пластини

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad m = \gamma h \tag{13}$$

де E - модуль пружності, ν - коефіцієнт Пуассона, γ - щільність пластини, то при прийнятому припущенні, позначаючи через D_0 і m_0 початкові циліндричну жорсткість і масу одиниці площі пластини, одержуємо такі залежності:

$$D = D_0 \frac{1}{[\beta(\tau + t) + 1]^3}, \tag{14}$$

$$m = m_0 \frac{1}{[\beta(\tau + t) + 1]}. \tag{15}$$

З урахуванням залежностей (14), (15) диференціальне рівняння (6) матиме вигляд

$$\frac{d^2T}{dt^2} - \beta \frac{1}{[\beta(\tau + t) + 1]} \frac{dT}{dt} + \frac{\omega^2}{[\beta(\tau + t) + 1]^2} T = 0. \tag{16}$$

Отримане рівняння (16) є рівнянням, яке перетворюється в рівняння Ейлера [4] за допомогою заміни

$$\xi = [\beta(\tau + t) + 1].$$

Тому розв'язок рівняння (16) має вигляд

$$T = A_1(\beta\tau + \beta t + 1)^{1+s} + A_2(\beta\tau + \beta t + 1)^{1-s} \quad \text{при} \quad \beta^2 - \omega^2 > 0, \tag{17}$$

$$T = (\beta\tau + \beta t + 1)[A_1 + A_2 \ln(\beta\tau + \beta t + 1)] \quad \text{при} \quad \beta^2 - \omega^2 = 0 \tag{18}$$

$$T = (\beta\tau + \beta t + 1)[A_1 \cos(s \ln(\beta\tau + \beta t + 1)) + A_2 \sin(s \ln(\beta\tau + \beta t + 1))] \text{ при } \beta^2 - \omega^2 < 0. \tag{19}$$

Тут

$$s = \sqrt{\left|1 - \frac{\omega^2}{\beta^2}\right|}, \tag{20}$$

A_1, A_2 - довільні сталі, що визначаються з початкових умов.

Звичайно β дуже мале, тому практично коливання пластини описуються виразом (19), з якого видно, що амплітуда коливань пластини, що знаходиться в умовах агресивного середовища, зростає з часом [5].

Розглянемо випадок, коли змінюється жорсткість пластини, але маса не змінюється, тобто частинки практично не від'єднуються, як це приблизно буває при корозії, тоді у виразах (4) $\psi_2(t) = C$ і рівняння (6) має вигляд:

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \psi_1 \frac{\omega^2}{C} T = 0. \tag{21}$$

При прийнятому припущенні (14) (відносні зміни жорсткості) диференціальне рівняння (21) перетворюється в рівняння

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \frac{\omega^2}{(\beta\tau + \beta t + 1)^3} T = 0, \tag{22}$$

розв'язок якого представимо у вигляді:

$$T = z\left[C_1 J_1\left(\frac{2\omega}{\beta}\frac{1}{z}\right) + C_2 N_1\left(\frac{2\omega}{\beta}\frac{1}{z}\right)\right], \tag{23}$$

де $z = \sqrt{\beta\tau + \beta t + 1}$,

$J_1\left(\frac{2\omega}{\beta}\frac{1}{z}\right)$, $N_1\left(\frac{2\omega}{\beta}\frac{1}{z}\right)$ - функції Бесселя першого і другого роду першого порядку.

Якщо припустити, що деякі частини від'єднуються з нульовою абсолютною швидкістю, тобто маса і жорсткість змінюються, але швидкість змінення маси мала, що також відбувається при корозії, тоді в рівнянні (6) $\frac{d\psi_2}{dt} = 0$ і рівняння перетворюється в таке

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \frac{\psi_1\omega^2}{\psi_2}T = 0. \tag{24}$$

Коли закони змінення жорсткості і маси (14),(15) залишити такими самими, то рівняння (24) матиме вигляд:

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \frac{\omega^2}{(\beta\tau + \beta t + 1)^2}T = 0 \tag{25}$$

його розв'язком є функції

$$T = C_1(\beta\tau + \beta t + 1)^{\frac{1}{2}+s} + C_2(\beta\tau + \beta t + 1)^{s-\frac{1}{2}} \text{ при } \beta^2 - 4\omega^2 > 0,$$

$$T = \sqrt{\beta\tau + \beta t + 1}\left[C_1 + C_2\ln(\beta\tau + \beta t + 1)\right] \quad \text{при } \beta^2 - 4\omega^2 = 0 \tag{26}$$

$$T = \sqrt{\beta\tau + \beta t + 1}\left[C_1\cos(s\ln(\beta\tau + \beta t + 1)) + C_2\sin(s\ln(\beta\tau + \beta t + 1))\right] \text{ при } \beta^2 - 4\omega^2 < 0.$$

Тут

$$2s = \sqrt{\left|1 - \frac{4\omega^2}{\beta^2}\right|}.$$

Далі розглянемо випадок, коли змінюється маса, але жорсткість залишається незмінною, що можливо в певному наближенні, при коливаннях пластини з теплозахисним екраном, який обгоряє. У цьому випадку в залежностях (4) треба покласти $\psi_1(t) = C$, тоді рівняння (6) майже залишить свій вигляд

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \frac{1}{\psi_2}\frac{d\psi_2}{dt}\frac{dT}{dt} + \frac{C\omega^2}{\psi_2}T = 0. \tag{27}$$

Отримане рівняння (27) при прийнятому законі змінення маси перетворюється в рівняння

$$\frac{d^2T}{dt^2} - \frac{\beta}{(\beta\tau + \beta t + 1)}\frac{dT}{dt} + \omega^2(\beta\tau + \beta t + 1)T = 0, \tag{28}$$

яке має такий розв'язок

$$T = (\beta\tau + \beta t + 1)\left[C_1 J_{2/3}\left(\frac{2}{3}\frac{\omega}{\beta}\sqrt{(\beta\tau + \beta t + 1)^3}\right) + C_2 N_{2/3}\left(\frac{2}{3}\frac{\omega}{\beta}\sqrt{(\beta\tau + \beta t + 1)^3}\right)\right]. \tag{29}$$

Якщо припустити, що жорсткість стала, а маса змінюється, але повільно, тоді в рівнянні (6) треба покласти $\psi_1(t) = C$, $\frac{d\psi_2(t)}{dt} \approx 0$ і при прийнятому припущенні про змінення маси (15) рівняння (6) перетвориться в таке

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \omega^2(\beta\tau + \beta t + 1)T = 0. \quad (30)$$

Розв'язком одержаного рівняння є функції

$$T = \sqrt{\beta\tau + \beta t + 1}\left[C_1 J_{1/3}\left(-\frac{2}{3}\frac{\omega}{\beta}\sqrt{(\beta\tau + \beta t + 1)^3}\right) + C_2 N_{1/3}\left(-\frac{2}{3}\frac{\omega}{\beta}\sqrt{(\beta\tau + \beta t + 1)^3}\right)\right]. \quad (31)$$

Аналогічні випадки розглянуто і при інших степеневих законах змінення товщини пластини, а також при експоненційному законі

$$h = h_0 e^{-\alpha(\tau + t)}, \quad (32)$$

параметр якого α визначається експериментально, τ - час роботи пластини в умовах агресивного середовища до початку роботи в конкретному циклі, t - поточний час роботи в конкретному циклі.

При експоненційному законі (32) змінення товщини пластини рівняння (22), (25), (30) перетворюються у такі відповідно для $k = 3,2,-1$:

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \omega^2 e^{-k\alpha(\tau + t)}T = 0.$$

Таким чином, запропоновано моделі оцінювання і прогнозування ступеня пошкоджень за зміненням амплітудно-частотних характеристик елементів конструкцій, що працюють в умовах агресивного середовища.

ЛІТЕРАТУРА

1. Хронин Д.В. Теория и расчет колебаний в двигателях летательных аппаратов. - М.:Машиностроение, 1970. –412с.
2. Мещерский И.В. Работы по механике тел переменной массы. –М.:ГИТТЛ, 1952. –280с.
3. Янке Е., Эмде В., Леш Ф. Специальные функции. –М.: Наука, 1964. –344с.
4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. –М.:ГИФМЛ, 1961. –704с.
5. Шишканова С.Ф. Аналитические методы оценки параметров колебаний пластинки переменной массы. Вибродиагностика машин и механизмов. Методы и средства: Сб. научн. трудов.-М.-Запорожье, 1987. С.119-123.