УДК 681.142.2

ПОСТРОЕНИЕ РИСУНКА ГРАФА С МИНИМАЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ

Кондратьева Н.А., к.ф.-м.н., доцент, Курапов С.В., к.ф.-м.н., доцент

Запорожский государственный университет

В данной работе рассматривается математическая модель для построения рисунка графа с минимальным числом пересечений. Задача построения рисунка графа с минимальным числом пересечений непланарного графа может быть представлена как поиск (выделение) подмножества циклов из совместного множества единичных циклов и дубль-циклов, достигающих нулевого значения функционала Мак-Лейна, а их количество определяется цикломатическим числом графа за вычетом минимального числа пересекающихся ребер.

Ключевые слова: математическая модель, планарный граф, единичный цикл, дубль-цикл.

Кондрат'єва Н.О., Курапов С.В. ПОБУДОВА РИСУНКА ГРАФА З МІНІМАЛЬНИМ ЧИСЛОМ ПЕРЕТИНАНЬ / Запорізький державний університет, Україна

У даній роботі розглядається математична модель для побудови рисунка графа з мінімальним числом перетинань. Задача побудови рисунка графа з мінімальним числом перетинань непланарного графа може бути подана як пошук (виділення) підмножини циклів із спільної множини одиничних циклів і дубль-циклів, що досягають нульового значення функціонала Мак-Лейна, а їхня кількість визначається цикломатичним числом графа за відрахуванням мінімального числа пересічних ребер.

Ключові слова: математична модель, планарний граф, одиничний цикл, дубль-цикл.

Kondratyeva N.A, Kurapov S.V. CONSTRUCTION OF THE FIGURE OF GRAPH WITH MINIMUM NUMBER OF INTERSECTIONS / Zaporizhzhya State University, Ukraine

In the given paper the mathematical model for the construction of the figure of graph with minimum number of intersections is considered. The problem of construction of the figure of graph with minimum number of intersections of the not planar graph can be submitted as searching (selection) of a subset of cycles from a compatible set of unit cycles and doubles-cycles reaching a zero value of a Mack-Lains' functional, and their amount is defined by cyclomatic number of the graph without minimum number of intersected edges.

Key words: mathematical model, planar graph, unit cycle, double-cycle.

Теория вращений, введенная в [1], позволяет описывать плоский рисунок планарного графа. Однако применить теорию вращений для описания рисунка непланарного графа не удается по двум причинам: во-первых, одно и то же вращение вершин δ неплоского рисунка графа G создает множество рисунков, где существуют различные неоднозначные случаи пересечения ребер; во-вторых, такое вращение индуцирует циклы, включающие в себя одно и тоже ребро дважды при обходе данного цикла, как в прямом, так и в обратном направлении. А именно, второе важно исключить при использовании теоремы Мак-Лейна при построении рисунков графа. Поэтому необходимо разработать другие математические модели, однозначно описывающие пересечение ребер в случае построения рисунка непланарного графа. Описанию таких математических моделей и посвящена данная статья.

ПОСТРОЕНИЕ ПЛАНАРНОГО КАРКАСА ДЛЯ НЕПЛАНАРНОГО ГРАФА

Ранее для построения плоского рисунка планарного графа был применен функционал Мак-Лейна, и было показано, что нулевое значение функционала Мак-Лейна достигается на подмножестве единичных циклов (τ-циклов), причем количество независимых (базисных) циклов определяется цикломатическим числом планарного графа [2].

$$F\left(C^{\tau}_{\nu(G)}\right)=0\,, \qquad (1)$$

где $C^{\tau}_{\nu(G)}$ - множество единичных циклов с мощностью, равной цикломатическому числу планарного графа.

Задача построения рисунка графа с минимальным числом пересечений непланарного графа может быть представлена как поиск (выделение) подмножества циклов из совместного множества единичных циклов и дубль-циклов, достигающих нулевого значения функционала Мак-Лейна, а их количество определяется цикломатическим числом графа за вычетом минимального числа пересекающихся ребер

$$F\left(C^{\tau+d}_{\nu(G)-m_{\min}}\right)=0\,, \tag{2}$$

где $C^{\tau+d}_{\nu(G)-m_{\min}}$ - совместное подмножество единичных циклов C^{τ} и дубль-циклов C^{d}, порожденных удалением минимального количества пересекающихся ребер; $m_{\min}$ - минимальное количество пересекающихся ребер.

$$C^{\tau+d}=C^{\tau}\cup C^{d}\,. \tag{3}$$

Связный суграф, построенный с применением данной системы циклов, будем впредь называть планарным каркасом для непланарного графа.

Любой дубль-цикл образуется из линейной комбинации зависимых циклов, кольцевая сумма которых есть Ø. Учитывая также, что

$$C^{d}_{\ell}\oplus C^{d}_{p}=\varnothing, \tag{4}$$

отсюда следует, что

$$C^{d}_{\ell}=C^{d}_{p}\,. \tag{5}$$

Будем обозначать дубль-цикл слева в (5) как

$$C^{d}_{\ell}=\sum_{\ell=1}^{n_1}C^{\tau}_{\ell}\,, \tag{6}$$

где n_1 – количество единичных циклов, образующих левый дубль-цикл.

Дубль-цикл, стоящий справа в (5), будем обозначать как

$$C^{d}_{p}=\sum_{p=1}^{n_2}C^{\tau}_{p}\,, \tag{7}$$

где n_2 – количество единичных циклов, образующих правый дубль-цикл.

Будем обозначать элемент пересечения двух единичных циклов, стоящих слева как $\left(\mu_{ij}\right)_{\ell}$ в случае, если $\left|C^{\tau}_{i}\cap C^{\tau}_{j}\right|=1,\ i\neq j$.

Объединение всех элементов пересечения, стоящих слева, будем обозначать как

$$\omega_{\ell}=\cup\left(\mu_{ij}\right)_{\ell}\,. \tag{8}$$

Элемент пересечения двух единичных циклов, стоящих справа, будем обозначать как $\left(\mu_{ij}\right)_{p}$ в случае, если $\left|C^{\tau}_{i}\cap C^{\tau}_{j}\right|=1,\ i\neq j$.

Объединение всех элементов пересечения, стоящих справа, будем обозначать как

$$\omega_{p}=\cup\left(\mu_{ij}\right)_{p}\,. \tag{9}$$

Тогда через $ensem\left(\omega_{\ell},\omega_{p}\right)$ будем обозначать ребра, участвующие в пересечении внутри дубль-цикла.

В качестве примера рассмотрим следующий дубль-цикл.

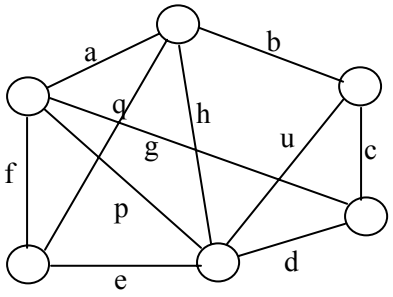


Рис.1 Дубль-цикл

Множество единичных векторов имеет вид:

$C_1^\tau = \{a,b,c,g\}$; $C_2^\tau = \{d,g,p\}$; $C_3^\tau = \{p,f,e\}$; $C_4^\tau = \{a,f,q\}$; $C_5^\tau = \{q,e,h\}$; $C_6^\tau = \{b,h,u\}$; $C_7^\tau = \{c,d,u\}$.

$(\mu_{12})_\ell = \{a,b,c,g\} \cap \{d,g,p\} = \{q\}$;

$(\mu_{23})_\ell = \{d,g,p\} \cap \{p,f,e\} = \{p\}$;

$(\mu_{45})_p = \{a,f,q\} \cap \{q,e,h\} = \{q\}$;

$(\mu_{56})_p = \{q,e,h\} \cap \{b,h,u\} = \{h\}$;

$(\mu_{67})_p = \{b,h,u\} \cap \{c,d,u\} = \{u\}$.

$\omega_\ell = \{g\} \cup \{p\} = \{q,p\}$;

$\omega_p = \{g\} \cup \{h\} \cup \{u\} = \{q,h,u\}$.

ensem $(\{g,p\},\{q,h,u\})$.

$C_1^d = C_1^\tau \oplus C_2^\tau \oplus C_3^\tau = \{a,b,c,g\} \oplus \{d,g,p\} \oplus \{p,f,e\} = \{a,b,c,d,e,f\}$;

$C_2^d = C_4^\tau \oplus C_5^\tau \oplus C_6^\tau \oplus C_7^\tau = \{a,f,q\} \oplus \{q,e,h\} \oplus \{b,h,u\} \oplus \{c,d,u\} = \{a,b,c,d,e,f\}$.

Пример 1 Построить планарный каркас для непланарного графа K_6.

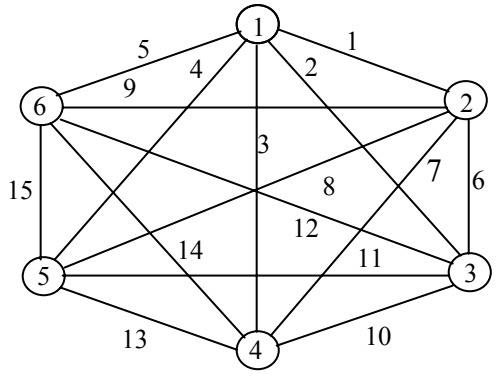


Рис.2 Граф K_6

Множество единичных циклов для графа K_6

$C_1^\tau = \{1,2,6\}$; $C_2^\tau = \{1,3,7\}$; $C_3^\tau = \{1,4,8\}$; $C_4^\tau = \{1,5,9\}$; $C_5^\tau = \{2,3,10\}$; $C_6^\tau = \{2,4,11\}$; $C_7^\tau = \{2,5,12\}$;
$C_8^\tau = \{3,4,13\}$; $C_9^\tau = \{3,5,14\}$; $C_{10}^\tau = \{4,5,15\}$; $C_{11}^\tau = \{6,7,10\}$; $C_{12}^\tau = \{6,8,11\}$; $C_{13}^\tau = \{6,9,12\}$;

$C_{14}^{\tau}=\{7,8,13\};\ C_{15}^{\tau}=\{7,9,14\};\ C_{16}^{\tau}=\{8,9,15\};\ C_{17}^{\tau}=\{10,11,13\};\ C_{18}^{\tau}=\{10,12,14\};\ C_{19}^{\tau}=\{11,12,15\};$
$C_{20}^{\tau}=\{13,14,15\}.$

Для заданного графа K_6 имеем также пятнадцать совокупностей зависимых систем, состоящих из четырех единичных циклов.

$C_1^{\tau}\oplus C_2^{\tau}\oplus C_5^{\tau}\oplus C_{11}^{\tau}=\varnothing;\ C_1^{\tau}\oplus C_3^{\tau}\oplus C_6^{\tau}\oplus C_{12}^{\tau}=\varnothing;\ C_1^{\tau}\oplus C_4^{\tau}\oplus C_7^{\tau}\oplus C_{13}^{\tau}=\varnothing;$

$C_2^{\tau}\oplus C_3^{\tau}\oplus C_8^{\tau}\oplus C_{14}^{\tau}=\varnothing;\ C_2^{\tau}\oplus C_4^{\tau}\oplus C_9^{\tau}\oplus C_{15}^{\tau}=\varnothing;\ C_3^{\tau}\oplus C_4^{\tau}\oplus C_{10}^{\tau}\oplus C_{16}^{\tau}=\varnothing;$

$C_5^{\tau}\oplus C_6^{\tau}\oplus C_8^{\tau}\oplus C_{17}^{\tau}=\varnothing;\ C_5^{\tau}\oplus C_7^{\tau}\oplus C_9^{\tau}\oplus C_{18}^{\tau}=\varnothing;\ C_6^{\tau}\oplus C_7^{\tau}\oplus C_{10}^{\tau}\oplus C_{19}^{\tau}=\varnothing;$

$C_8^{\tau}\oplus C_9^{\tau}\oplus C_{10}^{\tau}\oplus C_{20}^{\tau}=\varnothing;\ C_{11}^{\tau}\oplus C_{12}^{\tau}\oplus C_{14}^{\tau}\oplus C_{17}^{\tau}=\varnothing;\ C_{11}^{\tau}\oplus C_{13}^{\tau}\oplus C_{15}^{\tau}\oplus C_{18}^{\tau}=\varnothing;$

$C_{12}^{\tau}\oplus C_{13}^{\tau}\oplus C_{16}^{\tau}\oplus C_{19}^{\tau}=\varnothing;\ C_{14}^{\tau}\oplus C_{15}^{\tau}\oplus C_{16}^{\tau}\oplus C_{20}^{\tau}=\varnothing;\ C_{17}^{\tau}\oplus C_{18}^{\tau}\oplus C_{19}^{\tau}\oplus C_{20}^{\tau}=\varnothing.$

Отсюда получаем сорок пять дубль-циклов и пересекающихся (ensembles) ребер.

$C_1^{\tau}\oplus C_2^{\tau}\oplus C_5^{\tau}\oplus C_{11}^{\tau}=\varnothing$ порождает следующие дубль-циклы:

$C_1^{\tau}\oplus C_5^{\tau}=C_2^{\tau}\oplus C_{11}^{\tau}=\{1,3,6,10\}$, ensem $\{2,7\}$;

$C_1^{\tau}\oplus C_2^{\tau}=C_5^{\tau}\oplus C_{11}^{\tau}=\{2,3,6,7\}$, ensem $\{1,10\}$;

$C_1^{\tau}\oplus C_{11}^{\tau}=C_2^{\tau}\oplus C_5^{\tau}=\{1,2,7,10\}$, ensem $\{3,6\}$.

$C_1^{\tau}\oplus C_3^{\tau}\oplus C_6^{\tau}\oplus C_{12}^{\tau}=\varnothing$ порождает следующие дубль-циклы:

$C_1^{\tau}\oplus C_6^{\tau}=C_3^{\tau}\oplus C_{12}^{\tau}=\{1,4,6,11\}$, ensem $\{2,8\}$;

$C_1^{\tau}\oplus C_3^{\tau}=C_6^{\tau}\oplus C_{12}^{\tau}=\{2,4,6,8\}$, ensem $\{1,11\}$;

$C_1^{\tau}\oplus C_{12}^{\tau}=C_3^{\tau}\oplus C_6^{\tau}=\{1,2,8,11\}$, ensem $\{4,6\}$.

$C_1^{\tau}\oplus C_4^{\tau}\oplus C_7^{\tau}\oplus C_{13}^{\tau}=\varnothing$ порождает следующие дубль-циклы:

$C_1^{\tau}\oplus C_7^{\tau}=C_4^{\tau}\oplus C_{13}^{\tau}=\{1,5,6,12\}$, ensem $\{2,9\}$;

$C_1^{\tau}\oplus C_4^{\tau}=C_7^{\tau}\oplus C_{13}^{\tau}=\{2,5,6,9\}$, ensem $\{1,12\}$;

$C_1^{\tau}\oplus C_{13}^{\tau}=C_4^{\tau}\oplus C_7^{\tau}=\{1,2,9,12\}$, ensem $\{5,6\}$.

$C_2^{\tau}\oplus C_3^{\tau}\oplus C_8^{\tau}\oplus C_{14}^{\tau}=\varnothing$ порождает следующие дубль-циклы:

$C_2^{\tau}\oplus C_8^{\tau}=C_3^{\tau}\oplus C_{14}^{\tau}=\{1,4,7,13\}$, ensem $\{3,8\}$;

$C_2^{\tau}\oplus C_3^{\tau}=C_8^{\tau}\oplus C_{14}^{\tau}=\{3,4,7,8\}$, ensem $\{1,13\}$;

$C_2^{\tau}\oplus C_{14}^{\tau}=C_3^{\tau}\oplus C_8^{\tau}=\{1,3,8,13\}$, ensem $\{4,7\}$.

$C_2^{\tau}\oplus C_4^{\tau}\oplus C_9^{\tau}\oplus C_{15}^{\tau}=\varnothing$ порождает следующие дубль-циклы:

$C_2^{\tau}\oplus C_9^{\tau}=C_4^{\tau}\oplus C_{15}^{\tau}=\{1,5,7,14\}$, ensem $\{3,9\}$;

$C_2^{\tau}\oplus C_4^{\tau}=C_9^{\tau}\oplus C_{15}^{\tau}=\{3,5,7,9\}$, ensem $\{1,14\}$;

$C_2^{\tau}\oplus C_{15}^{\tau}=C_4^{\tau}\oplus C_9^{\tau}=\{1,3,9,14\}$, ensem $\{5,7\}$.

$C_3^{\tau}\oplus C_4^{\tau}\oplus C_{10}^{\tau}\oplus C_{16}^{\tau}=\varnothing$ порождает следующие дубль-циклы:

$C_3^\tau \oplus C_{10}^\tau = C_4^\tau \oplus C_{16}^\tau = \{1,5,8,15\}$, ensem $\{4,9\}$;

$C_3^\tau \oplus C_4^\tau = C_{10}^\tau \oplus C_{16}^\tau = \{4,5,8,9\}$, ensem $\{1,15\}$;

$C_3^\tau \oplus C_{16}^\tau = C_4^\tau \oplus C_{10}^\tau = \{1,4,9,15\}$, ensem $\{5,8\}$.

$C_5^\tau \oplus C_6^\tau \oplus C_8^\tau \oplus C_{17}^\tau = Ø$ порождает следующие дубль-циклы:

$C_5^\tau \oplus C_8^\tau = C_6^\tau \oplus C_{17}^\tau = \{2,4,10,13\}$, ensem $\{3,11\}$;

$C_5^\tau \oplus C_6^\tau = C_8^\tau \oplus C_{17}^\tau = \{3,4,10,11\}$, ensem $\{2,13\}$;

$C_5^\tau \oplus C_{17}^\tau = C_6^\tau \oplus C_8^\tau = \{2,3,11,13\}$, ensem $\{4,10\}$.

$C_5^\tau \oplus C_7^\tau \oplus C_9^\tau \oplus C_{18}^\tau = Ø$ порождает следующие дубль-циклы:

$C_5^\tau \oplus C_9^\tau = C_7^\tau \oplus C_{18}^\tau = \{2,5,10,14\}$, ensem $\{3,12\}$;

$C_5^\tau \oplus C_7^\tau = C_9^\tau \oplus C_{18}^\tau = \{3,5,10,12\}$, ensem $\{2,14\}$;

$C_5^\tau \oplus C_{18}^\tau = C_7^\tau \oplus C_9^\tau = \{2,3,12,14\}$, ensem $\{5,10\}$.

$C_6^\tau \oplus C_7^\tau \oplus C_{10}^\tau \oplus C_{19}^\tau = Ø$ порождает следующие дубль-циклы:

$C_6^\tau \oplus C_{10}^\tau = C_7^\tau \oplus C_{19}^\tau = \{2,5,11,15\}$, ensem $\{4,12\}$;

$C_6^\tau \oplus C_7^\tau = C_{10}^\tau \oplus C_{19}^\tau = \{4,5,11,12\}$, ensem $\{2,15\}$;

$C_6^\tau \oplus C_{19}^\tau = C_7^\tau \oplus C_{10}^\tau = \{2,4,12,15\}$, ensem $\{5,11\}$.

$C_8^\tau \oplus C_9^\tau \oplus C_{10}^\tau \oplus C_{20}^\tau = Ø$ порождает следующие дубль-циклы:

$C_8^\tau \oplus C_{10}^\tau = C_9^\tau \oplus C_{20}^\tau = \{3,5,13,15\}$, ensem $\{4,14\}$;

$C_8^\tau \oplus C_9^\tau = C_{10}^\tau \oplus C_{20}^\tau = \{4,5,13,15\}$, ensem $\{3,15\}$;

$C_8^\tau \oplus C_{20}^\tau = C_9^\tau \oplus C_{10}^\tau = \{3,4,14,15\}$, ensem $\{5,13\}$.

$C_{11}^\tau \oplus C_{12}^\tau \oplus C_{14}^\tau \oplus C_{17}^\tau = Ø$ порождает следующие дубль-циклы:

$C_{11}^\tau \oplus C_{14}^\tau = C_{12}^\tau \oplus C_{17}^\tau = \{6,8,10,13\}$, ensem $\{7,11\}$;

$C_{11}^\tau \oplus C_{12}^\tau = C_{14}^\tau \oplus C_{17}^\tau = \{7,8,10,11\}$, ensem $\{6,13\}$;

$C_{11}^\tau \oplus C_{17}^\tau = C_{12}^\tau \oplus C_{14}^\tau = \{6,7,11,13\}$, ensem $\{8,10\}$.

$C_{11}^\tau \oplus C_{13}^\tau \oplus C_{15}^\tau \oplus C_{18}^\tau = Ø$ порождает следующие дубль-циклы:

$C_{11}^\tau \oplus C_{15}^\tau = C_{13}^\tau \oplus C_{18}^\tau = \{6,9,10,14\}$, ensem $\{7,12\}$;

$C_{11}^\tau \oplus C_{13}^\tau = C_{15}^\tau \oplus C_{18}^\tau = \{7,9,10,12\}$, ensem $\{6,14\}$;

$C_{11}^\tau \oplus C_{18}^\tau = C_{13}^\tau \oplus C_{15}^\tau = \{6,7,12,14\}$, ensem $\{9,10\}$.

$C_{12}^\tau \oplus C_{13}^\tau \oplus C_{16}^\tau \oplus C_{19}^\tau = Ø$ порождает следующие дубль-циклы:

$C_{12}^\tau \oplus C_{16}^\tau = C_{13}^\tau \oplus C_{19}^\tau = \{6,9,11,15\}$, ensem $\{8,12\}$;

$C_{12}^{\tau} \oplus C_{13}^{\tau} = C_{16}^{\tau} \oplus C_{19}^{\tau} = \{8,9,11,12\}$, ensem $\{6,15\}$;

$C_{12}^{\tau} \oplus C_{19}^{\tau} = C_{13}^{\tau} \oplus C_{16}^{\tau} = \{6,8,12,15\}$, ensem $\{9,11\}$.

$C_{14}^{\tau} \oplus C_{15}^{\tau} \oplus C_{16}^{\tau} \oplus C_{20}^{\tau} = Ø$ порождает следующие дубль-циклы:

$C_{14}^{\tau} \oplus C_{16}^{\tau} = C_{15}^{\tau} \oplus C_{20}^{\tau} = \{7,9,13,15\}$, ensem $\{8,14\}$;

$C_{14}^{\tau} \oplus C_{15}^{\tau} = C_{16}^{\tau} \oplus C_{20}^{\tau} = \{8,9,13,14\}$, ensem $\{7,15\}$;

$C_{14}^{\tau} \oplus C_{20}^{\tau} = C_{15}^{\tau} \oplus C_{16}^{\tau} = \{7,8,14,15\}$, ensem $\{9,13\}$.

$C_{17}^{\tau} \oplus C_{18}^{\tau} \oplus C_{19}^{\tau} \oplus C_{20}^{\tau} = Ø$ порождает следующие дубль-циклы:

$C_{17}^{\tau} \oplus C_{19}^{\tau} = C_{18}^{\tau} \oplus C_{20}^{\tau} = \{10,12,13,15\}$, ensem $\{11,14\}$;

$C_{17}^{\tau} \oplus C_{18}^{\tau} = C_{19}^{\tau} \oplus C_{20}^{\tau} = \{11,12,13,14\}$, ensem $\{10,15\}$;

$C_{17}^{\tau} \oplus C_{20}^{\tau} = C_{18}^{\tau} \oplus C_{19}^{\tau} = \{10,11,14,15\}$, ensem $\{12,13\}$.

Множество $C^{\tau+d} = C^{\tau} \cap C^{d}$ данного графа K_6 имеет вид:

$C_1^{\tau} = \{1,2,6\}$; $C_2^{\tau} = \{1,3,7\}$; $C_3^{\tau} = \{1,4,8\}$; $C_4^{\tau} = \{1,5,9\}$; $C_5^{\tau} = \{2,3,10\}$;

$C_6^{\tau} = \{2,4,11\}$; $C_7^{\tau} = \{2,5,12\}$; $C_8^{\tau} = \{3,4,13\}$; $C_9^{\tau} = \{3,5,14\}$; $C_{10}^{\tau} = \{4,5,15\}$; $C_{11}^{\tau} = \{6,7,10\}$;
$C_{12}^{\tau} = \{6,8,11\}$; $C_{13}^{\tau} = \{6,9,12\}$; $C_{14}^{\tau} = \{7,8,13\}$; $C_{15}^{\tau} = \{7,9,14\}$; $C_{16}^{\tau} = \{8,9,15\}$; $C_{17}^{\tau} = \{10,11,13\}$;
$C_{18}^{\tau} = \{10,12,14\}$; $C_{19}^{\tau} = \{11,12,15\}$; $C_{20}^{\tau} = \{13,14,15\}$.

$C_1^{d} = \{1,3,6,10\}$, ensem $\{2,7\}$; $C_2^{d} = \{2,3,6,7\}$, ensem $\{1,10\}$; $C_3^{d} = \{1,2,7,10\}$, ensem $\{3,6\}$;

$C_4^{d} = \{1,4,6,11\}$, ensem $\{2,8\}$; $C_5^{d} = \{2,4,6,8\}$, ensem $\{1,11\}$; $C_6^{d} = \{1,2,8,11\}$, ensem $\{4,6\}$;
$C_7^{d} = \{1,5,6,12\}$, ensem $\{2,9\}$; $C_8^{d} = \{2,5,6,9\}$, ensem $\{1,12\}$; $C_9^{d} = \{1,2,9,12\}$, ensem $\{5,6\}$;
$C_{10}^{d} = \{1,4,7,13\}$, ensem $\{3,8\}$; $C_{11}^{d} = \{3,4,7,8\}$, ensem $\{1,13\}$; $C_{12}^{d} = \{1,3,8,13\}$, ensem $\{4,7\}$;

$C_{13}^{d} = \{1,5,7,14\}$, ensem $\{3,9\}$; $C_{14}^{d} = \{3,5,7,9\}$, ensem $\{1,14\}$; $C_{15}^{d} = \{1,3,9,14\}$, ensem $\{5,7\}$;
$C_{16}^{d} = \{1,5,8,15\}$, ensem $\{4,9\}$; $C_{17}^{d} = \{4,5,8,9\}$, ensem $\{1,15\}$; $C_{18}^{d} = \{1,4,9,15\}$, ensem $\{5,8\}$;

$C_{19}^{d} = \{2,4,10,13\}$, ensem $\{3,11\}$; $C_{20}^{d} = \{3,4,10,11\}$, ensem $\{2,13\}$; $C_{21}^{d} = \{2,3,11,13\}$,ensem $\{4,10\}$;
$C_{22}^{d} = \{2,5,10,14\}$, ensem $\{3,12\}$; $C_{23}^{d} = \{3,5,10,12\}$, ensem $\{2,14\}$; $C_{24}^{d} = \{2,3,12,14\}$, ensem $\{5,10\}$;

$C_{25}^{d} = \{2,5,11,15\}$, ensem $\{4,12\}$; $C_{26}^{d} = \{4,5,11,12\}$, ensem $\{2,15\}$; $C_{27}^{d} = \{2,4,12,15\}$, ensem $\{5,11\}$;
$C_{28}^{d} = \{3,5,13,15\}$, ensem $\{4,14\}$; $C_{29}^{d} = \{4,5,13,14\}$, ensem $\{3,15\}$; $C_{30}^{d} = \{3,4,14,15\}$, ensem $\{5,13\}$;

$C_{31}^{d} = \{6,8,10,13\}$, ensem $\{7,11\}$; $C_{32}^{d} = \{7,8,10,11\}$, ensem $\{6,13\}$; $C_{33}^{d} = \{6,7,11,13\}$, ensem $\{8,10\}$;
$C_{34}^{d} = \{6,9,10,14\}$, ensem $\{7,12\}$; $C_{35}^{d} = \{7,9,10,12\}$, ensem $\{6,14\}$; $C_{36}^{d} = \{6,7,12,14\}$, ensem $\{9,10\}$;

$C_{37}^{d} = \{6,9,11,15\}$, ensem $\{8,12\}$; $C_{38}^{d} = \{8,9,11,12\}$, ensem $\{6,15\}$; $C_{39}^{d} = \{6,8,12,15\}$, ensem $\{9,11\}$;
$C_{40}^{d} = \{7,9,13,15\}$, ensem $\{8,14\}$; $C_{41}^{d} = \{8,9,13,14\}$, ensem $\{7,15\}$; $C_{42}^{d} = \{7,8,14,15\}$, ensem $\{9,13\}$;

$C_{43}^{d} = \{10,12,13,15\}$, ensem $\{11,14\}$; $C_{44}^{d} = \{11,12,13,14\}$,ensem $\{10,15\}$; $C_{45}^{d} = \{10,11,14,15\}$, ensem $\{12,13\}$.

Выберем $C_1^{d} = \{1,3,6,10\}$, ensem $\{2,7\}$. После выбора этого цикла множество циклов сократится; должны быть убраны все циклы, содержащие 2 и 7 ребер:

$C_3^\tau = \{1,4,8\}$; $C_4^\tau = \{1,5,9\}$; $C_8^\tau = \{3,4,13\}$; $C_9^\tau = \{3,5,14\}$; $C_{10}^\tau = \{4,5,15\}$; $C_{12}^\tau = \{6,8,11\}$; $C_{13}^\tau = \{6,9,12\}$; $C_{16}^\tau = \{8,9,15\}$; $C_{17}^\tau = \{10,11,13\}$; $C_{18}^\tau = \{10,12,14\}$; $C_{19}^\tau = \{11,12,15\}$; $C_{20}^\tau = \{13,14,15\}$;

$C_1^d = \{1,3,6,10\}$, ensem $\{2,7\}$; $C_{16}^d = \{1,5,8,15\}$, ensem $\{4,9\}$; $C_{17}^d = \{4,5,8,9\}$, ensem $\{1,15\}$;

$C_{18}^d = \{1,4,9,15\}$, ensem $\{5,8\}$; $C_{28}^d = \{3,5,13,15\}$, ensem $\{4,14\}$; $C_{29}^d = \{4,5,13,14\}$, ensem $\{3,15\}$;

$C_{30}^d = \{3,4,14,15\}$, ensem $\{5,13\}$; $C_{37}^d = \{6,9,11,15\}$, ensem $\{8,12\}$; $C_{38}^d = \{8,9,11,12\}$, ensem $\{6,15\}$; $C_{39}^d = \{6,8,12,15\}$, ensem $\{9,11\}$; $C_{43}^d = \{10,12,13,15\}$, ensem $\{11,14\}$; $C_{44}^d = \{11,12,13,14\}$, ensem $\{10,15\}$;

$C_{45}^d = \{10,11,14,15\}$,ensem $\{12,13\}$.

Выберем $C_{28}^d = \{3,5,13,15\}$, ensem $\{4,14\}$ и удалим все циклы, содержащие 4 и 14 ребра. Оставшееся множество циклов будет иметь вид:

$C_4^\tau = \{1,5,9\}$; $C_{12}^\tau = \{6,8,11\}$; $C_{13}^\tau = \{6,9,12\}$; $C_{16}^\tau = \{8,9,15\}$; $C_{17}^\tau = \{10,11,13\}$; $C_{19}^\tau = \{11,12,15\}$;

$C_1^d = \{1,3,6,10\}$, ensem $\{2,7\}$; $C_{28}^d = \{3,5,13,15\}$, ensem $\{4,14\}$; $C_{29}^d = \{4,5,13,14\}$, ensem $\{3,15\}$; $C_{30}^d = \{3,4,14,15\}$, ensem $\{5,13\}$; $C_{37}^d = \{6,9,11,15\}$, ensem $\{8,12\}$; $C_{38}^d = \{8,9,11,12\}$, ensem $\{6,15\}$;

$C_{39}^d = \{6,8,12,15\}$, ensem $\{9,11\}$.

Выберем $C_{37}^d = \{6,9,11,15\}$, ensem $\{8,12\}$ и удалим все циклы, содержащие 8 и 12 ребра. Оставшееся множество циклов будет иметь вид:

$C_4^\tau = \{1,5,9\}$; $C_{17}^\tau = \{10,11,13\}$; $C_1^d = \{1,3,6,10\}$, ensem $\{2,7\}$;

$C_{28}^d = \{3,5,13,15\}$, ensem $\{4,14\}$; $C_{37}^d = \{6,9,11,15\}$, ensem $\{8,12\}$.

Функционал Мак-Лейна для данной системы циклов равен 0, и можно построить планарный каркас для графа K_6 (см. рис. 3.). Следует заметить, что данный планарный каркас является не единственным для непланарного графа K_6.

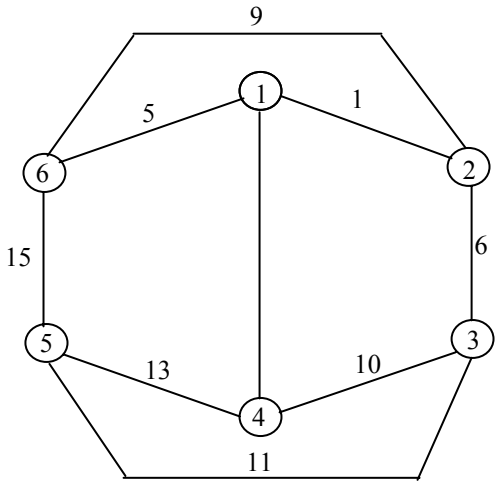


Рис.3. Один из планарных каркасов для непланарного графа K_6

ПОСТРОЕНИЕ РИСУНКА НЕПЛАНАРНОГО ГРАФА С МИНИМАЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ

Построение планарного каркаса является первым этапом для построения рисунка непланарного графа с минимальным числом пересечений. Второй этап построения заключается в укладке пересекающихся ребер внутри каждого дубль-цикла.

Пример 2. Построить рисунок непланарного графа K_6 с минимальным числом пересечений.

Из предыдущего примера $C_1^d = \{1,3,6,10\}$, ensem $\{2,7\}$; $C_{28}^d = \{3,5,13,15\}$, ensem $\{4,14\}$; $C_{37}^d = \{6,9,11,15\}$, ensem $\{8,12\}$.

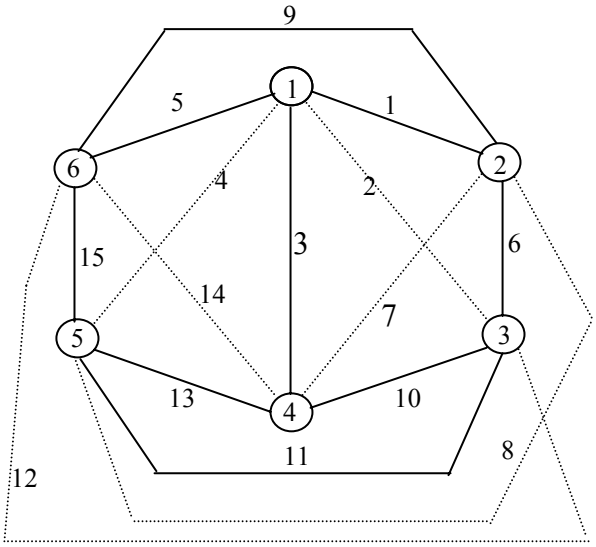


Рис. 4. Рис. Граф K_6 с минимальным числом пересечений

ЛИТЕРАТУРА

1. Рингель Г. Теорема о раскраске карт. – М.: Мир, 1977. – 126с.

2. Курапов С.В., Перепелица В.А. Идентификация рисунка графа на плоскости//Актуальные проблемы развития общественной мысли и практики управления: Сборник научных трудов/ Запорожский институт государственного и муниципального управления. - Вып.2. – Запорожье, 1996. – С.225-232.