УДК 517.9+519.3

КОМБИНИРОВАННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Колодяжный В.М., к.ф.-м. н., доцент

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, г. Харьков

В статье предлагается алгоритм построения приближенного решения двухмерной нестационарной начально-краевой задачи теплопроводности с использованием геометрически структурированных атомарных функций. Эти функции помогают моделировать характерные особенности процесса отвердевания отливки сложной формы. Использовались различные способы приближения и их комбинации для построения решения исходной задачи.

Ключевые слова: атомарные функции, теория R-функций, метод взвешенных невязок.

Колодяжний В.М. КОМБІНОВАНЕ НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКА НЕСТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ / Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України.

У статті пропонується алгоритм побудови наближеного розв'язку двовимірної нестаціонарної початково-крайової задачі теплопровідності з використанням геометрично структурованих атомарних функцій. Ці функції допомогають моделювати характерні особливості процесу затвердіння відливки складної форми. Використовувались різні способи наближення та їхньої комбінації для побудови розв'язку вихідної задачі.

Ключові слова: атомарні функції, теорія R-функцій, метод зважуваних нев'язок.

Kolodyazhny V.M. COMBINED APPROXIMATION OF THE SOLUTION OF THE NONSTATIONARY HEAT CONDUCTION PROBLEM / A.M.Pidgorny Institute of Mechanical Engineering Problems of NAS of the Ukraine

In the article the construction algorithm had been introduced for the structure of the approximate solution two-dimensional nonstationary initial boundary value problem of heat conduction using the geometrical structured atomic functions. These functions help simulate the typical peculiarities of the solidification process of the complex form cast. The different ways of approximation and their combination have been used for construction of the solution of a primitive problem.

Key words: atomic functions, R-functions theory, weighted residual method.

Особенности протекания технологических процессов при формировании фасонных отливок определяют разработку такой математической модели, которая позволяла бы учитывать геометрические и теплофизические характеристики с достаточной достоверностью [1]. При исследовании процессов затвердевания расплава металла в металлических литейных формах (кокилях) характерной особенностью является то, что процесс формирования отливки начинается с образования у стенок формы корки затвердевшего металла, которая нарастает со временем, заполняя всю область отливки [2-3]. Анализ тепловых полей в процессе формирования отливки должен существенно учитывать геометрическую конфигурацию отливки и изменения теплофизических параметров от температуры, так как в процессе затвердевания отливка последовательно находится в трех фазовых состояниях: жидком, твердо-жидком и твердом.

В статье рассматривается такое построение приближенного решения математической модели, описывающей тепловые поля при затвердевании отливки, при котором проблеме учета указанных характеристик уделяется основное внимание. С целью упрощения изложения автор ограничивается двухмерной моделью, но предлагаемый подход распространяется на реальные трехмерные отливки.

Обратимся к базовой нестационарной задаче – начально-краевой нелинейной задаче для параболического уравнения второго порядка в ограниченной области Ω с границей $\partial\Omega$:

$$c\rho(u)\frac{\partial u}{\partial t} = div\left[\lambda(u)\, grad\, u\right] - \gamma(x,y)u + q(x,y,t), \qquad (1)$$

функции $\rho(u),\ \lambda(u),\ \gamma(x,y)$ непрерывны в замкнутой области $\overline{\Omega}$.

Пусть на различных участках $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ границы $\partial\Omega$, $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ задаются граничные условия:

$$u = f_1(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_1, \ 0 < t < \tau;$$
$$u = f_2(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_2, \ 0 < t < \tau; \qquad (2)$$
$$-\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(u)u = f_3(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_3, \ 0 < t < \tau,$$

где ν – направление внешней нормали к Γ_3. Представим условие на участке Γ_3 границы $\partial\Omega$: в несколько измененном виде, считая, что

$f_3(x,y) = \dfrac{\alpha(u)}{\lambda(u)}u_{cp} = h(u)u_{cp}$, u_{cp} – температура окружающей среды.

Тогда это условие принимает следующий вид:

$$-\frac{\partial u}{\partial \nu} + h(u)u = f_3(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_3, \ 0 < t < \tau.$$

Отметим также, что практическая постановка задачи предусматривает задание граничных функций $f_s(x,y)$, $s=1,2,3$, на конечном множестве граничных точек.

Начальное условие задается температурой расплава металла, заливаемого в литейную форму:

$$u(x, y, 0) = T_z(x,y). \qquad (3)$$

Исходную нестационарную задачу с помощью известных приемов дискретизации по времени сводим к последовательности нелинейных стационарных задач для каждого из m априорно задаваемых временных интервалов, на которые разбивается процесс решения задачи.

Следуя [4], представим $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{u_{p+1} - u_p}{\Delta t}$, $\Delta t = \dfrac{\tau}{m}$. Исходная краевая задача в результате операции дискретизации по времени получает стационарную формулировку:

$$\frac{c\rho(u_{p+1})}{\Delta t}u_{p+1} - div\left[\lambda(u_{p+1})\,grad\,u_{p+1}\right] + \gamma(x,y)u_{p+1} = q(x,y,t_p) + \frac{c\rho(u_{p+1})u_p}{\Delta t}.$$

$$u_{p+1} = f_1(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_1, \ t_p < t < t_{p+1};$$
$$u_{p+1} = f_2(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_2, \ t_p < t < t_{p+1};$$
$$-\frac{\partial u_{p+1}}{\partial \nu} + h(u_{p+1})u_{p+1} = f_3(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_3, \ t_p < t < t_{p+1}, \ p = 0,1,2,...,m.$$

Поиск решения данной нелинейной стационарной краевой задачи может быть осуществлен благодаря методу последовательных приближений, что позволяет перейти к рассмотрению соответствующих каждому временному слою линейных краевых задач. В этом случае на k-м шаге приближения приходится искать решение следующей краевой задачи:

$$\frac{c\rho(u^k_{p+1})}{\Delta t}u^{k+1}_{p+1} - div\left[\lambda(u^k_{p+1})\,grad\,u^{k+1}_{p+1}\right] + \gamma(x,y)u^{k+1}_{p+1} = q(x,y,t_p) + \frac{c\rho(u^k_{p+1})}{\Delta t}u_p.$$

$$u_{p+1}^{k+1} = f_1(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_1, \ t_p < t < t_{p+1};$$
$$u_{p+1}^{k+1} = f_2(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_2, \ t_p < t < t_{p+1};$$
$$-\frac{\partial u_{p+1}^{k+1}}{\partial \nu} + h(u_{p+1}^{k})u_{p+1}^{k+1} = f_3(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_3, \ t_p < t < t_{p+1}, \tag{4}$$
$$u_{p+1}^{o} = u_p, \ u_o = T_z(x,y), \ p = 0,1,2,...,m.; \ \ k = 1,2,...$$

Решение линейной краевой задачи может быть выполним приближенно методом взвешенных невязок Галеркина или модификацией метода – методом Галеркина-Петрова [5], что позволяет получить интегральную формулировку исходной задачи.

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к следующей комбинированной задаче теории приближения. Построить функцию, заданную в области Ω, удовлетворяющую на границе $\partial\Omega$ области граничным условиям (4) и, при этом, обеспечить выполнение дополнительного ограничения, задаваемого в форме интегрального условия вида:

$$\int_{\Omega} \psi_i \left\{ \frac{c\rho(u_{p+1}^{k})}{\Delta t} u_{p+1}^{k+1} - div\left[\lambda(u_{p+1}^{k})\, grad\, u_{p+1}^{k+1}\right] + \right.$$
$$\left. + \gamma(x,y)u_{p+1}^{k+1} - q(x,y,t_p) - \frac{c\rho(u_{p+1}^{k})}{\Delta t} u_p \right\} d\Omega = 0, \tag{5}$$

где Ψ_i – функции некоторой системы функций, образующих базис в сепарабельном гильбертовом пространстве. Это условие должно выполняться на классе функций из пространства $W_2^{(1)}(\Omega)$, удовлетворяющих на участках Γ_1 и Γ_2 границы $\partial\Omega$ соответствующим граничным условиям, что становится очевидным в результате применения интегрирования по частям, после чего данное условие, представляется в виде:

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{c\rho(u_{p+1}^{k})}{\Delta t} u_{p+1}^{k+1}\psi_i - \lambda(u_{p+1}^{k})\nabla u_{p+1}^{k+1} \nabla\psi_i + \right.$$
$$\left. + \gamma(x,y)u_{p+1}^{k}\psi_i - q(x,y,t_p)\psi_i - \frac{c\rho(u_{p+1}^{k})}{\Delta t} u_p^{k}\psi_i \right\} d\Omega + \tag{6}$$
$$+ \int_{\Gamma_3} \{h(u_{p+1}^{k})u_{p+1}^{k+1}\psi_i - f_3(x,y)\psi_i\}\, d\partial\Omega = 0.$$

Теперь опишем вспомогательные функции, которые будут использованы для построения функции, аппроксимирующей решение рассматриваемой краевой задачи. Пусть функция $\omega(x,y)$ описывает границу $\partial\Omega$ области Ω. Построение данной функции осуществляется методами теории *R*-функций [6], что обеспечивает выполнение условий:

$$\omega(x,y) = 0, \ (x,y) \in \partial\Omega,$$
$$\omega(x,y) > 0, \ (x,y) \in \Omega,$$
$$\omega(x,y) < 0, \ (x,y) \notin \overline{\Omega}.$$

Конструктивные приемы позволяют наделить данную функцию свойством нормальности, т.е. для любой точки $M(x,y)\in\Omega:\quad \omega(x,y)=\rho(M,\partial\Omega)$, где $\rho(\cdot,\cdot)$ определяет расстояние от точки М до ближайшей точки границы по направлению нормали к $\partial\Omega$.

Участки границы $\partial\Omega$ пусть описываются соответствующими функциями $\omega_s(x,y),\ s=1,2,3$:

$$\omega_1(x,y)=0,\ (x,y)\in\Gamma_1,$$
$$\omega_2(x,y)=0,\ (x,y)\in\Gamma_2,$$
$$\omega_3(x,y)=0,\ (x,y)\in\Gamma_3.$$

Обозначим через $gut[x,y,\omega(x,y)]$ геометрически структурованную C^∞ гладкую атомарную функцию, которую будем определять в виде:

$$gut[x,y,\omega(x,y)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-it\omega(x,y)]\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\sin t2^{-k}}{t2^{-k}}\,dt.$$

Носителем данной функции, $\operatorname{supp} gut[x,y,\omega(x,y)]$, будет приграничная полоса единичной ширины в обе стороны от границы $\partial\Omega$. Конфигурация области носителя определяется геометрическим рисунком границы области Ω. Некоторые свойства данной функции приведены в [7].

Использование нормальной функции $\omega(x,y)$ при воспроизведении $gut[x,y,\omega(x,y)]$ позволяет получать эквидистантные линии относительно границы $\partial\Omega$. На эквидистантных линиях $\partial\Omega_r$, расположенных внутри области и которые будем называть внутренними сдвигами границы, определяем соответствующие функции $gut_r[x,y,{}_r\omega(x,y)]$, где через ${}_r\omega(x,y)$ будем обозначать функции, описывающие геометрию *r*-й линии внутреннего сдвига границы $\partial\Omega$.

Отметим характерное свойство суммы функций $gut_r[x,y,{}_r\omega(x,y)]$, построенных на всех линиях внутренних сдвигов границы $\partial\Omega$ на половину длины носителя по направлению, нормальному к границе: $\sum_r gut_r[x,y,{}_r\omega(x,y)]=1$.

Как следует из постановки задачи, построение искомого приближения связано с решением вопроса приближения с интерполяцией граничных условий, при котором значения приближающей функции должны в точности совпадать со значениями граничных функций $f_s(x,y)$, s=1,2,3, в заданном конечном множестве точек. Представим граничные функции в виде интерполяционных двухмерных полиномов, степень которых n_s определяется количеством p_s точек $\{x_l,y_l\}_{l=1}^{p_s}$, в которых соответствующая граничная функция задается:

$$P_{n_s}(x,y)=\sum_{\substack{\mu+\sigma\le n_s\\ \mu,\sigma=0}}^{n_s}\lambda^s_{\mu\sigma}x^\mu y^\sigma,\quad n_s=\sum_{k=1}^{p_s+1}k,\ s=1,2,3.$$

Составляя системы линейных алгебраических уравнений, определяем соответствующие множества коэффициентов $\{\lambda^s_{\mu\sigma}\}$ из условий интерполяции

$$P_{n_s}(x_\alpha,y_\alpha)=f_s(x_\alpha,y_\alpha),\ \alpha=\overline{1,p_s},\ s=1,2,3.$$

Таким образом, исходные граничные условия приобретают следующую форму:

$$u_{p+1}^{k+1} = \sum_{\substack{\mu+\sigma\le n_1\\ \mu,\sigma=0}}^{n_1} \lambda_{\mu\sigma}^{1} x^{\mu} y^{\sigma}, \quad (x,y)\in\Gamma_1,\ t_p < t < t_{p+1};$$

$$u_{p+1}^{k+1} = \sum_{\substack{\mu+\sigma\le n_2\\ \mu,\sigma=0}}^{n_2} \lambda_{\mu\sigma}^{2} x^{\mu} y^{\sigma}, \quad (x,y)\in\Gamma_2,\ t_p < t < t_{p+1};$$

$$\frac{\partial u_{p+1}^{k+1}}{\partial \nu} + h(u_{p+1}^{k}) u_{p+1}^{k+1} = \sum_{\substack{\mu+\sigma\le n_3\\ \mu,\sigma=0}}^{n_3} \lambda_{\mu\sigma}^{3} x^{\mu} y^{\sigma}, \quad (x,y)\in\Gamma_3, \quad t_p < t < t_{p+1},$$

$$p = 0,1,2,...,m.; \quad k = 1,2,...$$

На следующем этапе рассмотрим вопрос о совместном приближении функций u и $B_3 u$ (B_3 – оператор граничного условия на Γ_3, заданных на различных участках границы. При этом необходимо решить вопрос о продолжении граничных условий вовнутрь области Ω. Данные вопросы для рассматриваемой системы граничных условий решаются в результате построения функции (структуры), точно удовлетворяющей на границе $\partial\Omega$ области заданным условиям согласно конструктивным приемам теории R-функций [6,8]. Следуя [9], искомая структура может быть представлена в виде:

$$w(p_1, p_2) = \omega_1\omega_2 p_1 + \Phi + \frac{\omega_1\omega_2\omega_3}{\omega_1\omega_2 + \omega_3} \times$$

$$\times \left[\sum_{\substack{\mu+\sigma\le n_3\\ \mu,\sigma=0}}^{n_3} \lambda_{\mu\sigma}^{3} x^{\mu} y^{\sigma} + \omega_3 p_2 + D_1^{(1-2)}(\omega_1\omega_2 p_1) - D_1^{(1-2)}\Phi - h\omega_1\omega_2 p_1 - h\Phi \right],$$

где p_1 и p_2 функции, вид которых определяется в процессе решения задачи приближения; функция Φ образуется в результате склейки [6] граничных условий на Γ_1 и Γ_2:

$$\Phi = \frac{\tau_1 \sum\limits_{\substack{\mu+\sigma\le n_1\\ \mu,\sigma=0}}^{n_1} \lambda_{\mu\sigma}^{1} x^{\mu} y^{\sigma} + \tau_2 \sum\limits_{\substack{\mu+\sigma\le n_2\\ \mu,\sigma=0}}^{n_2} \lambda_{\mu\sigma}^{2} x^{\mu} y^{\sigma}}{\tau_1 + \tau_2}, \ \tau_v = \omega_v^{-1}, \ v = 1,2;$$

дифференциальный оператор $D_1^{1-2} = \frac{\partial(\omega_1\omega_2)}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial(\omega_1\omega_2)}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}$, позволяющий осуществить продолжение производной по нормали, заданной на границе области на всю область [8].

Аппроксимирующие функции p_1 и p_2 должны обеспечить приближение функций заданных соответственно на участках Γ_3 и $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$. Этим условием выбирается конечное множество узловых точек, с помощью которых будет реализовываться алгоритм вычисления коэффициентов аппроксимирующих полиномов: $p_1 = \sum\limits_{\mu+\sigma\le q_{01}} c_{\mu\sigma}^{01} x^{\mu} y^{\sigma}, \ p_2 = \sum\limits_{\mu+\sigma\le q_{02}} c_{\mu\sigma}^{02} x^{\mu} y^{\sigma}$.

Процедура построения искомого приближения будет базироваться на идее кусочного приближения, давно применяемого в приложениях [10-11]. Однако эта идея реализуется на основе использования новых математических средств и конструктивных приемов теории приближения.

Носители введенных ранее функций $gut_r[x, y, {}_r\omega(x,y)]$ разбивают основную область $\partial\Omega$ на частичные подобласти $O_\xi(\xi = 0,1,2,...,\chi)$; число χ для всех возможных разбиений считаем фиксированным. Каждая подобласть должна иметь с областью Ω общие внутренние точки, однако не

обязаны целиком лежать в области Ω. Искомую функцию будем приближать в отдельных областях O_ξ различными функциями с помощью класса аппроксимирующих полиномов:

$$P_q(x,y,C^q)=\left\{\sum_{\mu+\sigma\le q} c_{\mu\sigma}x^\mu y^\sigma\right\}.$$

Определим конструктивный вид аппроксимирующих функций для каждой частичной подобласти. Для подобласти O_o, включающей границу $\partial\Omega$, приближение будем искать в виде

$$\Psi_o = gut[x,y,\omega(x,y)]w\left(\sum_{\mu+\sigma\le q_{01}} c^{01}_{\mu\sigma}x^\mu y^\sigma, \sum_{\mu+\sigma\le q_{02}} c^{02}_{\mu\sigma}x^\mu y^\sigma\right).$$

Вид функций для последующих подобластей определяем по подобной схеме, но с различными степенями аппроксимирующих функций (степень аппроксимирующих полиномов зависит от количества точек, необходимых для определения коэффициентов аппроксимирующего полинома):

$$\Psi_r = gut_r[x,y,{}_r\omega(x,y)]\sum_{\mu+\sigma\le q_r} c^r_{\mu\sigma}x^\mu y^\sigma,\ r=1,2,...,\chi$$

Окончательная конструкция приближающей функции (искомое решение краевой задачи) будет иметь вид:

$$u_{ap}=\sum_{r=0}^{\chi}\Psi_r.$$

Искомое множество коэффициентов, таким образом, задается *l*-мерным вектором:

$$C=(C^{q_{01}},C^{q_{02}},C^{q_1},...,C^{q_\chi})=\left(\left\{c^{01}_{\mu\sigma}\right\}_1^{q_{01}},\left\{c^{01}_{\mu\sigma}\right\}_1^{q_{01}},\left\{c^{1}_{\mu\sigma}\right\}_1^{q_1},...,\left\{c^{\chi}_{\mu\sigma}\right\}_1^{q_\chi}\right),$$

$$q_{01}+q_{02}+\sum_{r=1}^{\chi}q_r=l.$$

Поиск неизвестных коэффициентов выполняется по схеме условного приближения, для чего в области Ω должны быть распределены *l* узлов. В каждом узле обеспечивается выполнение интегрального условия (6). Так как из общего количества узлов определенная часть их попадает в соответствующие области O_ξ (их количество задается степенью аппроксимирующего полинома), остается решить вопрос о том, где должны располагаться в области O_ξ эти узлы.

Благодаря тому, что используемые для приближения функции $gut_r[x,y,{}_r\omega(x,y)]$ имеют конечные носители, то область интегрирования в интегральном условии будет определяться носителями этих функций. Свойства функций $gut_r[x,y,{}_r\omega(x,y)]$ позволяют выбрать в качестве одной из возможных схем расположения узлов для в подобластях $O_\xi, \xi=0,1,2,...,\chi,$ с целью удовлетворения интегральных условий, линию ${}_r\omega(x,y)=0,$ являющуюся направляющей для носителя соответствующей функции $gut_r[x,y,{}_r\omega(x,y)]$. Расположим указанные узлы равномерно вдоль линии ${}_r\omega(x,y)=0$.

Остается вопрос выбора метода численного интегрирования по областям, задаваемым носителями функций $gut_r[x,y,{}_r\omega(x,y)], r=0,1,2,...,\chi.$ Данный вопрос требует специального рассмотрения и поэтому не входит в материал данной статьи. Отметим лишь, что для его решения используется методика работы [12].

Алгоритм численного интегрирования контурного интеграла в условии (6) также может быть модифицирован, благодаря наличию в подынтегральной функции геометрически структурированной атомарной функции.

Предложенный подход построения функций, аппроксимирующих решение краевой задачи теплопроводности, ориентирован на описание тепловых полей, формируемых в процессе затвердевания отливки сложной конфигурации. Так как построение аппроксимирующих функций выполняется в отдельных областях, конфигурация которых зависит от конфигурации исходной области отливки, то теплофизические параметры могут задаваться в каждой области в зависимости от стадии процесса затвердевания с учетом фазового состояния соответствующей области отливки [2-3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Баландин Г.Ф. Основы теории формирования отливки.
2. Ч.1. – М.: Машиностроение, 1976. – 328 с.
3. Ч.2. – М.: Машиностроение, 1979. – 335 с.
4. Флемингс М. Процессы затвердевания. – М.: Мир, 1979. – 335 с.
5. Оно А. Затвердевание металлов.- М.: Металлургия, 1980. – 149 с.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. –735с.
7. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. – М.: Мир, 1985. – 589 с.
8. Рвачев В.Л. Теория R–функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 551 с.
9. Колодяжний В.М. Геометрично структуровані атомарні функції // Доповіді НАН України (направлено в печать).
10. Колодяжный В.М., Рвачев В.А. О приближении функций, удовлетворяющих граничным условиям // В сб. Теоретические и прикладные вопросы алгебры и дифференциальных уравнений. – К.: Ин-т математики, 1976. – С.49-53.
11. Рвачев В.Л., Рвачев В.А. Неклассические методы теории приближений в краевых задачах. – К.: Наук. думка, 1979. – 271 с.
12. Коллатц Л., Крабе В. Теория приближений. Чебышевские приближения.- М.: Наука, 1978. – 271 с.
13. Klotter K. Technische Schwingungslehre. – Berlin, Göttingen, Heidelberg: V.I. Aufl. 2, 1951. – 399 p.
14. Kolodyazhny V,M., Shevchenko A.O. The Numerical Schemes of Measure Determination for the Geometric Measurable Objects // Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2002.