УДК 539.3

ПРО МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАНЬ ДЕЯКИХ МЕТАЛОМІСТКИХ КОНСТРУКЦІЙ НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ

[*]Зайцева Т.А., к.ф.-м.н., доцент, Шишканова С.Ф., д.т.н., доцент, Шашкова Є.В., аспірант

[*]Дніпропетровський національний університет
Запорізький державний університет

Отримано рівняння вільних коливань балки на пружній основі, що працює в умовах агресивного середовища, знайдено їхні розв'язки, визначені вирази частот та амплітуд для експоненційної та лінійної залежності розмірів перерізу від часу.

Ключові слова: диференціальне рівняння, згин, агресивне середовище, експоненційна, лінійна залежність, тримаюча конструкція, період часу, пружна основа, поперечний переріз, лінійна регресія.

[*]Зайцева Т.А., Шишканова С.Ф., Шашкова Е.В. О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ КОЛЕБАНИЙ НЕКОТОРЫХ МЕТАЛЛОЕМКИХ КОНСТРУКЦИЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ /[*]Днепропетровский национальный университет; Запорожский государственный университет, Украина

Получены уравнения свободных колебаний балки на упругом основании, работающей в условиях агрессивной среды, найдены их решения, определены выражения частот и амплитуд для экспоненциальной и линейной зависимости размеров сечения от времени.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, изгиб, агрессивная среда, экспоненциальная, линейная зависимость, несущая конструкция, период времени, упругое основание, поперечное сечение, линейная регрессия.

[*]Zaytseva T.A., Shyshkanova S.F., Shashkova Y.V. ABOUT MATHEMATICAL MODELING OF VIBRATIONS OF SOME METAL CAPACIOUS CONSTRUCTIONS ON ELASTIC FOUNDATION /[*]Dnepropetrovsk national university, Zaporizhzhya State University, Ukraine

Free vibrations equations of beam on elastic foundation that works in aggressive surrounding are obtained and found their solutions. Expressions of frequency and amplitude for cross-section size-time exponential and linear relations are defined.

Key words: differential equation, bend, aggressive surrounding, exponential and linear relations, load-bearing construction, time period, elastic foundation, cross-section, linear regression.

При будуванні гідротехнічних споруд, виконанні робіт на суднобудівних заводах, будівництві мостів, експлуатації нафтових вишок на морі, виконанні геологорозвідувальних і нафтодобувних робіт на і під водою використовуються плаваючі металоконструкції дуже великої вантажопідйомності, понтони та інші металомісткі конструкції, які працюють на пружній основі в умовах агресивного середовища, що спричиняє інтенсивну корозію металу, суттєво зменшує розміри поперечного перерізу утримувальних конструкцій і призводить до аварії.

На відміну від багатьох сучасних машин та обладнання моральне старіння таких металоконструкцій іде більш повільно. Вони знаходяться в експлуатації тривалий період часу. Заміна таких металоконструкцій – операція, яка дорого коштує. У зв'язку з цим однією з актуальних проблем сучасного машинобудування є довговічність плаваючих кранів [1,2], понтонів та інших металомістких конструкцій, які працюють на пружній основі в умовах надзвичайно агресивного середовища, що спричиняє інтенсивну корозію металу.

Розглянемо малі поперечні коливання балки на пружній вінклеровій основі із змінним за часом перерізом. Припустимо, що балка має хоча б одну поздовжню площину симетрії і коливання розглядаємо в цій площині. Вважатимемо прямолінійну вісь балки в недеформованому стані за вісь x. З огляду малості коливань переміщення будь-якої точки осі в момент часу t визначається координатою y. Малими зміщеннями перерізів поздовж осі і зв'язаними з цим силами інерції нехтуємо. Вважаємо, що коливання відбуваються з малими амплітудами, при яких зберігається пропорціональність між силами пружності і відхиленнями від стану рівноваги, або, що те ж саме, між силами пружності та деформаціями балки. Далі, не будемо враховувати інерцію повороту елементів перерізу балки і припустимо, що повздовжня сила дорівнює нулю і що абсолютна швидкість частинок, які від'єднуються внаслідок корозії, дорівнює нулю. Наприклад, частинки мають можливість просто відпасти, вимитися водою, відокремитись внаслідок дії повітряних потоків, розчинитися в середовищі [3].

При прийнятих припущеннях диференціальне рівняння вільних коливань балки має вигляд [4,5]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)+ky+m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial m}{\partial t}=0, \tag{1}$$

де *m, EJ* – погонна маса балки і жорсткість щодо згину, *k* - коефіцієнт пружності основи, *t* - час роботи балки в конкретному циклі.

Припустимо, що погонна маса і згинна жорсткість залежать від часу, тобто

$$EJ=EJ_0\psi_1(t),\quad m=m_0\psi_2(t). \tag{2}$$

Уведемо безрозмірну координату $\xi=\frac{x}{l}$, яка змінюється повздовж балки від нуля до одиниці, де *l* – довжина балки, і представимо шукану функцію згину $y(\xi,t)$ як добуток двох незалежних функцій:

$$y(\xi,t)=Y(\xi)T(t). \tag{3}$$

Підставлення (3) з урахуванням (2) до диференціального рівняння (1) призводить до розпаду останнього на два самостійні рівняння

$$\frac{d^2T}{dt^2}+\frac{1}{\psi_2}\frac{d\psi_2}{dt}\frac{dT}{dt}+\left(\frac{k}{m_0}+p^2\psi_1\right)\frac{1}{\psi_2}T=0; \tag{4}$$

$$Y^{(4)}-\lambda^4 Y=0,\quad \lambda^4=\frac{p^2l^4m_0}{EJ_0}. \tag{5}$$

Розглянемо випадок, коли балка має прямокутний переріз, лінійні розміри якого внаслідок дії агресивного середовища зменшуються за лінійним законом залежно від часу перебування балки в умовах агресивного середовища. Через те, що для прямокутного перерізу

$$J=\frac{bh^3}{12},\quad m=\rho bh,$$

де *b* – ширина поперечного перерізу, *h* – висота, при прийнятому припущенні, позначаючи через EJ_0 і m_0 початкові згинну жорсткість і погонну масу, одержуємо такі залежності:

$$EJ=EJ_0\left[1-\beta(\tau+t)\right]^4 \tag{6}$$

$$m=m_0\left[1-\beta(\tau+t)\right]^2 \tag{7}$$

Тут прийнято такі позначення: τ – час знаходження балки в умовах агресивного середовища до початку роботи в конкретному циклі; *t* – поточний час роботи балки в конкретному циклі; β – параметр, що визначається експериментально. З урахуванням залежностей (6), (7) диференціальне рівняння (4) має вигляд

$$(1-\beta\tau-\beta t)^2\frac{d^2T}{dt^2}-2\beta(1-\beta\tau-\beta t)\frac{dT}{dt}+\left[\frac{k}{m_0}+p^2(1-\beta\tau-\beta t)^4\right]\cdot T=0. \tag{8}$$

Далі використаємо можливість одержане рівняння (8) за допомогою заміни

$$T=(1-\beta\tau-\beta t)^{-\frac{1}{2}}u(\zeta), \tag{9}$$

$$\zeta=\frac{1}{2}\frac{p}{\beta}(1-\beta\tau-\beta t)^2 \tag{10}$$

звести до рівняння

$$\zeta^2u''+\zeta u'+\left(\zeta^2-\frac{m_0\beta^2-4k}{16m_0\beta^2}\right)u=0, \tag{11}$$

яке є рівнянням Бесселя.

Тому розв'язок рівняння (8) у випадку, коли $m_0\beta^2 - 4k \geq 0$, має вираз через функції Бесселя з дійсним індексом

$$T = (1-\beta\tau-\beta t)^{-\frac{1}{2}}\left[C_1 J_\nu(\zeta) + C_2 N_\nu(\zeta)\right]. \tag{12}$$

Тут

$$\nu = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{4k}{m_0\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}}; \tag{13}$$

C_1, C_2 – довільні сталі;

$J_\nu(\zeta), N_\nu(\zeta)$ – функції Бесселя першого і другого роду відповідно.

У випадку, коли $m_0\beta^2 - 4k < 0$, розв'язок рівняння (8) має вираження через дійсні функції $K_{\eta,\theta}(\zeta), S_{\eta,\theta}(\zeta)$ і інші, які є дійсними і уявними частинами функцій Бесселя з комплексним індексом [6], наприклад,

$$J_{\eta+i\theta}(\zeta) = C\zeta^\eta\left[cos\,\theta\cdot ln\,\zeta + i\cdot sin\,(\theta\cdot ln\,\zeta)\right]\cdot\left[K_{\eta,\theta}(\zeta) + iS_{\eta,\theta}(\zeta)\right].$$

Звичайно τ набагато більше, ніж t, через те, що τ вимірюється роками(кількістю годин протягом декількох років), як час перебування балки в умовах агресивного середовища до початку роботи в конкретному циклі, а t – одиницями годин, як час роботи балки в конкретному циклі. У зв'язку з цим в рівнянні (8) маємо можливість знехтувати значенням t в порівнянні з τ там, де вони входять сумою. У такому випадку диференціальне рівняння (8) значно спроститься і набуде вигляду

$$\frac{d^2T}{dt^2} - 2\beta\frac{1}{1-\beta\tau}\frac{dT}{dt} + \left[\frac{k}{m_0(1-\beta\tau)^2} + p^2(1-\beta\tau)^2\right]\cdot T = 0. \tag{14}$$

Одержання розв'язків рівняння (14) не завдає великих труднощів

$$T = e^{\frac{\beta t}{1-\beta\tau}}\left(A_1\,cos\,\omega t + A_2\,sin\,\omega t\right), \quad \text{при} \quad \left[\beta^2 - \frac{k}{m_0} - p^2(1-\beta\tau)^4\right] < 0; \tag{15}$$

$$T = e^{\frac{\beta t}{1-\beta\tau}}\left(A_1 + A_2 t\right), \quad \text{при} \quad \left[\beta^2 - \frac{k}{m_0} - p^2(1-\beta\tau)^4\right] = 0; \tag{16}$$

$$T = e^{\frac{\beta t}{1-\beta\tau}}\left(A_1 e^{\omega t} + A_2 e^{-\omega t}\right), \quad \text{при} \quad \left[\beta^2 - \frac{k}{m_0} - p^2(1-\beta\tau)^4\right] > 0; \tag{17}$$

$$\text{Тут } \omega = \frac{1}{1-\beta\tau}\sqrt{\left|\beta^2 - \frac{k}{m_0} - p^2(1-\beta\tau)^4\right|}; \tag{18}$$

A_1, A_2 – довільні сталі, що визначаються з початкових умов.

Звичайно β дуже мале($\beta\tau < 1$), тому практично коливання балки описуються залежністю (15), із якої видно, що амплітуда коливань балки на пружній основі, яка знаходиться в умовах агресивного середовища, зростає з часом.

Другим є припущення про те, що лінійні розміри поперечного перерізу балки внаслідок дії агресивного середовища з часом зменшуються за експоненційним законом. У такому випадку одержуємо для маси одиниці довжини і згинної жорсткості балки такі залежності:

$$EJ = EJ_0 e^{-4\alpha(\tau+t)}, \tag{19}$$

$$m = m_0 e^{-2\alpha(\tau+t)}, \tag{20}$$

де α – параметр, що визначається експериментально.

З урахуванням залежностей (19),(20) диференціальне рівняння (4) набуває вигляду

$$\frac{d^2T}{dt^2} - 2\alpha\frac{dT}{dt} + \left(\frac{k}{m_0}e^{2\alpha(\tau+t)} + p^2 e^{-2\alpha(\tau+t)}\right)T = 0. \tag{21}$$

Через те, що звичайно τ більше ніж t, у рівнянні (21) нехтуємо значенням t у порівнянні з τ там, де вони входять сумою. Одержимо в такому випадку диференціальне рівняння (21), що матиме більш простий вигляд

$$\frac{d^2T}{dt^2} - 2\alpha\frac{dT}{dt} + \left(\frac{k}{m_0}e^{2\alpha\tau} + p^2 e^{-2\alpha\tau}\right)T = 0. \tag{22}$$

Розв'язок рівняння (22) легко визначається:

$$T = e^{\alpha t}\left(C_1 \cos\omega_1 t + C_2 \sin\omega_1 t\right) \text{ при } \alpha^2 - \left(\frac{k}{m_0}e^{2\alpha\tau} + p^2 e^{-2\alpha\tau}\right) < 0; \tag{23}$$

$$T = e^{\alpha t}\left(C_1 + C_2 t\right) \text{ при } \alpha^2 - \left(\frac{k}{m_0}e^{2\alpha\tau} + p^2 e^{-2\alpha\tau}\right) = 0; \tag{24}$$

$$T = e^{\alpha t}\left(C_1 e^{\omega_1 t} + C_2 e^{-\omega_1 t}\right) \text{ при } \alpha^2 - \left(\frac{k}{m_0}e^{2\alpha\tau} + p^2 e^{-2\alpha\tau}\right) > 0; \tag{25}$$

Тут $\omega_1 = \sqrt{\left|\alpha^2 - \left(\frac{k}{m_0}e^{2\alpha\tau} + p^2 e^{-2\alpha\tau}\right)\right|}$; C_1, C_2 – довільні сталі.

Таким чином, припускаючи, що лінійні розміри поперечного перерізу балки на пружній основі з часом зменшуються за експоненційним законом, одержуємо з виразу (23), як і в попередньому випадку, що амплітуда коливань балки, яка знаходиться в умовах агресивного середовища, зростає з часом [7].

Під час роботи металоконструкцій в умовах агресивного середовища потрібно знайти закони, за якими змінюються розміри працюючих металоконструкцій залежно від часу роботи таких конструкцій в умовах агресивного середовища, щоб прогнозувати термін безаварійної роботи. Для визначення параметрів цих законів, здавалось би, достатньо зробити заміри змін розмірів конструкцій. Але це не завжди можна виконати, крім того, геометричні заміри можуть підвести через те, що, наприклад, при корозії розміри перерізів балки можуть незначно змінитися, але жорсткістні характеристики мають можливість змінитися дуже сильно. Тому бажано проводити заміри частот власних коливань і за їхнім набором визначати параметри законів, згідно з якими змінюються жорсткістні характеристики, маса, розміри. Через те, що в загальному вигляді розглядання задачі при всіх типах статичного і динамічного навантаження, що діє в умовах агресивного середовища на таку складну конструкцію, як мостовий кран, наприклад, на цей час не є можливим, доцільно розглянути, насамперед, спрощену модель крана у вигляді його головної утримувальної балки.

Розглянемо власні коливання балки на двох опорах, у якої згинна жорсткість EJ і погонна маса m залежать від часу t і координати перерізу x таким чином:

$$EJ = \varphi_1(x) f_1(t), \quad m(x,t) = \varphi_2(x) f_2(t). \tag{26}$$

Рівняння власних коливань

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = -m(x,t)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{27}$$

можливо звести до двох рівнянь

$$\varphi_1(x)X^{(4)} + 2\varphi_1'(x)X^{(3)} + \varphi_1''(x)X'' - \lambda^4\varphi_2(x)X = 0, \tag{28}$$

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \lambda^4 \frac{f_1(t)}{f_2(t)}T = 0, \tag{29}$$

якщо припустити, що шуканий розв'язок

$$y(x,t) = X(x)\cdot T(t). \tag{30}$$

Розглянемо спочатку випадок, коли $\varphi_1(x) = 1, \varphi_2(x) = 1$, тобто повздовж довжини головної балки зміна лінійних розмірів відбувається однаково. Тоді рівняння (28) перейде в

$$X^{(4)} - \lambda^4 X = 0. \tag{31}$$

Припустимо, що

$$EJ = EJ_0 e^{-4\beta(\tau+t)}, \quad m = m_0 e^{-2\beta(\tau+t)}. \tag{32}$$

Тоді рівняння (29) для визначення $T(t)$ набуває вигляду

$$\frac{d^2T}{dt^2} + p^2 e^{-2\beta(\tau+t)}T = 0, \tag{33}$$

$$p^2 = \lambda^4 \frac{EJ_0}{m_0}.$$

Його розв'язок є

$$T(t) = C_1 I_0\left(\frac{p}{\beta}e^{-\beta(\tau+t)}\right) + C_2 N_0\left(\frac{p}{\beta}e^{-\beta(\tau+t)}\right), \tag{34}$$

коефіцієнти якого визначаються з початкових умов; $I_0(z), N_0(z)$ – функції Бесселя першого і другого роду. Через те, що τ значно більше ніж *t*, у рівнянні (33) нехтуємо *t* в порівнянні з τ, одержимо

$$\frac{d^2T}{dt^2} + p^2 e^{-2\beta\tau}T = 0, \tag{35}$$

його розв'язки

$$T_n(t) = C_{1n}\cos\omega_n t + C_{2n}\sin\omega_n t, \tag{36}$$

$$\omega_n = p_n e^{-\beta\tau} = \frac{n^2\pi^2}{e^2}\lambda_0 e^{-\beta\tau}; \quad \lambda_0^2 = \frac{EJ_0}{m_0}. \tag{37}$$

Якщо позначити

$$\frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{EJ_0}{m_0}}. = e^{\tau_0}, \tag{38}$$

то вираз (37) можливо записати у вигляді

$$z = -\beta\tau + \tau_0, \text{де } z = ln\left(\frac{\omega_n}{n^2\pi^2}\right), \tag{39}$$

що припустимо розглядати як рівняння лінійної регресії *z* на τ, коефіцієнти якої β і τ_0 можна визначити за методом найменших квадратів.

Таким чином, якщо зміна лінійних розмірів відбувається рівномірно повздовж довжини головної балки, то за набором власних частот ω_n, заміряних у різний час, можливо визначити параметри β і τ_0, що входять до прийнятого закону змінення жорсткості і маси.

Випадок, коли нерівномірно розповсюджується зміна згинної жорсткості та погонної маси повздовж довжини головної балки, можна звести до лінійної регресії, якщо врахувати, що

$$EJ = EJ_0 e^{-\alpha\xi} f_1(t), \quad m = m_0 e^{-\alpha\xi} f_2(t), \quad \xi = \frac{x}{l}. \tag{40}$$

При прийнятих раніше припущеннях відносно $f_1(t), f_2(t)$, із рівняння (35) одержуємо розв'язок (36), у якому частота дорівнює

$$\omega_n = p_n e^{-\beta\tau} = \frac{k_n^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ_0}{m_0}}e^{-\beta\tau}, \tag{41}$$

$$k_n = f(\lambda, \alpha). \tag{42}$$

Позначимо $e^{\tau_0} = \dfrac{f^2(\lambda,\alpha)}{l^2}\sqrt{\dfrac{EJ_0}{m_0}}$ (43)

і одержимо

$$ln\,\omega_n = -\beta\tau + \tau_0 \tag{44}$$

рівняння лінійної регресії $ln\,\omega_n$ на τ.

Тепер розглянемо іншу залежність згинної жорсткості і погонної маси від часу. Нехай

$$EJ = EJ_0 \frac{1}{[\beta(\tau + t) + 1]^4}, \quad m = m_0 \frac{1}{[\beta(\tau + t) + 1]^2}. \tag{45}$$

Диференціальне рівняння (29) перейде в

$$\frac{d^2T}{dt^2} + p^2 \frac{1}{(\beta\tau + \beta t + 1)^2} T = 0, \tag{46}$$

яке при $\tau >> t$ запишемо у вигляді

$$\frac{d^2T}{dt^2} + p^2 \frac{1}{(\beta\tau + 1)^2} T(t) = 0, \tag{47}$$

$$\omega_n = p_n \frac{1}{\beta\tau + 1}, \quad p_n = \sqrt{\frac{EJ_0}{m_0}} \cdot \frac{l^2}{n^2\pi^2}. \tag{48}$$

Позначимо $\dfrac{1}{\omega_n} = z$ і одержимо рівняння лінійної регресії

$$z = \rho\tau + \tau_0, \quad \tau_0 = \frac{1}{p_n}, \quad \rho = \beta\tau_0. \tag{49}$$

Випадок, коли зміна лінійних розмірів відбувається нерівномірно повздовж довжини головної балки теж можливо привести до лінійної регресії, якщо в (26) з урахуванням (45) вважати, що

$$\varphi_1(\xi) = (\alpha\xi - 1)^8, \quad \varphi_2(\xi) = (\alpha\xi - 1)^4 \tag{50}$$

Виконуючи подальшу ідентифікацію математичної моделі змінення згинної жорсткості і погонної маси, знайдемо за допомогою методів математичної статистики, зокрема метода найменших квадратів, параметри лінійної регресії. Використовуючи критерій згоди, визначаємо найбільш вірогідні закони змінення згинної жорсткості, погонної маси.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бабаев Н.Н., Лентяков В.Г. Некоторые вопросы общей вибрации судов.-Л.:Судпромгиз,1961.-308 с.
2. Петухов П.З., Ксюгин Г.П., Серлин Л.Г. Специальные краны.-М.:Машиностроение,1985.-246 с.
3. Петров Л.Н. Коррозия под напряжением.-К.:Вища шк.,1986.-142 с.
4. Коренев В.Г. Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях.-М.:ГИФМЛ,1960.-458 с.
5. Мещерский И.В. Работы по механике тел переменной массы.-М.:ГИТТЛ,1952.-280 с.
6. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций.-М.:ИЛ,1949.-Т.1.-798 с.
7. Зайцева Т.А., Шишканова С.Ф. Изменение амплитудно-частотных характеристик гидротехнических сооружений при интенсивной коррозии//Вибродиагностика машин и механизмов. Методы и средства.: Сборник научных трудов. ЦИАМ, Москва, ЗМИ, Запорожье, 1987.-С.64-69.