УДК 517.925.4

ПРО ПІДХОДИ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ІЗ ТОЧКОЮ ПОВОРОТУ, ЗАСНОВАНІ НА ВИКОРИСТАННІ ГІБРИДНИХ МЕТОДІВ. ЧАСТИНА ПЕРША

Герасімов Т.С., асистент, Грищак В.З., д.т.н., професор

Запорізький державний університет

У роботі на основі використання гібридних методів ВКБ-Гальоркіна, збурювань-Гальоркіна, а також прийомів варіаційного числення запропоновано новий підхід до побудови наближеного аналітичного розв'язку високого ступеня точності для рівняння другого порядку із параметром і точкою повороту. Підхід дозволяє уникнути обчислювально-аналітичних труднощів, громіздких рутинних перетворень, які закономірно виникають при використанні класичних методів збурювань (багатьох масштабів, зрощених розвинень, ВКБ-наближень). Отриманий за допомогою наведеного підходу розв'язок природним способом урятовано від недоліків відомих асимптотичних розв'язків (перш за все локальності області застосування) – він є рівномірно придатним у всій області зміни аргументу, включаючи окіл точки повороту, а також дійсним на широкому інтервалі зміни параметра збурювання задачі. Алгоритм розв'язання задачі дозволяє реалізувати всі його етапи, включаючи одержання кінцевого результату, на ЕОМ, у середовищі символьних обчислень Maple 6.

Ключові слова: диференційне рівняння, точка повороту, параметр збурення, гібридний підхід, наближений аналітичний розв'язок

Герасимов Т.С., Грищак В.З. О ПОДХОДАХ К РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ТОЧКОЙ ПОВОРОТА, ОСНОВАННЫХ НА ИСПОЛЬЗОВАНИИ ГИБРИДНЫХ МЕТОДОВ. ЧАСТЬ ПЕРВАЯ / Запорожский государственный университет, Украина

В работе на основе использования гибридных методов ВКБ-Галеркина, возмущений-Галеркина, а также приемов вариационного исчисления предложен новый подход к построению приближенного аналитического решения высокой степени точности для уравнения второго порядка с параметром и точкой поворота. Подход позволяет избежать вычислительно-аналитических трудностей, громоздких рутинных преобразований, которые закономерно возникают при использовании классических методов возмущений (многих масштабов, сращиваемых разложений, ВКБ-приближений). Полученное с помощью предложенного подхода решение естественным образом избавлено от недостатков известных асимптотических решений (прежде всего локальности области применения) – оно является равномерно пригодным во всей области изменения аргумента, включая окрестность точки поворота, а также действительным на широком интервале изменения параметра возмущение задачи. Алгоритм решения задачи позволяет реализовать все его этапы, включая получение конечного результата, на ЭВМ, в среде символьных вычислений Maple 6.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, точка поворота, параметр возмущения, гибридный подход, приближенное аналитическое решение

Gerasimov T.S., Gristchak V.Z. NEW APPROACHES TO THE SOLVING OF SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH TURNING POINT, BASED ON HYBRID METHODS. PART ONE / Zaporizhzhya state university, Ukraine

In the paper on the basis of application of hybrid WKB-Galerkin, perturbation-Galerkin methods simultaneously with variational principles new approach to the solving of second order differential equation with perturbation parameter and turning point was considered and discussed. Such an approach enables to obtain the approximate analytical solution of the problem with high level of accuracy (both for small and large values of perturbation parameter) and which is valid throughout within the domain of definition, including a turning point. The usage of the offered approach to the same class of problems allows to avoid computing-analytical difficulties, significant routine transformations, which regularly arise at usage of classic perturbation methods (method of many scales, spliced expansions, phase integrals). The algorithm of the problem's solving allows to realize all its stages, including obtaining of final results, on a computer calculations' package Maple 6.

Key words: differential equation, turning point, perturbation parameter, hybrid approach, approximate analytical solution

1. ВСТУП

Багато задач, що виникли свого часу в теоретичній фізиці, призводять до рівняння другого порядку вигляду

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \qquad (1)$$

У деяких досить окремих випадках записане рівняння призводить до одного з добре вивчених стандартних рівнянь (Беселя, Ері тощо). У загальному ж випадку не можна представити розв'язок рівняння (1) у вигляді ряду по ступенях x або асимптотичного ряду по ступенях $1/x$. Тому виникає необхідність у наближених методах. Так, наприклад, метод фазних інтегралів (або ВКБ-метод) є досить могутнім наближеним методом розв'язання рівняння вигляду (1), а так само більш загального рівняння вигляду

$$y'' + \lambda^2 q(x,\lambda)y = 0, \qquad (2)$$

де λ – великий параметр, а $q(x,\lambda)$ – функція x і λ. При деяких умовах на q наближені розв'язки цього рівняння мають вигляд

$$y = q^{-1/4} \exp(\pm i\lambda \int \sqrt{q}\,dx)\left[1 + O(\lambda^{-1})\right]. \qquad (3)$$

Розв'язки (3) в силу наявності в них множника $q^{-1/4}$ перестають бути вірними в околі нулів функції $q(x,\lambda)$, або інакше *точок повороту*. Проблема визначення формул зв'язку між ВКБ-розв'язками (3), що придатні по різні сторони від точки повороту, із різним ступенем строгості і ясності розглядалася в ряді робіт [1]. Перші систематичні формули зв'язку були отримані Джефрісом [2].

Однак наближені розв'язки рівняння (2), що можуть бути одержані як за допомогою формул зв'язку Джефріса, так і яким-небудь іншим способом (методи Ганса, Цваана, Фарі [1]) містять два істотних недоліку. По-перше, область застосування таких розв'язків завжди обмежена величиною параметра λ (всі вони побудовані в припущенні, що параметр λ великий). По-друге, ці розв'язки є розривними в точці повороту, а тому не дозволяють проаналізувати поведінку „справжнього" розв'язку рівняння (2) у цій точці та у її околі.

Принципово інша ідея побудови наближеного розв'язку рівняння (2) розвинена в роботах Лангера [2, 3]. Він зміг одержати «таке представлення розв'язку, який був придатним у всій області зміни аргументу x». Тобто Лангер дістав для рівняння (2) наближений розв'язок, який містить функцію Ері, у силу чого він є придатним у точці повороту. Між тим асимптотика такого розв'язку у віддаленні від точки повороту збігається з ВКБ-асимптотикою. Представлення розв'язку, яке буде придатним у точці повороту, є основною темою досліджень сучасних авторів, що займаються асимптотичними методами.

У ряді досліджень авторів цієї статті розглянуто нові підходи до розв'язання диференціального рівняння вигляду (2). Так, гібридний метод ВКБ-Гальоркіна [4] дозволяє побудувати нові (гібридні) розв'язки вихідного рівняння в областях, вільних від точки повороту – так звані *зовнішні* асимптотики – близькі до точного при будь-яких значеннях λ, як великих, так і малих. Знаходження формул зв'язку між гібридними ВКБ-Гальоркін розв'язками, які є придатними ліворуч і праворуч від точки повороту, здійснюється за допомогою *внутрішнього* розвинення. Внутрішнє розвинення побудовано гібридним методом збурювань-Гальоркіна [5] в σ-околі точки повороту, а точніше в інтервалі $[-\sigma_1, \sigma_2]$. Застосування зазначених гібридних підходів дозволяє зрощувати зовнішні та внутрішню аимптотики, використовуючи вже не граничний перехід (при малих λ його взагалі не можливо здійснити), а деякі інші умови. В статті буде показано, що умовою зрощення трьох розв'язків може виступати неперервність y і y' у *точках зрощення*. Результатом розв'язання задачі є аналітичний розв'язок, придатний усюди, включаючи саму точку повороту та її окіл. За допомогою принципів варіаційного числення запропоновано критерій оптимального вибору параметрів $-\sigma_1$ і σ_2.

Взагалі, гібридний підхід ВКБ-Гальоркіна, ідею якого запропоновано та наведено в роботі [4], дотепер успішно застосовується до розв'язання диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами і параметром при старшої або старших похідних [6,7]. При цьому, наприклад, для рівняння вигляду (2) розв'язки побудовані лише в областях, де функція q не містила ані точок повороту, ані полюсів. Наведене тут дослідження в деякою мірою компенсує цей пробіл, розвиваючи ідеї, закладені в роботі [4].

2. ПОБУДОВА ЗОВНІШНІХ АСИМПТОТИК ЗА ДОПОМОГОЮ ГІБРИДНОГО ВКБ-ГАЛЬОРКІН ПІДХОДУ

Отже, заповізьмемося побудувати на інтервалі $x \in [-a, b]$, $a > 0, b > 0$ наближений аналітичний розв'язок диференціального рівняння зі змінним коефіцієнтом і точкою повороту

$$\varepsilon^2 y'' - f(x)y = 0, \tag{4}$$

де

$$\begin{cases} f(x) < 0, & -a \le x < 0, \\ f(x) > 0, & 0 < x \le b, \end{cases} \quad \text{і} \quad f(0) = 0,\ f'(0) \ne 0,$$

а $\varepsilon > 0$ – параметр, початково передбачуваний малим. Умову $f(0) = 0$ можна вважати загальною, оскільки до неї можна звести будь-який інший випадок $f(c) = 0$, $c \ne 0$ заміною $t = x - c$.

Граничні умови покладемо такими

$$y(-a) = A \quad \text{і} \quad y(b) = B. \tag{5}$$

При малих значеннях параметра $\varepsilon << 1$ наближений розв'язок рівняння (4) можна одержати за допомогою методу фазних інтегралів. Так, двочленне ВКБ-розвинення має вигляд:

$$y_{WKB} = \exp \int (\varepsilon^{-1}\psi_0 + \psi_1)dx. \tag{6}$$

Підставимо вираз (6) у рівняння (4). Збираючи коефіцієнти при однакових ступенях параметра ε, та розв'язуючи відповідні рівняння, можна знайти

$$\psi_0 = \begin{cases} \pm i\left(-f(x)\right)^{1/2}, & x < 0, \\ \pm f^{1/2}(x), & x > 0, \end{cases} \tag{7}$$

де $i = \sqrt{-1}$, і

$$\psi_1 = -\frac{\psi_0'}{2\psi_0} = \begin{cases} -\frac{1}{4}\frac{d}{dx}\ln\left(-f(x)\right), & x < 0, \\ -\frac{1}{4}\frac{d}{dx}\ln f(x), & x > 0. \end{cases} \tag{8}$$

З урахуванням (7) і (8) загальний ВКБ-розв'язок ліворуч і праворуч від точки $x = 0$ (позначимо його відповідно як і y^{+}_{WKB}) запишеться так:

$$y^{-}_{WKB}(x,\varepsilon) = \frac{1}{(-f)^{1/4}}\left[c_1 \cos\left(\varepsilon^{-1}\int_{-a}^{x}(-f)^{1/2}d\tau\right) + c_2 \sin\left(\varepsilon^{-1}\int_{-a}^{x}(-f)^{1/2}d\tau\right)\right], \quad x < 0, \tag{9}$$

$$y^{+}_{WKB}(x,\varepsilon) = \frac{1}{f^{1/4}}\left[a_1 \exp\left(-\varepsilon^{-1}\int_{x}^{b} f^{1/2}d\tau\right) + a_2 \exp\left(\varepsilon^{-1}\int_{x}^{b} f^{1/2}d\tau\right)\right], \quad x > 0. \tag{10}$$

Можна вважати, що формули (9) і (10) дають два різних представлення однієї і тієї ж функції $y(x)$, які є придатними по різні сторони від точки повороту. Ясно, що довільні постійні a_1, a_2 й c_1, c_2 у розв'язках (9) і (10) повинні бути зв'язані між собою, оскільки рівняння (4) має другий порядок і його розв'язок визначається лише двома довільними постійними.

Як було зазначено вище, для відшукання додаткових співвідношень між цими постійними необхідно використовувати певні формули зв'язку для областей $x > 0$ і $x < 0$. Взагалі ця процедура припускає побудову так званого внутрішнього розвинення рівняння (4), що є придатним в околі $x = 0$, і його подальше *зрощення* (тобто *узгодження*) з областями $x > 0$ і $x < 0$ за допомогою *граничного переходу*.

Однак у випадку, якщо функція f у рівнянні (4) не задана спеціальним способом, здійснити процедуру побудови внутрішнього розвинення та зробити граничний перехід для його зрощення із зовнішніми розвиненнями неможливо, а в кожному конкретному випадкові досить громіздко. Недолік одержаного в такий спосіб розв'язку рівняння (4) полягає в тому, що він буде задаватися трьома окремими розвиненнями – (9), (10) і внутрішнім – придатними в трьох областях, що перекриваються, тобто не буде

рівномірно придатним. Більше того, такий розв'язок буде дійсним лише при малих ε, тому що всі три згадані розвинення, що входять до нього, були побудовані саме по такій передумові.

Підхід, запропонований нижче, доставляє розв'язок рівняння (4), звільнений від подібних недоліків. Цей розв'язок буде а) складеним, тобто складатися з трьох окремих розвинень, зрощених між собою так, що загальний розв'язок буде рівномірно придатним на всій області свого визначення; б) дійсним на широкому інтервалі зміни параметра ε, що є особливо цінним.

Опишемо коротко послідовні етапи, реалізація яких складає сутність запропонованого нами підходу. Отже, гібридні ВКБ-Гальоркін розв'язки рівняння (4) будуються ліворуч і праворуч від точки повороту відповідно на інтервалах $[-a,-\sigma_1]$ і $[\sigma_2,b]$, де $-\sigma_1$ і σ_2 – невідомі параметри. В околі точки повороту, на інтервалі $[-\sigma_1,\sigma_2]$ за допомогою методу збурювань-Гальоркіна побудуємо внутрішнє розвинення. Для того, щоб зростити всі три розв'язки в точках $x=-\sigma_1$ і $x=\sigma_2$, будемо вимагати неперервності самих розв'язків у цих точках, а також неперервності їхніх перших похідних. Отриманий у такий спосіб безперервний складений розв'язок (а саме його точність) буде залежати від вибору параметрів $-\sigma_1$ і σ_2. Для їхнього відшукання ми формулюємо варіаційну задачу: досліджуємо на екстремум функціонал, для якого рівняння (4) являється рівнянням Ейлера. При підстановці у функціонал отриманого гібридного розв'язку, дослідження на екстремум вихідного функціонала перетворюється в дослідження на екстремум функції двох змінних $\varphi(-\sigma_1,\sigma_2)$.

Розглянемо всі етапи докладніше.

Модифіковане гібридне ВКБ-Гальоркін розвинення вихідного рівняння в двох наближеннях буде таким:

$$y_H = \exp\int(\delta_0\psi_0+\psi_1)dx\,, \tag{11}$$

де функції ψ_0,ψ_1 визначені раніше (формули 7, 9), δ_0 – невідома «амплітуда» функції ψ_0. Відповідно до методики гібридного ВКБ-Гальоркін підходу для визначення δ_0 в розвиненні (11), необхідно зажадати виконання умови ортогональності нев'язки

$$R=\varepsilon^2\left[\delta_0^2\psi_0^2+\delta_0(\psi_0'+2\psi_0\psi_1)+\psi_1^2+\psi_1'\right]-f(x)\,, \tag{12}$$

яка виходить при підстановці (11) до рівняння (4) та координатної функції ψ_0. Ця умова має вигляд:

$$\int\limits_{\Omega\pm} R\psi_0 dx=0\,, \tag{13}$$

де $\Omega^-=[-a,-\sigma_1]$ і відповідно $\psi_0=\pm i(-f)^{1/2}$, $\psi_1=-\dfrac{(-f)'}{4(-f)}$,

$\Omega^+=[\sigma_2,b]$ і відповідно $\psi_0=\pm f^{1/2}$, $\psi_1=-\dfrac{f'}{4f}$.

У загальному випадку умова (13) з урахуванням (12) і відповідних позначень для ψ_0,ψ_1 являє собою квадратне алгебраїчне рівняння відносно δ_0:

$$\delta_0^2\int\limits_{\Omega\pm}\psi_0^3dx+\int\limits_{\Omega\pm}(\psi_1^2+\psi_1'-\varepsilon^{-2}f)\psi_0dx=0\,, \tag{14}$$

звідки знайдемо

$$\delta^-_{0_{1,2}}=\pm\sqrt{\frac{\displaystyle\int\limits_{-a}^{-\sigma_1}\frac{2(-f)'^2-(-f)''(-f)}{4(-f)^{3/2}}dx}{\displaystyle\int\limits_{-a}^{-\sigma_1}(-f)^{3/2}dx}+\frac{1}{\varepsilon^2}}\,,\quad \delta^+_{0_{1,2}}=\pm\sqrt{-\frac{\displaystyle\int\limits_{\sigma_2}^{b}\frac{2f'^2-f''f}{4f^{3/2}}dx}{\displaystyle\int\limits_{\sigma_2}^{b}f^{3/2}dx}+\frac{1}{\varepsilon^2}}\,. \tag{15}$$

У формулах (15) зовнішній знак «±» не залежить від знака відповідної функції ψ_0.

Підстановка першої формули (15) та відповідних функцій $\psi_0 = \pm i(-f)^{1/2}$ і ψ_1 у розвинення (11) дає загальний гібридний розв'язок на інтервалі $[-a,-\sigma_1]$:

$$y_H^-(x,\varepsilon) = \frac{1}{(-f)^{1/4}}\left[\widetilde{c}_1 \cos\left(\delta_0^- \int_{-a}^{x} (-f)^{1/2}\, d\tau\right) + \widetilde{c}_2 \sin\left(\delta_0^- \int_{-a}^{x} (-f)^{1/2}\, d\tau\right)\right], \quad x < 0. \tag{16}$$

Аналогічно, з урахуванням другої формули (15) та функцій $\psi_0 = \pm f^{1/2}$ і ψ_1, в інтервалі $[\sigma_2, b]$ загальний гібридний розв'язок запишеться так:

$$y_{WKB}^+(x,\varepsilon) = \frac{1}{f^{1/4}}\left[\widetilde{a}_1 \exp\left(-\delta_0^+ \int_{x}^{b} f^{1/2} d\tau\right) + \widetilde{a}_2 \exp\left(\delta_0^+ \int_{x}^{b} f^{1/2} d\tau\right)\right], \quad x > 0. \tag{17}$$

У формулах (16), (17) $\widetilde{c}_n, \widetilde{a}_n$ – довільні постійні. Як бачимо, ВКБ-Гальоркін розв'язки (16), (17) також, як і (9), (10), непридатні в околі точки повороту. Цей окіл є для гібридного розв'язку так званим прикордонним шаром, тобто областю різкої зміни його поведінки. Виникає ідея зростити розв'язки (16) і (17) за допомогою гібридного внутрішнього розвинення, побудованого в інтервалі $[-\sigma_1, \sigma_2]$, що цілком покриває прикордонний шар, і є придатним в ньому. Усі три розвинення ми «гладко» зростимо в точках $x = -\sigma_1$ і $x = \sigma_2$, вимагаючи в них неперервність y і y'.

3. ПОБУДОВА ВНУТРІШНЬОЇ АСИМПТОТИКИ ЗА ДОПОМОГОЮ ГІБРИДНОГО ЗБУРЮВАНЬ-ГАЛЬОРКІН ПІДХОДУ

Уведемо в околі нуля розтягнуту змінну

$$\xi = x\varepsilon^{-\nu} \text{ або } x = \xi\varepsilon^{\nu}, \tag{18}$$

де величина ν вважається додатною і визначається в процесі подальшого аналізу. З урахуванням заміни (18) рівняння (4) набуває вигляду:

$$\varepsilon^{2-2\nu} \frac{d^2 y}{d\xi^2} - f(\xi\varepsilon^{\nu})\, y = 0. \tag{19}$$

Для того, щоб стало можливим побудувати наближений розв'язок рівняння (19) у вигляді розвинення по ступенях параметра ε, покладемо $\nu = 3/2$. У цьому випадку граничною формою рівняння (19) буде:

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} - \varepsilon f(\xi\varepsilon^{3/2})\, y = 0. \tag{20}$$

В передумові того, що $\varepsilon << 1$, на першому етапі наближений розв'язок рівняння (20) на інтервалі $[-\sigma_1, \sigma_2]$ зобразимо так:

$$y(\xi) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j y_j(\xi). \tag{21}$$

Помітимо, що розвинення (21) може бути використано як розв'язок рівняння (20) лише при малих ε. Але навіть і в цьому випадку для одержання хоч скільки-небудь прийнятної асимптотики необхідно залучати досить велику кількість членів розвинення. Відповідно до методики збурювань-Гальоркін підходу, ми будуємо (21) з метою відшукання $N+1$ координатних функцій $\{y_j\}$, необхідних для побудови на другому етапі нового розвинення – гібридного, яке буде позбавлене від головного недоліку (21) – «сильної» залежності від величини ε.

Підстановка (21) у (20) дасть рекурентну систему $N+1$ диференціальних рівнянь відносно $\{y_j\}$

для ε^0: $\qquad \frac{d^2 y_0}{d\xi^2} = 0,$ (22)

для ε^j: $$\frac{d^2 y_j}{d\xi^2} - f(\xi\varepsilon^{3/2}) y_{j-1} = 0 . \quad (23)$$

Розв'язавши її, одержимо:

$$y_0(\xi) = C_0\xi + C_1 , \quad (24)$$

$$y_j(\xi) = \int\left(\int f(\xi\,\varepsilon^{3/2}) y_{j-1}(\xi) d\xi + C_{j+1}\right) d\xi + C_{j+2} , \quad j = 1,2,...,N , \quad (25)$$

де $C_0,...,C_{j+2}$ – довільні постійні, що підлягають визначенню з граничних умов для рівняння (20). На цьому етапі ці постійні знайти не можна, оскільки для рівняння (20) граничні умови ще не сформульовані. Це буде зроблено нижче.

Відповідно до гібридного методу збурювань-Гальоркіна [5] новий «уточнений» розв'язок $\tilde{y}$ рівняння (20) в інтервалі $[-\sigma_1, \sigma_2]$ зобразимо так:

$$\tilde{y}(\xi,\varepsilon) = y_0(\xi) + \sum_{j=1}^{N} a_j y_j(\xi) , \quad (26)$$

де $\{a_j\}$ – невідомі «амплітуди» знайдених на першому кроці координатних функцій (25). Зробивши в (26) зворотний перехід до невідомого x (згідно з (18) маємо $\xi = x\varepsilon^{-3/2}$), одержимо шуканий внутрішній наближений збурювань-Гальоркін розв'язок $\tilde{y}^i$ рівняння (4), придатний в околі $x = 0$, а саме на інтервалі $[-\sigma_1, \sigma_2]$. Коефіцієнти $\{a_j\}$ внутрішнього розв'язку можуть бути знайдені з умови:

$$\int_{-\sigma_1}^{\sigma_2} \left\{\varepsilon^2 \tilde{y}^{i\,\prime\prime} - f(x)\tilde{y}^i\right\} y_k dx = 0 , \quad k = 1,2,...,N . \quad (27)$$

Варто помітити, що усі вони в підсумку будуть залежати від поки що невідомих параметрів $-\sigma_1, \sigma_2$ і довільних постійних $\{C_j\}$.

4. ЗРОЩЕННЯ ВНУТРІШНІХ ТА ЗОВНІШНІХ АСИМПТОТИК

Тепер, щоб зростити $\tilde{y}^i$ з y_H^- та y_H^+ у точках $x = -\sigma_1$ і $x = \sigma_2$, що з математичної точки зору припускає відшукання співвідношень між довільними постійними цих розв'язків, будемо вимагати виконання умов неперервності розв'язків

$$y_H^-(-\sigma_1,\varepsilon) = \tilde{y}^i(-\sigma_1,\varepsilon) , \quad y_H^+(\sigma_2,\varepsilon) = \tilde{y}^i(\sigma_2,\varepsilon) , \quad (28)$$

і неперервності їхніх перших похідних

$$\frac{dy_H^-}{dx}(-\sigma_1,\varepsilon) = \frac{d\tilde{y}^i}{dx}(-\sigma_1,\varepsilon) , \quad \frac{dy_H^+}{dx}(\sigma_2,\varepsilon) = \frac{d\tilde{y}^i}{dx}(\sigma_2,\varepsilon) . \quad (29)$$

На кінцях інтервалу $x \in [-a,b]$ для розв'язків y_H^- і y_H^+, нагадаємо, існують граничні умови (5):

$$y_H^-(-a,\varepsilon) = A \quad \text{та} \quad y_H^+(b,\varepsilon) = B . \quad (30)$$

Зазначимо, що розв'язок $\tilde{y}^i$ у N-му наближенні містить $2N+2$ довільних постійних $\{C_j\}$. Розв'язки y_H^- і y_H^+ у сумі мають 4 довільні постійні. Таким чином, загальне число невідомих довільних постійних, що підлягають визначенню, є $2N+6$. Після підстановки виразу (26) для $\tilde{y}^i$ в умови (28), останні перетворяться в систему $2N+2$ рівнянь вигляду:

$$y_0(-\sigma_1) = y_H^-(-\sigma_1), \qquad y_1(-\sigma_1) = y_2(-\sigma_1) = ... = y_N(-\sigma_1) = 0 , \quad (31)$$

$$y_0(\sigma_2) = y_H^+(\sigma_2), \qquad y_1(\sigma_2) = y_2(\sigma_2) = ... = y_N(\sigma_2) = 0 , \quad (32)$$

яка в сукупності із чотирма рівняннями (29), (30) дає необхідну кількість рівнянь (а саме $2N+6$) для відшукання невідомих $\{C_j\}$ і $\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, \widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2$. Усі вони будуть у підсумку виражені через невідомі параметри $-\sigma_1$ і σ_2, критерій вибору яких запропоновано нижче.

Запишемо остаточний складений розв'язок вихідного рівняння (4) у вигляді:

$$Y(x,\varepsilon,\sigma_1,\sigma_2) = y_H^-(x,\varepsilon)H(-x-\sigma_1) + \widetilde{y}^i(x,\varepsilon)H(x+\sigma_1)H(-x+\sigma_2) +$$
$$+ y_H^+(x,\varepsilon)H(x-\sigma_2), \qquad (33)$$

де H – одинична функція Хевісайду.

Підставимо розв'язок (33) у функціонал, дослідження якого на екстремум реалізує рівняння (4). Неважко перевірити, що цей функціонал має вигляд:

$$V[y] = -\int_{-a}^{b}\left[\varepsilon^2 (y')^2 + f(x)y^2\right]dx. \qquad (34)$$

Таким чином, значення $-\sigma_1, \sigma_2$ повинні бути такими, щоб функція Y (33), будучи припустимою кривою і розв'язком рівняння Ейлера (4), доставляла екстремум функціоналові V (34). Дослідження функціонала V на екстремум у цьому випадку еквівалентно дослідженню на екстремум функції $\varphi(-\sigma_1,\sigma_2) = V\left[Y(x,\varepsilon,-\sigma_1,\sigma_2)\right]$. Іншими словами умова $\delta V[y]=0$ перетворюється на систему рівнянь щодо невідомих $-\sigma_1, \sigma_2$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial\sigma_1} = 0, & \dfrac{\partial\varphi}{\partial\sigma_2} = 0. \end{cases} \qquad (35)$$

В аналітичному вигляді система (35) не може бути розв'язана і тому розв'язується чисельно.

На рисунках 1–3 і 4–6 побудовані графіки гібридних розв'язків Y (33) при граничних умовах задачі $y(-1)=-1,\ y(1)=3$ і $y(-1)=2,\ y(1)=-1$ відповідно для значень $\varepsilon = 0.05, 0.1, 0.5$ і знайдених у кожному випадку пар $(-\sigma_1,\sigma_2)$. Внутрішнє розвинення $\widetilde{y}^i$ має перший порядок ($N=1$), тобто два члена. Як функцію f оберемо $f(x)=x$. У цьому випадку вихідне рівняння (4) є рівнянням Ері та має точний аналітичний розв'язок. Для порівняння на рисунках наведені точний розв'язок (кола) і ВКБ-Гальоркін розв'язок (пунктир).

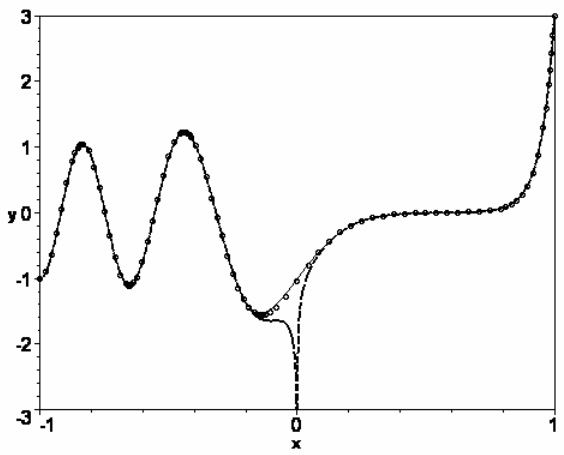


Рис. 1 Порівняльний аналіз розв'язків рівняння (4) при $f(x)=x$: точного (кола), ВКБ-Гальоркін (пунктир) і гібридного Y (неперервна лінія) для $\varepsilon = 0.05$, $y(-1)=-1,\ y(1)=3$ і $(-\sigma_1,\sigma_2) = (-0.21526, 0.16712)$

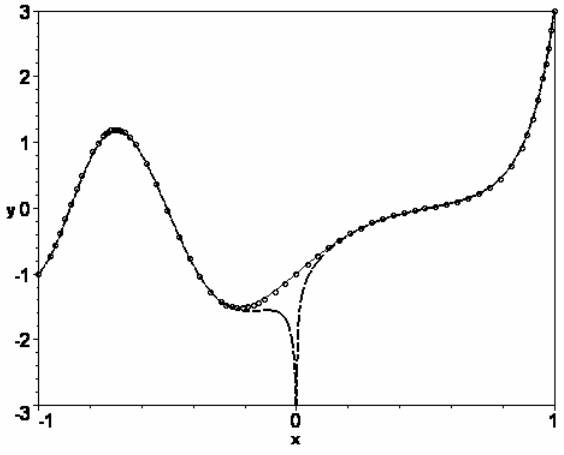


Рис. 2 Порівняльний аналіз розв'язків рівняння (4) при $f(x)=x$: точного (кола), ВКБ-Гальоркін (пунктир) і гібридного Y (неперервна лінія) для $\varepsilon = 0.1$, $y(-1)=-1,\ y(1)=3$ і $(-\sigma_1,\sigma_2) = (-0.34972, 0.25822)$

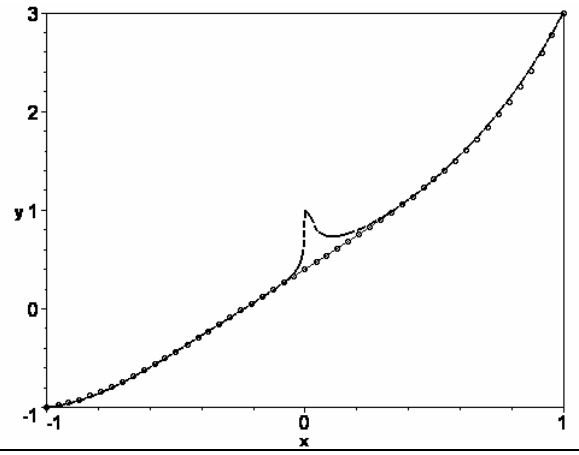


Рис. 3 Порівняльний аналіз розв'язків рівняння (4) при $f(x) = x$: точного (кола), ВКБ-Гальоркін (пунктир) і гібридного Y (неперервна лінія) для $\varepsilon = 0.5$, $y(-1) = -1,\ y(1) = 3$ і $(-\sigma_1, \sigma_2) = (-0.52317, 0.46309)$

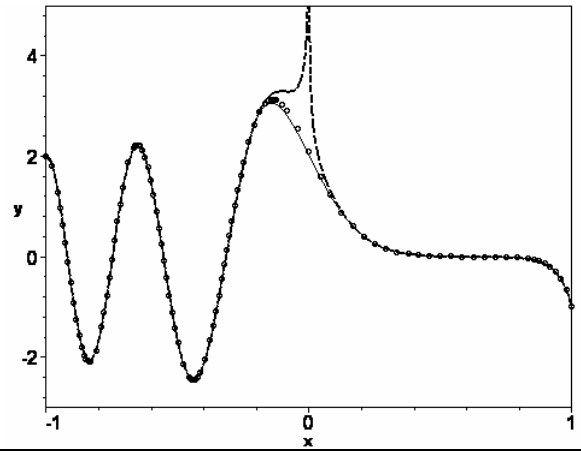


Рис. 4 Порівняльний аналіз розв'язків рівняння (4) при $f(x) = x$: точного (кола), ВКБ-Гальоркін (пунктир) і гібридного Y (неперервна лінія) для $\varepsilon = 0.05$, $y(-1) = 2,\ y(1) = -1$ і $(-\sigma_1, \sigma_2) = (-0.21447, 0.16738)$

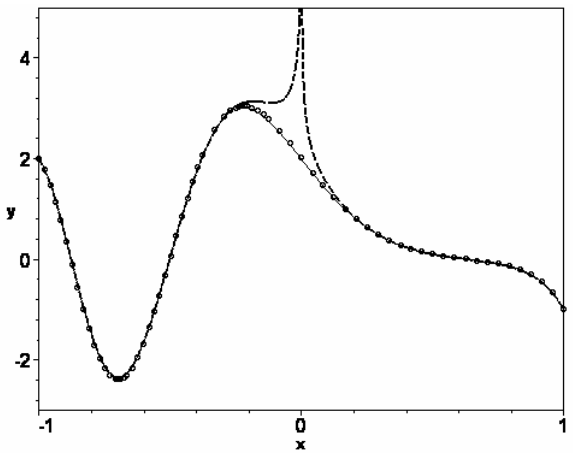


Рис. 5 Порівняльний аналіз розв'язків рівняння (4) при $f(x) = x$: точного (кола), ВКБ-Гальоркін (пунктир) і гібридного Y (неперервна лінія) для $\varepsilon = 0.1$, $y(-1) = 2,\ y(1) = -1$ і $(-\sigma_1, \sigma_2) = (-0.31855, 0.25112)$

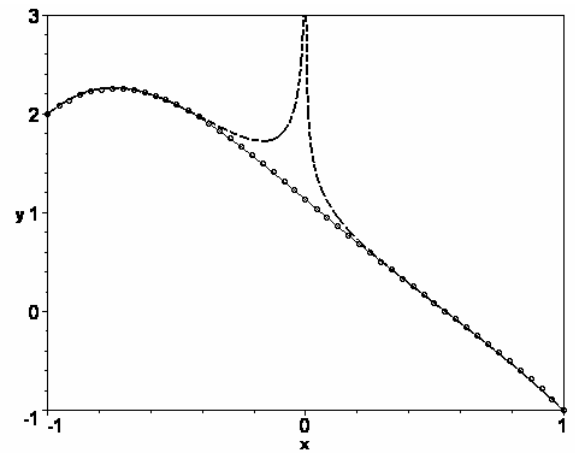


Рис. 6 Порівняльний аналіз розв'язків рівняння (4) при $f(x) = x$: точного (кола), ВКБ-Гальоркін (пунктир) і гібридного Y (неперервна лінія) для $\varepsilon = 0.5$, $y(-1) = 2,\ y(1) = -1$ і $(-\sigma_1, \sigma_2) = (-0.62614, 0.40591)$

Як бачимо, побудований нами складений гібридний розв'язок Y (33) при оптимальному виборі $-\sigma_1$ і σ_2 добре збігається з точним розв'язком задачі на широкому інтервалі зміни головного параметра збурювань задачі ε.

5. ВИСНОВКИ

У цій роботі, яка є частиною досліджень авторів у цьому напрямку, запропоновано новий підхід до побудови наближеного аналітичного розв'язку високого ступеня точності рівняння другого порядку із параметром і точкою повороту. Підхід засновано на використанні гібридних методів ВКБ-Гальоркіна, збурювань-Гальоркіна, а також прийомів варіаційного обчислення. Як було з'ясовано, застосування підходу при розв'язанні подібного класу задач дозволяє уникнути обчислювально-аналітичних труднощів, громіздких рутинних перетворень, які закономірно виникають при використанні класичних методів збурювань (багатьох масштабів, зрощених розвинень, ВКБ-наближень). Отриманий за допомогою наведеного підходу розв'язок природним способом урятовано від недоліків відомих асимптотичних розвинень (перш за все локальності області застосування) – він є рівномірно придатним у

всій області зміни аргументу, включаючи окіл точки повороту, а також є дійсним на широкому інтервалі зміни параметра збурювання задачі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов. – М.: Мир, 1965. – 238 с.
2. Найфэ А. Введение в методы возмущений. – М.: Мир, 1984. – 536 с.
3. Langer R. The asymptotic solution of ordinary linear differential equations of the second order with special reference to turning point // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – № 67. – P. 45–62.
4. Gristchak V.Z., Dmitrijeva Ye.M. A Hybrid WKB–Galerkin Method and its Application // Technishe Mechanik. – 1995. – 15, № 3. – P. 281–294.
5. Geer J.F. and Andersen C.M. A hybrid perturbation Galerkin technique for differential equations containing a parameter // Appl Math Rev. – 1989. – №42 (11), P. 69–77.
6. Грищак В.З., Дмитриева Е.М. Решение некоторых линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами с использованием гибридного ВКБ-Галеркин метода // Придніпровський науковий вісник. Машинобудування, природничі та технічні науки. – 1997. – № 43 (54).– С.1–3.
7. Герасімов Т.С., Грищак В.З. Застосування гібридного ВКБ-Гальоркін підходу до розрахунку розподілу температурного поля у диску змінної товщини // Вісник Запорізького державного університету (Серія: фізико-математичні науки). – 2001. – №2.– С.34–42.