УДК 517.956.225:531.01

ФОРМАЛЬНЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ N-МЕРНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Галан Е.Е., аспирант, Толок В.А., д.т.н., профессор

Запорожский государственный университет

В статье представлен алгоритм построения полной системы общих решений дифференциальных уравнений Лапласа. В работе приведены примеры построения решений для двухмерного, трехмерного, четырехмерного и N-мерного случаев. Полученные решения в декартовой системе координат могут быть использованы при решении различных задач математической физики.

Ключевые слова: уравнение Лапласа, двойной ряд Фурье, бином Ньютона, ряд Тейлора, операционный ряд, декартова система координат, частная производная, гармоническая функция.

Галан О.Є., Толок В.О. ФОРМАЛЬНИЙ МЕТОД ПОБУДОВИ N-ВИМІРНИХ ГАРМОНІЧНИХ ФУНКЦІЙ / Запорізький державний університет, Україна

У статті пропонується алгоритм побудови повної системи загальних розв'язань диференційних рівнянь Лапласа. У роботі наведені приклади побудови розв'язань для двовимірного, тривимірного, чотиривимірного та N-вимірного випадків. Отримані розв'язання в декартовій системі координат можуть використовуватися при розв'язанні будь-яких задач математичної фізики.

Ключові слова: рівняння Лапласа, подвійний ряд Фур'є, біном Ньютона, ряд Тейлора, операційний ряд, декартова система координат, часткова похідна, гармонічна функція.

Galan H., Tolok V. FORMAL METHOD OF CONSTRUCTION OF HARMONIOUS FUNCTIONS / Zaporizhzhya State University, Ukraine

In the article there is the algorithm of construction of full system of Laplas differential equation general solutions. In the work there is construction of solutions for two-measured, three-measured, four- measured and n- measured cases. Received solutions in the deckart co-ordinates system may be used at solution of different tasks of mathematical physics.

Key words: Laplace equation, Fourier binary row, binomial theorem, Taylor row, operating row, Descartes coordinates system, local derivative, harmonious function.

В алгоритмизации аналитических вычислений и приближенных методов краевых задач необходимо бывает построить полную систему общих решений заданных дифференциальных уравнений в частных производных. Изложим один из возможных алгоритмов такого построения для уравнений Лапласа [1].

Пусть $U = U(x, y)$ есть решение уравнения (1).

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0\,. \qquad (1)$$

Это решение может быть представлено в виде разложения в ряд Тейлора по одной из переменных:

$$U(x,y) = U(0,y) + U_x'(0,y)x + \frac{U''_x(0,y)x^2}{2!} + \ldots,$$

или

$$U(x,y) = U(0,y) + U_x'(0,y)x + \sum_{k=1}^{\infty}\left(U_x^{(2k)}(0,y)\frac{x^{2k}}{(2k)!} + U_x^{(2k+1)}(0,y)\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right). \qquad (2)$$

Для того, чтобы уравнение (2) удовлетворяло уравнению (1), требуется выполнение следующих равенств:

$$U_x^2(0,y) = -U_y^2(0,y),$$

$$U_x^{2+1}(0,y) = -\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(U_x^{'}\right)(0,y)$$

,

$$U_x^{2+2}(0,y) = U_y^4(0,y)$$

…

Используя эти соотношения, получим:

$$U(x,y) = U_x^0(0,y) + U_x^{'}(0,y)x +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(U_y^{(2k)}(0,y)\frac{x^{(2k)}}{(2k)!}(-1)^k + (-1)^k\frac{\partial^{2k}}{\partial y^{2k}}\left(U_x^{'}\right)(0,y)\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right). \quad (3)$$

Представим $U(x,y)$ в виде двойного ряда Фурье:

$$U(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left(A_{ij}\cos ix\cos jy + B_{ij}\cos ix\sin jy + C_{ij}\sin ix\cos jy + D_{ij}\sin ix\sin jy\right).$$

И, подставляя ряд Фурье в уравнение (3), суммируя операционные ряды, воспользовавшись разложениями тригонометрических функций по степеням их аргументов, получаем формулу:

$$U(x,y) = U(0,y) + U_x^{'}(0,y)x + A_0 + C_0 + \sum_{j=1}^{\infty}\left(A_j chjx\cos jy + B_j chjx\sin jy\right) +$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{shjx\cos jy}{j}C_j + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{shjx\sin jy}{j}D_j\ . \quad (4)$$

Полученная формула (4) является общим решением уравнения Лапласа.

Далее рассмотрим построение полной системы общих решений в трехмерном случае.

Рассмотрим представление функции в виде:

$$U(x,y,z) = U(x,y,0) + U_z^{'}(x,y,0)z + \sum_{k=1}^{\infty}\left(U_z^{(2k)}(x,y,0)\frac{z^{2k}}{(2k)!} + U_z^{(2k+1)}(x,y,0)\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\right). \quad (5)$$

Применим к нему оператор Лапласа:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right),$$

$$\frac{\partial^{2k} U}{\partial z^{2k}} = (-1)^k\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)^{2k-2}.$$

Введем обозначения:

$$D_x = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

(6)

$$D_y = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}.$$

Воспользуемся формулой бинома Ньютона [2] для записи частной производной 2k-ого порядка:

$$\frac{\partial^{2k}U}{\partial z^{2k}} = (-1)^k \sum_{i=0}^{2k-2} C_{2k-2}^i D_x^{2k-2-i} D_y^i. \qquad (7)$$

Подставив уравнение (7) в уравнение (5), получим формулу:

$$U(x,y,z) = U(x,y,0) + U_z'(x,y,0)z +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{2k-2} C_{2k-2}^i D_x^{2k-2-i} D_y^i \frac{z^{2k}}{(2k)!}(-1)^k + \sum_{i=0}^{2k-2} C_{2k-2}^i D_x^{2k-2-i} D_y^i U_z'(x,y,0) \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)^k \right).$$

Для построения решения воспользуемся рядом Фурье:

$$U(x,y,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} (A_{nlm}\cos nx\cos ly\cos mz + B_{nlm}\cos nx\cos ly\sin mz +$$

$$+ C_{nlm}\cos nx\sin ly\cos mz + D_{nlm}\cos nx\sin ly\sin mz + E_{nlm}\sin nx\cos ly\cos mz +$$

$$+ F_{nlm}\sin nx\cos ly\sin mz + G_{nlm}\sin nx\sin ly\cos mz + H_{nlm}\sin nx\sin ly\sin mz).$$

Аналогично суммируя операционные ряды, воспользовавшись разложениями тригонометрических функций по степеням их аргумента, получаем конечную формулу:

$$U(x,y,z) = U(x,y,0) + U_z'(x,y,0)z + \sum_{\substack{n=0 \\ n\neq l\neq 0}}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(n^2+l^2)^2}(A_{nl}\cos nx\cos ly + C_{nl}\cos nx\sin ly +$$

$$+ E_{nl}\sin nx\cos ly + G_{nl}\sin nx\sin ly)ch(n^2+l^2)z +$$

$$+ \sum_{\substack{n=0 \\ n\neq l\neq 0}}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{\left(n^2+l^2\right)^3}(B_{nl}\cos nx\cos ly + D_{nl}\cos nx\sin ly +$$

$$+ F_{nl}\sin nx\cos ly + H_{nl}\sin nx\sin ly)sh\left(n^2+l^2\right)z.$$

Проведем аналогичные рассуждения для случая n=4.

Рассмотрим представление функции в виде:

$$U(x_1,x_2,x_3,x_4) = U(0,x_2,x_3,x_4) + U_{x_1}'(0,x_2,x_3,x_4)x_1 + \frac{U_{x_1}''(0,x_2,x_3,x_4)x_1^2}{2!} + \ldots$$

$$U(x_1,x_2,x_3,x_4) = U(0,x_2,x_3,x_4) + U_{x_1}'(0,x_2,x_3,x_4)x_1 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left(U_{x_1}^{(2k)}(0,x_2,x_3,x_4)\frac{x_1^{2k}}{2k!} + U_{x_1}^{(2k+1)}(0,x_2,x_3,x_4)\frac{x_1^{2k+1}}{(2k+1)!} \right). \qquad (8)$$

Оператор Лапласа имеет вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_4^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = -\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_4^2} \right),$$

$$\frac{\partial^{2k}U}{\partial x_1^{2k}} = (-1)^k \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_4^2} \right)^{2k-2},$$

$$D_{x_2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2},$$

$$D_{x_3} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2},$$

$$D_{x_4} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_4^2}.$$

После введения обозначений, аналогичных (6), выражаем 2k-ую производную через бином Ньютона [2]:

$$\frac{\partial^{2k}U}{\partial x_1^{2k}} = (-1)^k \sum_{i=0}^{2k-2} \sum_{j=0}^{2k-2-i} \frac{(2k-2)!}{i!\,j!(2k-2-i-j)!} D_{x_2}^{2k-2-i-j} D_{x_3}^{i} D_{x_4}^{j}.$$

Решение строим, пользуясь рядом Фурье:

$$U(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{l=1}^{4} \sum_{m_l=0}^{\infty} \left(A_{m_l} \prod_{l=1}^{4} \cos m_l x_l + A_{m_l} B_{m_{4-l+1}} \prod_{l} \cos m_l x_l \prod_{4-l} \sin m_{4-l+1} x_{4-l+1} + B_{m_l} \prod_{l=1}^{4} \sin m_l x_l \right).$$

Подставляя ряд Фурье в формулу (8), получаем конечную формулу:

$$U(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{l=2}^{4} \sum_{\substack{m_l=0 \\ m_2 \neq \ldots m_4 \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{\left(\sum_{l=2}^{4} m_l^2 \right)^2} \left(A_{m_l} \prod_{l=2}^{4} \cos m_l x_l + A_{m_l} B_{m_{4-l+1}} \prod_{l=2}^{4} \cos m_l x_l \prod_{4-l,2} \sin m_{4-l+1} x_{4-l+1} \right) ch\left(\sum_{l=2}^{4} m_l^2 \right) x_1 +$$

$$+ \sum_{l=2}^{4} \sum_{\substack{m_l=0 \\ m_2 \neq \ldots m_4 \neq 0}}^{\infty} \left(A_{m_l} B_{m_{4-l}} \prod_{l=2}^{4} \cos m_l x_l \prod_{4-l+1,2} \sin m_{4-l+1} x_{4-l+1} + B_{m_l} \prod_{l=2}^{4} \sin m_l x_l \right) \frac{1}{\left(\sum_{l=2}^{4} m_l^2 \right)^3} sh\left(\sum_{l=2}^{4} m_l^2 \right) x_1 +$$

$$+ U(0, x_2, x_3, x_4) + U'_{x_1}(0, x_2, x_3, x_4) x_1.$$

Обобщая все приведенные выше рассуждения, рассмотрим построение полной системы общих решений для n-мерного случая.

Рассмотрим представление функции в виде:

$$U(x_1, \ldots, x_n) = U(0, x_2, \ldots, x_n) + U'_{x_1}(0, x_2, \ldots, x_n) x_1 + \frac{U''_{x_1}(0, x_2, \ldots, x_n) x_1^2}{2!} + \ldots$$

$$U(x_1, \ldots, x_n) = U(0, x_2, \ldots, x_n) + U'_{x_1}(0, x_2, \ldots, x_n) x_1 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(U_{x_1}^{(2k)}(0, x_2, \ldots, x_n) \frac{x_1^{2k}}{(2k)!} + U_{x_1}^{(2k+1)}(0, x_2, \ldots, x_n) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right).$$

Оператор Лапласа имеет вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = -\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2} \right),$$

$$\frac{\partial^{2k}U}{\partial x_1^{2k}} = (-1)^k \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2} \right)^{2k-2} .$$

После введения обозначений, аналогичных (6), выражаем 2k-ую производную через бином Ньютона [2]:

$$\frac{\partial^{2k}U}{\partial x_1^{2k}} = (-1)^k \prod_{p=1}^{m-1} \sum_{l_p=0}^{2k-2-\sum l_{p-1}} \prod_{p=2}^{m} D_{x_p}^{2k-2-\sum l_{p-1}} .$$

Решение строим, пользуясь рядом Фурье:

$$U(x_1,...,x_n) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{m_l=0}^{\infty} \left(A_{m_l} \prod_{l=1}^{n} \cos m_l x_l + A_{m_l} B_{m_{n-l+1}} \prod_{l} \cos m_l x_l \prod_{n-l} \sin m_{n-l+1} x_{n-l+1} + B_{m_l} \prod_{l=1}^{n} \sin m_l x_l \right).$$

Конечная формула имеет вид:

$$U(x_1,...,x_n) = \sum_{l=2}^{n} \sum_{\substack{m_l=0 \\ m_2 \neq ... \neq m_n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{\left(\sum_{l=2}^{n} m_l^2 \right)^2} \left(A_{m_l} \prod_{l=2}^{n} \cos m_l x_l + A_{m_l} B_{m_{n-l+1}} \prod_{l=2}^{n} \cos m_l x_l \prod_{n-l,2} \sin m_{n-l+1} x_{n-l+1} \right) ch\left(\sum_{l=2}^{n} m_l^2 \right) x_1 +$$

$$+ \sum_{l=2}^{n} \sum_{\substack{m_l=0 \\ m_2 \neq ... m_n \neq 0}}^{\infty} \left(A_{m_l} B_{m_{n-l+1}} \prod_{l=2}^{n} \cos m_l x_l \prod_{n-l+1,2} \sin m_{n-l+1} x_{n-l+1} + B_{m_l} \prod_{l=2}^{n} \sin m_l x_l \right) \frac{1}{\left(\sum_{l=2}^{n} m_l^2 \right)^3} sh\left(\sum_{l=2}^{n} m_l^2 \right) x_1 +$$

$$U(0, x_2,..., x_n) + U'_{x_1}(0, x_2,..., x_n) x_1 .$$

Построенные решения в декартовой системе координат могут быть использованы при решении различных задач математической физики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996.-368 с.
2. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики: Пер. с англ. – М.: Мир, 1998.-703 с.