УДК 531.32: 514.752.432

НОВАЯ ФОРМА ЗАПИСИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПО ПОВЕРХНОСТИ С УЧЕТОМ СИЛЫ ТРЕНИЯ

Величко И.Г., к.ф-м.н., доцент, Стеганцева П.Г., к.ф-м.н., доцент

Запорожский государственный университет

В данной статье построены скалярные уравнения, описывающие движение материальной точки по регулярной поверхности с учетом силы трения. Используется подвижная система координат, связанная с поверхностью (базис Гаусса). Это позволяет найти выражение для нормальной реакции поверхности и, таким образом, для исследования движения точки поверхности вместо системы трех уравнений решать лишь систему двух дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: материальная точка, поверхность, базис Гаусса, символы Кристоффеля второго рода.

Величко І.Г., Стєганцева П.Г. НОВА ФОРМА ЗАПИСУ РІВНЯНЬ РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ З УРАХУВАННЯМ СИЛ ТЕРТЯ / Запорізький державний університет, Україна

У даній статті побудовані скалярі рівняння, що описують рух матеріальної точки по регулярній поверхні з урахуванням сили тертя. Використовується рухлива система координат, зв'язана з поверхнею (базис Гаусса). Це дозволяє знайти вираз для нормальної реакції поверхні і, таким чином, для дослідження руху точки поверхні замість системи трьох рівнянь досить розв'язати лише систему двох диференціальних рівнянь.

Ключові слова: матеріальна точка, поверхня, базис Гаусса, символи Крістоффеля другого роду.

Velichko I.G., Steganceva P.G. THE NEW FORM OF RECORD OF THE EQUATIONS OF MOVEMENT OF A MATERIAL POINT ON A SURFACE IN VIEW OF FORCE OF FRICTION / Zaporizhzhya State University, Ukraine

In given clause the scalar equations describing movement of a material point on a regular surface in view of force of friction are constructed. The mobile system of coordinates connected to a surface (Gauss basis) is used. It allows to find expression for normal reaction of a surface and, thus, for research of movement of a point of a surface instead of system of three equations to solve only system of two differential equations

Key words: material point, surface, Gauss basis, Christoffel's symbols of the second sort.

Для исследования движения материальной точки нужно векторное уравнение второго закона Ньютона записать в проекциях на оси какого-нибудь базиса. В отличие от работы [1], где для этого использовались неподвижная декартова система координат и подвижный базис Френе траектории движения материальной точки, здесь используется базис Гаусса поверхности.

Зададимся прямоугольной декартовой системой координат OXYZ. Уравнение поверхности (которую мы считаем регулярной) зададим в виде $\bar{r} = \bar{r}(u,v) = \bar{r}\left(u^1, u^2\right)$, а уравнение траектории движущейся точки – в виде $\bar{r} = \bar{r}\left(u^1(t), u^2(t)\right)$, где t – время. Тогда векторное дифференциальное уравнение, описывающее движение точки, согласно второму закону Ньютона, запишется в виде:

$$m\bar{r}'' = N\bar{n} - fN\bar{\tau} + \bar{P}\,, \tag{1}$$

где m – масса точки, штрих (или точка) обозначает дифференцирование по t, $\bar{\tau}$ и $\bar{n}$ – единичные векторы касательной к траектории и нормали к поверхности соответственно, N - величина силы нормальной реакции поверхности, $\bar{P}$ - известная сила, f - коэффициент трения. Для сведения этого уравнения к системе скалярных уравнений обе его части разложим по базису Гаусса $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{n}$, где $\bar{r}_i = \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial u^i}$, $i = 1,2$. Для этого вычислим

$$\bar{r}' = \frac{d\bar{r}}{dt} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^i}\frac{du^i}{dt} = \bar{r}_i \dot{u}^i \tag{2}$$

(здесь и далее подразумевается суммирование по повторяющимся индексам),

$$\bar{\tau} = \frac{\bar{r}'}{|\bar{r}'|} = \frac{\bar{r}_i \dot{u}^i}{\sqrt{\bar{r}_j \bar{r}_k \dot{u}^j \dot{u}^k}} = \frac{\bar{r}_i \dot{u}^i}{\sqrt{g_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k}}, \tag{3}$$

где g_{jk} - коэффициенты первой квадратичной формы поверхности (метрического тензора).

Вычислим вторую производную

$$\bar{r}'' = \frac{d}{dt}\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\bar{r}_i \dot{u}^i\right) = \frac{d\bar{r}_i}{dt}\dot{u}^i + \bar{r}_i \ddot{u}^i = \bar{r}_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j + \bar{r}_i \ddot{u}^i .$$

Здесь $\bar{r}_{ij} = \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial u^i \partial u^j}$, $\dot{u}^i = \dfrac{du^i}{dt}$, $\ddot{u}^i = \dfrac{d^2 u^i}{dt^2}$.

Далее воспользуемся деривационными формулами [2] $\bar{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \bar{r}_k + h_{ij}\bar{n}$, где Γ_{ij}^k - символы Кристоффеля второго рода, h_{ij} - коэффициенты второй квадратичной формы поверхности. С учетом их получим

$$\bar{r}'' = \bar{r}_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j + \bar{r}_i\ddot{u}^i = \left(\Gamma_{ij}^k \bar{r}_k + h_{ij}\bar{n}\right)\dot{u}^i\dot{u}^j + \bar{r}_i\ddot{u}^i = \left(\Gamma_{kj}^i \bar{r}_i + h_{kj}\bar{n}\right)\dot{u}^k\dot{u}^j + \bar{r}_i\ddot{u}^i = \left(\Gamma_{kj}^i \dot{u}^k\dot{u}^j + \ddot{u}^i\right)\bar{r}_i + h_{kj}\dot{u}^k\dot{u}^j\bar{n} . \tag{4}$$

Теперь разложим вектор $\bar{P}$ по базису $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{n}$:

$$\bar{P} = \alpha^1 \bar{r}_1 + \alpha^2 \bar{r}_2 + \beta\bar{n} = \alpha^i \bar{r}_i + \beta\bar{n} . \tag{5}$$

Умножив это равенство скалярно на вектор $\bar{n}$, и учитывая, что вектор $\bar{n}$ ортогонален векторам $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$, получим $\beta = \left(\bar{P}, \bar{n}\right)$.

В касательной плоскости наряду с базисом $\bar{r}_1, \bar{r}_2$ рассмотрим взаимный базис $\bar{r}^1, \bar{r}^2$, обладающий тем свойством, что $\left(\bar{r}_i, \bar{r}^j\right) = \delta_i^j$, где $\delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ - символ Кронекера. Отметим тот очевидный факт, что векторы $\bar{r}^1$ и $\bar{r}^2$ ортогональны вектору $\bar{n}$.

Умножив равенство (5) на $\bar{r}^j$, получим

$$\left(\bar{P}, \bar{r}^j\right) = \alpha^i \left(\bar{r}_i, \bar{r}^j\right) + \beta\left(\bar{n}, \bar{r}^j\right) = \alpha^i \delta_i^j = \alpha^j .$$

Используя формулы Гиббса [2] $\bar{r}^j = g^{ij}\bar{r}_i$, где g^{ij} - элементы матрицы, обратной к матрице первой квадратичной формы поверхности, последнее равенство перепишем в виде

$$\alpha^i = \left(\bar{P}, \bar{r}^i\right) = \left(\bar{P}, g^{ij}\bar{r}_j\right) = g^{ij}\left(\bar{P}, \bar{r}_j\right).$$

Таким образом, получаем разложение

$$\bar{P} = g^{ij}\left(\bar{P}, \bar{r}_j\right)\bar{r}_i + \left(\bar{P}, \bar{n}\right)\bar{n} . \tag{6}$$

Подставляя (3), (4) и (6) в (1), получим следующее векторное равенство

$$m\left(\Gamma_{kj}^i \dot{u}^k\dot{u}^j + \ddot{u}^i\right)\bar{r}_i + mh_{kj}\,\dot{u}^k\dot{u}^j\bar{n} = N\,\bar{n} - f\,N\frac{\dot{u}^i}{\sqrt{g_{jk}\dot{u}^j\dot{u}^k}}\bar{r}_i + g^{ij}\left(\bar{P}, \bar{r}_j\right)\bar{r}_i + \left(\bar{P}, \bar{n}\right)\bar{n} . \tag{7}$$

Отсюда следуют три скалярных равенства:

$$mh_{kj}\,\dot{u}^k\dot{u}^j = N + \left(\bar{P}, \bar{n}\right), \tag{8}$$

$$m\left(\Gamma_{kj}^i \dot{u}^k\dot{u}^j + \ddot{u}^i\right) = -fN\frac{\dot{u}^i}{\sqrt{g_{jk}\dot{u}^j\dot{u}^k}} + g^{ij}\left(\bar{P}, \bar{r}_j\right),\ i = 1,2 . \tag{9}$$

Из равенства (8) можно определить силу реакции поверхности:

$$N = mh_{kj}\,\dot{u}^k\dot{u}^j - \left(\bar{P}, \bar{n}\right). \tag{10}$$

Точка оторвется от поверхности тогда, когда величина реакции поверхности станет отрицательной. С учетом вышеизложенного получим следующее выражение для определения времени отрыва:

$$t_{отр} = \min_{t>0}\left\{mh_{kj}\,\dot{u}^k\dot{u}^j < \left(\bar{P},\bar{n}\right)\right\}. \qquad (11)$$

Подставив найденную силу реакции в формулу (9), получим искомые дифференциальные уравнения, описывающие движение материальной точки по поверхности:

$$\ddot{u}^i + \Gamma^i_{kj}\dot{u}^k\dot{u}^j + f\left(h_{kj}\dot{u}^k\dot{u}^j - \frac{1}{m}\left(\bar{P},\bar{n}\right)\right)\frac{\dot{u}^i}{\sqrt{g_{jk}\dot{u}^j\dot{u}^k}} = \frac{1}{m}g^{ij}\left(\bar{P},\bar{r}_j\right),\ i=1,2\,. \qquad (12)$$

Если сила $\bar{P}$ зависит от времени, положения и скорости точки, то есть $\bar{P} = \bar{P}\left(t,u^1,u^2,\dot{u}^1,\dot{u}^2\right)$, то задавшись значениями $u^1(t_0),u^2(t_0),\dot{u}^1(t_0),\dot{u}^2(t_0)$, полученную систему (12) можно решить любым численным методом.

Отметим, что если у нас сила трения равна нулю и на точку не действует внешняя сила $\bar{P}$, то из системы (12) мы получим уравнения движения точки в виде

$$\ddot{u}^i + \Gamma^i_{kj}\dot{u}^k\dot{u}^j = 0\,,\ i=1,2\,.$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями геодезических линий на поверхности [3], то есть в этом случае точка будет двигаться по геодезической.

Для примера приведем дифференциальные уравнения движения точки по прямому геликоиду $\bar{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, hv)$ под действием постоянной силы $\bar{P}(0,0,-1)$:

$$u'' - u(v')^2 + \frac{f}{\sqrt{u^2+h^2}}\left(2hu'v' + \frac{u}{m}\right)\frac{u'}{\sqrt{(u')^2 + \left(u^2+h^2\right)(v')^2}} = 0\,,$$

$$v'' - \frac{2u}{u^2+h^2}u'v' + \frac{f}{\sqrt{u^2+h^2}}\left(2hu'v' + \frac{u}{m}\right)\frac{v'}{\sqrt{(u')^2 + \left(u^2+h^2\right)(v')^2}} = -\frac{h}{m\left(u^2+h^2\right)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Василенко П.М. Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин. – К.: Изд-во УАСХН, 1960.- 283 с.
2. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: Методы и приложения. - М.: Наука, 1986.- 760 с.
3. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ.– М.: Наука, 1967.- 664 с.