УДК 534.1:539.3

СТАЦІОНАРНІ ВИПАДКОВІ КОЛИВАННЯ ТРИШАРОВИХ ПЛАСТИН ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ

Тамуров Ю.М., д.т.н., професор, Тамурова Н.М., к.т.н., доцент

Запорізька державна інженерна академія

На основі відомих рівнянь, залучаючи принцип Даламбера, виписана система рівнянь руху тришарової пластини змінної товщини. Система зведена до рівняння відносно амплітуди поперечних коливань пластин з довільними умовами спирання. Одержано кореляційне рівняння амплітуд поперечних коливань і розглянуто нормальний центрований стаціонарний процес при дії дельта-корельованого зовнішнього навантаження.

1. Механіко-кінематичні гіпотези і модель тришарової пластини. Тришарова пластина змінної товщини являє собою з'єднання товстого маломіцного ортотропного шару заповнювача з двома тонкими зовнішніми високоміцними ізотропними шарами, симетрично розташованими відносно серединної площини заповнювача.

Диференціальні рівняння згину таких пластин одержані в [1]. Їх виведення базувалося на припущеннях:

для заповнювача при $-h \le z \le h$, де $h = h(x, y)$, були прийняті розподіл поздовжніх переміщень по товщині за лінійним законом і нестисливість у поперечному напрямку $(E_z = \infty)$;

для несучих зовнішніх шарів кривизною шарів нехтувалося і вважалася прийнятною гіпотеза Кірхгофа, тобто для верхнього шару товщиною $\delta = \delta(x, y)$ при $h \le z \le h + \delta$:

$$u = u_1 + \left(h + \frac{\delta}{2} - z\right)\frac{\partial w}{\partial x},\ v = v_1 + \left(h + \frac{\delta}{2} - z\right)\frac{\partial w}{\partial y},$$

де $u_1 = u_1(x, y)$, $v_1 = v_1(x, y)$ - переміщення точок серединної поверхні верхнього шару;

для нижнього шару при $-\delta - h \le z \le -h$ переміщення можна записати аналогічно.

2. Система рівнянь руху пластини. Долучаючи до диференціальних рівнянь [1] доданки, які враховують поперечні інерцію та дисипацію, їм надається вигляду

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{G_{xz}}{h}u_\varphi = 0,\ \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{G_{yz}}{h}v_\psi = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \left(h + \frac{\delta}{2}\right)F_1\right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \left(h + \frac{\delta}{2}\right)F_2\right] +$$

$$+ (1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[2D\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \left(h + \frac{\delta}{2}\right)\Phi\right] + D_m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D_c\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{2}q(x, y, t), \quad (1)$$

де

$$F_1 = B\left(h + \frac{\delta}{2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - B\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial x} + \nu\frac{\partial v_\psi}{\partial y}\right),$$

$$F_2 = B\left(h + \frac{\delta}{2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - B\left(\frac{\partial v_\psi}{\partial y} + \nu\frac{\partial u_\varphi}{\partial x}\right),$$

$$\Phi = 2B\left(h+\frac{\delta}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - B\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial y}+\frac{\partial v_\psi}{\partial x}\right),$$

$$u_\varphi = u_1 + \left(h+\frac{\delta}{2}\right)\frac{\partial w}{\partial x},\ v_\psi = v_1 + \left(h+\frac{\delta}{2}\right)\frac{\partial w}{\partial y},$$

$B = B(x,y)$ - жорсткість несучого шару на розтяг, $D = D(x,y)$ - жорсткість несучого шару на згин (циліндрична жорсткість)

$$B = \frac{E\delta}{1-\nu^2},\ D = \frac{E\delta^3}{12\left(1-\nu^2\right)},$$

ν, E - коефіцієнт Пуассона і модуль Юнга;

$q(x,y,t)$ - випадкове в часі навантаження на поверхню пластини.

3. Зведення системи до рівняння поперечних коливань. Розглядається закріплення кромок пластини в загальному вигляді, коли для переміщень і навантаження можна записати

$$u_1(x,y,t) = f_1(t)u(x,y),\ v_1(x,y,t) = f_1^*(t)v(x,y), \qquad (2)$$
$$w(x,y,t) = \xi(t)w(x,y),\ q(x,y,t) = q(t)q(x,y).$$

З урахуванням (2) система диференціальних рівнянь (1) набуває такого вигляду:

$$\Phi_{11}\xi(t) + \Phi_{12}f_1(t) + \Phi_{13}f_1^*(t) = 0,$$

$$\Phi_{21}\xi(t) + \Phi_{22}f_1(t) + \Phi_{23}f_1^*(t) = 0, \qquad (3)$$

$$D_m^*\frac{d^2\xi}{dt^2} + D_c^*\frac{d\xi}{dt} + \Phi_{31}\xi(t) + \Phi_{32}f_1(t) + \Phi_{33}f_1^*(t) = \frac{1}{2}q(x,y)\cdot q(t).$$

Якщо взаємозв'язок між амплітудами поздовжніх і поперечного переміщень виразити у вигляді

$$f_1(t) = \xi(t)\Delta_{f_1}/\Delta,\ f_2(t) = \xi(t)\Delta_{f_1^*}/\Delta,$$

то систему рівнянь динаміки (3) можна звести до рівняння відносно амплітуди поперечних коливань тришарової пластини. Замість третього рівняння системи одержано:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{D_c^*}{D_m^*}\frac{d\xi}{dt} + \frac{1}{D_m^*}\left[\Phi_{31} + \Phi_{32}\frac{\Delta_{f_1}}{\Delta} + \Phi_{33}\frac{\Delta_{f_1^*}}{\Delta}\right]\xi(t) = \frac{1}{2D_m^*}q(x,y)\cdot q(t). \qquad (4)$$

До рівняння (4) застосовується процедура методу Бубнова-Гальоркіна, після чого його можна записати так:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{d\xi}{dt} + \omega_0^2\ \xi(t) = q^*(t), \qquad (5)$$

де $$2\varepsilon = \int_0^a\int_0^b \frac{D_c^*}{D_m^*}w(x,y)dxdy;$$

$$\omega_0^2 = \int_0^a\int_0^b \frac{1}{D_m^*}\left[\Phi_{31} + \Phi_{32}\frac{\Delta_{f_1}}{\Delta} + \Phi_{33}\frac{\Delta_{f_1^*}}{\Delta}\right]w(x,y)dxdy;$$

$$q^*(t) = q(t)\cdot\int_0^a\int_0^b \frac{q(x,y)}{2D_m^*}w(x,y)dxdy.$$

Тут ω_0 - власна частота, ε - коефіцієнт демпфування, a,b - розміри пластини.

4. Кореляційне рівняння. Рівняння (5), яке зв'язує випадкові функції одновимірного вхідного процесу $q^*(t)$ з одновимірним вихідним процесом $\xi(t)$, є стохастичним диференціальним рівнянням. Вводячи детерміністичний диференціальний оператор $\mathbf{L_t}$, воно набуває вигляду, аналогічного [2], зручного для подальших перетворень

$$\mathrm{L_t}\xi(t) = q^*(t), \tag{6}$$

де $$\mathrm{L_t} = \frac{d^2}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{d}{dt} + \omega_0^2.$$

Рівняння (6) записується для двох моментів часу $t_1 \neq t_2$, після чого виконується їх помноження і осереднення результату (метод диференціальних рівнянь відносно моментних функцій [3,4]). Беручи до уваги, що розглядається процес, близький до нормального центрованого, результат можна навести у вигляді рівняння в частинних похідних:

$$\mathbf{L_{t_1}}\ \mathbf{L_{t_2}}\ K(t_1,t_2) = K_q(t_1,t_2), \tag{7}$$

де $$K(t_1,t_2) = <\xi(t_1)\xi(t_2)>,\ K_q(t_1,t_2) = <q^*(t_1)q^*(t_2)>,$$

$K_q(t_1,t_2)$, $K(t_1,t_2)$ - кореляційні функції вхідного та вихідного процесів.

5. Стаціонарний процес. Якщо додатково вважати, що властивості системи не змінюються в часі, тобто розглядати стаціонарний процес, для якого $t_2 - t_1 = \tau$, тоді

$$\frac{\partial}{\partial t_1} = -\frac{d}{d\tau},\ \frac{\partial}{\partial t_2} = \frac{d}{d\tau},\ K(t_1,t_2) = K(t_2,t_1) = K(t_2 - t_1)$$

і кореляційне рівняння набуває форми звичайного диференціального рівняння четвертого порядку

$$\left(\frac{d^2}{d\tau^2} - 2\varepsilon\frac{d}{d\tau} + \omega_0^2\right)\left(\frac{d^2}{d\tau^2} + 2\varepsilon\frac{d}{d\tau} + \omega_0^2\right)K(\tau) = K_q(\tau), \tag{8}$$

де $K(\tau) = K(t_2 - t_1)$, $K_q(\tau) = K(t_2 - t_1)$.

Для стаціонарного процесу замість початкових умов накладаються умови обмеженості при $\tau \to \infty$ кореляційної функції та її похідних і співвідношення симетрії (парності) $K(-\tau) = K(\tau)$.

6. Дія дельта-корельованого навантаження. Розглядається поведінка системи при стаціонарному дельта-корельованому зовнішньому навантаженні типу *"білий шум"*. Його кореляційна функція має вигляд

$$K_q(\tau) = s\delta(\tau),$$

де s - інтенсивність "білого шуму", $\delta(\tau)$ - дельта-функція.

Розв'язання рівняння (8) зводиться до добре відомого результату [3,4]:

$$K(\tau) = \frac{S}{4\omega_0^2\varepsilon}e^{-\varepsilon|\tau|}\left(\cos\omega_\varepsilon\tau + \frac{\varepsilon}{\omega_\varepsilon}\sin\omega_\varepsilon|\tau|\right),$$

де $\omega_\varepsilon = \left(\omega_0^2 - \varepsilon^2\right)^{1/2}$ - частота власних коливань з поправкою на демпфування, $\varepsilon < \omega_0$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Краснобаєв Ю.В. Рівняння згину пластин змінної товщини з легким заповнювачем // Доп. АН УРСР.- 1962.- №8.- С.1037-1040.

2. Тамуров Ю.Н. Случайные колебания трехслойных оболочек с нелинейно-упругим заполнителем // Труды I Всес. конф. «Технологические проблемы прочности несущих конструкций».- Запорожье, 1991.- Т.1, Ч. II. - С.229-235.

3. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем.- М.: Наука, 1979. - 335 с.

4. Болотин В.В. Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. - М.: Стройиздат, 1981. - 351 с.