УДК 519.862:330.105

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ БАГАТОПРОДУКТОВОГО ВИРОБНИЦТВА

Тамуров М. Г., д.т.н., професор, Леонтьєва В. В., студент

Запорізький державний університет

1. МАКРОЕКОНОМІЧНА МОДЕЛЬ n ВИРОБНИЦТВ

Для практичного використання економічної науки необхідні динамічні економіко-математичні моделі, що дозволяють аналізувати і прогнозувати стан та зміни виробництва [2]. Побудуємо баланс динаміки функціонування взаємозалежних n виробництв. На рис.1 наведена схема руху основних факторів для i-го виробництва.

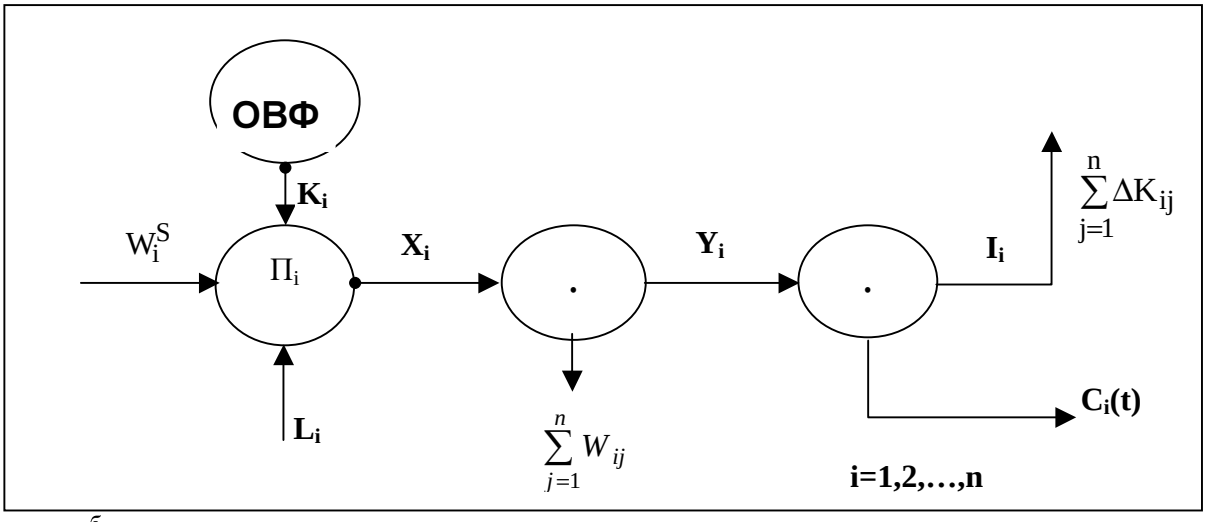

Рис. 1.

При $i = j$ економічні параметри відносяться до i-го виробництва. Параметри W_{ij} і dK_{ij}/dt визначають потоки капіталів відповідно на виробничі споживання та продукції приросту капітальних фондів із i-го виробництва у виробництва $j = 1, 2, ..., n$.

Динамічний баланс економічних показників для i-го виробництва після узагальнення на n виробництв [3], [4] може бути представленим так:

$$X_i(t) = \sum_{j=1}^{n} W_{ij} + \sum_{j=1}^{n} \frac{dK_{ij}}{dt} + C_i(t) . \qquad (1)$$

Якщо ввести коефіцієнти α_{ij} і β_{ij}, що визначають норми затрат продукції i-тої галузі на відтворення одиниці продукції j-тої галузі та відповідно додатково потік валових капітальних вкладень, тоді отримаємо:

$$W = \alpha_{ij} X_j \; ; \; \Delta K_{ij} \approx \beta_{ij} \frac{dK_{ij}}{dt} . \qquad (2)$$

З урахуванням (2) маємо для (1)

$$X_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} X_j(t) + \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \frac{dX_j(t)}{dt} + C_i(t) . \qquad (3)$$

Перетворимо систему динамічних рівнянь (3) до канонічної форми.

Отримуємо:

$$\frac{dX_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} X_j + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} C_j(t). \qquad i = 1,2,...,n. \tag{4}$$

Коли припустити, що невиробниче споживання, тобто $C_j(t)$, задане, то система (4) є неоднорідною, розв'язок її однорідної частини визначається так [1]:

$$\begin{aligned} X_{i0}(t) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta_i^j}{\Delta_j} C_n^j e^{k_j t}; \qquad i = 1,2,...,n-1. \\ X_{n0}(t) &= \sum_{j=1}^{n} C_n^j e^{k_j t}. \end{aligned} \tag{5}$$

У (5) позначено: C_n^j - постійні інтегрування, k_j - корені характеристичного рівняння однорідної системи диференціальних рівнянь, Δ_j, Δ_i^j - визначники, що містять основні α_{ij}, β_{ij} показники функціонування багатогалузевої економічної системи.

Окремий розв'язок системи (4) визначається методом варіації довільних постійних і записаний у вигляді [1]:

$$X_{i0}^r(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta_i^j}{\Delta_j} e^{k_j t} C_n^j(t); \quad X_{n0}^r(t) = \sum_{j=1}^{n} C_n^j(t) e^{k_j t}. \tag{6}$$

У (6) невідомими функціями є $C_n^j(t)$.

Підсумовуючи (5) і (6) отримаємо:

$$\begin{aligned} X_i(t) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta_i^j}{\Delta_j} e^{k_j t} C_n^j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta_i^j}{\Delta_j} e^{k_j t} \int \left[C_n^j(t)\right]' dt; \\ X_n(t) &= \sum_{j=1}^{n} C_n^j e^{k_j t} + \sum_{j=1}^{n} e^{k_j t} \int \left[C_n^j(t)\right]' dt. \end{aligned} \tag{7}$$

У (7) C_n^j визначається з початкових умов, тобто при $t = 0$ $X_i(0) = D_{i0}$; $X_n(0) = D_{n0}$.

2. ТРИПРОДУКТОВЕ ВИРОБНИЦТВО

Розглянемо окремо математичну модель динамічної макроекономіки, що складається з трипродуктового виробництва.

У цьому випадку з (4) випливає:

$$\frac{dX_i}{dt} = \gamma_{i1} X_1 + \gamma_{i2} X_2 + \gamma_{i3} X_3 + \lambda_{i1} C_1(t) + \lambda_{i2} C_2(t) + \lambda_{i3} C_3(t), \quad i = 1,2,3. \tag{8}$$

Тут

$$\lambda_{11} = -\frac{1}{\Delta}(\beta_{22}\beta_{33} - \beta_{23}\beta_{32}); \; \lambda_{12} = -\frac{1}{\Delta}(\beta_{13}\beta_{32} - \beta_{12}\beta_{33});$$

$$\lambda_{13} = -\frac{1}{\Delta}(\beta_{12}\beta_{23} - \beta_{13}\beta_{22});$$

$$\lambda_{21} = -\frac{1}{\Delta}(\beta_{23}\beta_{31} - \beta_{21}\beta_{33});$$

$$\lambda_{22} = -\frac{1}{\Delta}(\beta_{11}\beta_{33} - \beta_{31}\beta_{13});\ \lambda_{23} = -\frac{1}{\Delta}(\beta_{21}\beta_{13} - \beta_{23}\beta_{11});$$

$$\lambda_{31} = -\frac{1}{\Delta}(\beta_{21}\beta_{32} - \beta_{31}\beta_{22});\ \lambda_{32} = -\frac{1}{\Delta}(\beta_{12}\beta_{31} - \beta_{32}\beta_{11});\ \lambda_{33} = -\frac{1}{\Delta}(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{21}\beta_{12}).$$

$$\gamma_{11} = -(1-\alpha_{11})\lambda_{11} + \alpha_{21}\lambda_{12} + \alpha_{31}\lambda_{13};$$

$$\gamma_{12} = \alpha_{12}\lambda_{11} - (1-\alpha_{22})\lambda_{12} + \alpha_{32}\lambda_{13};$$

$$\gamma_{13} = \alpha_{13}\lambda_{11} + \alpha_{23}\lambda_{12} - (1-\alpha_{33})\lambda_{13};$$

$$\gamma_{21} = \alpha_{21}\lambda_{22} + \alpha_{31}\lambda_{23} - (1-\alpha_{11})\lambda_{21};$$

$$\gamma_{22} = -(1-\alpha_{22})\lambda_{22} + \alpha_{32}\lambda_{23} + \alpha_{12}\lambda_{21}; \qquad (9)$$

$$\gamma_{23} = \alpha_{33}\lambda_{22} - (1-\alpha_{33})\lambda_{23} + \alpha_{13}\lambda_{21};$$

$$\gamma_{31} = \alpha_{31}\lambda_{33} - (1-\alpha_{11})\lambda_{31} + \alpha_{21}\lambda_{32};$$

$$\gamma_{32} = \alpha_{32}\lambda_{33} + \alpha_{12}\lambda_{31} - (1-\alpha_{22})\lambda_{32};$$

$$\gamma_{33} = \alpha_{23}\lambda_{32} - (1-\alpha_{33})\lambda_{33} + \alpha_{13}\lambda_{31}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix}.$$

Розв'язок системи рівнянь (8) при заданих невиробничих споживаннях $C_i(t)$ запишеться у вигляді:

$$X_1(t) = \sum_{i=1}^{3} \Delta_1^i \ {}_i/\Delta_i \quad e^{\square . t} + \sum_{i=1}^{3} \square_{i0} e^{k_i t} \int \left[C_3^i(t)\right]' dt;$$

$$X_2(t) = \sum_{i=1}^{3} \Delta_2^i \quad {}_i/\Delta_i \quad e^{k\square} + \sum_{i=1}^{3} \alpha_{2i0} e^{k_i t} \int \left[C_3^i(t)\right]' dt; \qquad (10)$$

$$X_3(t) = \sum_{i=1}^{3} \quad {}_i/ \quad e^{k_i t} + \sum_{i=1}^{3} \epsilon^{\square\, t} \int \left[\square_3^i(t)\right]' dt.$$

У (10) прийняте:

$$\square = \begin{vmatrix} \Delta_1^1/\Delta_1 & \Delta_1^2/\Delta_2 & \Delta_1^3/\Delta_3 \\ \Delta_2^1/\Delta_1 & \Delta_2^2/\Delta_2 & \Delta_2^3/\Delta_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$\square_1$, $\square_2$, $\square_3$ випливає з $\square$ при заміні відповідного стовпчика стовпчиком (11)

$$\begin{vmatrix} -X_{10}^r(0) + D_{10} \\ -X_{20}^r(0) + D_{20} \\ -X_{30}^r(0) + D_{30} \end{vmatrix} \qquad (11)$$

$$\Delta_1^1=\begin{vmatrix}-\gamma_{13} & \gamma_{12}\\ -\gamma_{23} & \gamma_{22}-k_1\end{vmatrix};\ \Delta_2^1=\begin{vmatrix}\gamma_{11}-k_1 & -\gamma_{13}\\ \gamma_{21} & -\gamma_{23}\end{vmatrix};\ \Delta_1=\begin{vmatrix}\gamma_{11}-k_1 & \gamma_{12}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22}-k_1\end{vmatrix};$$

$$\Delta_1^2=\begin{vmatrix}-\gamma_{13} & \gamma_{12}\\ -\gamma_{23} & \gamma_{22}-k_2\end{vmatrix};\ \Delta_2^2=\begin{vmatrix}\gamma_{11}-k_2 & -\gamma_{13}\\ \gamma_{21} & -\gamma_{23}\end{vmatrix};\ \Delta_2=\begin{vmatrix}\gamma_{11}-k_2 & \gamma_{12}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22}-k_2\end{vmatrix};$$

$$\Delta_1^3=\begin{vmatrix}-\gamma_{13} & \gamma_{12}\\ -\gamma_{23} & \gamma_{22}-k_3\end{vmatrix};\ \Delta_2^3=\begin{vmatrix}\gamma_{11}-k_3 & -\gamma_{13}\\ \gamma_{21} & -\gamma_{23}\end{vmatrix};\ \Delta_3=\begin{vmatrix}\gamma_{11}-k_3 & \gamma_{12}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22}-k_3\end{vmatrix};$$

$C_3^i(t)=\frac{\bar{\Delta}_i}{\Delta}$.

Визначники $\bar{\Delta}_i$ випливають з Δ при заміні відповідного стовпчика стовпчиком вигляду (12))

$$\begin{vmatrix}\lambda_{11}C_1(t)+\lambda_{12}C_2(t)+\lambda_{13}C_3(t)\\ \lambda_{21}C_1(t)+\lambda_{22}C_2(t)+\lambda_{23}C_3(t)\\ \lambda_{31}C_1(t)+\lambda_{32}C_2(t)+\lambda_{33}C_3(t)\end{vmatrix}. \qquad (12)$$

Тут k_i - корені характеристичного рівняння системи (8)

$$k^3+Ak^2+Bk+C=0$$

$$A=-(\gamma_{11}+\gamma_{22}+\gamma_{33});\ B=\gamma_{33}(\gamma_{11}+\gamma_{22})+\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{13}\gamma_{31}-\gamma_{12}\gamma_{21};$$

$$C=\gamma_{11}(\gamma_{23}\gamma_{32}-\gamma_{22}\gamma_{33})+\gamma_{21}(\gamma_{33}\gamma_{12}-\gamma_{32}\gamma_{13})+\gamma_{31}(\gamma_{22}\gamma_{13}-\gamma_{12}\gamma_{23}).$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М-Л.: ГИТТЛ, 1950. – 467 с.
2. Экономика и бизнес / Под ред. В.Д. Камаева. – М.: МГТУ, 1993. – 464 с.
3. Основы теории оптимального управления / Под ред. В.Ф. Кротова.– М.: Высшая школа, 1990.– 430с.
4. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Прогресс, 1975. – 605 с.