УДК 620.178.5:620.179

ЗГИНАЛЬНІ КОЛИВАННЯ ТА ВІБРАЦІЙНА ДІАГНОСТИКА “ДИХАЮЧИХ” ТРІЩИН У ПРЯМОКУТНИХ ПЛАСТИНАХ

Ройтман А. Б., д.т.н., професор, Лимаренко Ю. О.,студент

Запорізький державний університет

У роботі розглядається тонка пружна прямокутна пластина з поперечною тріщиною. Наявність тріщини, що “дихає”, обумовлює змінення жорсткості пластини протягом одного циклу коливань. При моделюванні тріщини локальним зміненням товщини пластини отримані аналітичні вирази для власних частот згинальних коливань пластини. Наведені залежності відносної зміни власних частот коливань від відносної глибини тріщини та форми коливань пластини. Запропоновано діагностичні критерії, які дозволяють визначати глибину тріщини.

1. ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ПЛАСТИНИ З ТРІЩИНОЮ

Розглянемо тонку прямокутну пластинку зі сторонами a і b сталої товщини h, краї якої $x=0$ та $x=a$ вільні, а два інших ($y=0$ і $y=b$) – шарнірно обіперті. На нижній поверхні пластини в площині, що паралельна осі Ox, на відстані $y=y_T$ від осі Oy існує поверхнева тріщина (розріз) довжиною a і глибиною h_1.

Пластина здійснює вільні усталені згинальні коливання. Періодичне розтягання та стискання прилеглих до тріщини поверхневих шарів призводить до того, що береги тріщини протягом одного циклу заданої форми коливань будуть то збігатись, то розбігатись. При закритій тріщині жорсткість пластини практично не змінюється і її коливання будуть описуватись диференційним рівнянням [1]:

$$D\nabla^2\nabla^2 U + \rho h\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=0, \tag{1.1}$$

де $\nabla^2\nabla^2$ - бігармонічний оператор:

$$\nabla^2\nabla^2 U=\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2}{\partial^2 y}\right)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 U}{\partial^2 y}\right),$$

$U(x,y,t)$ – прогин нейтрального шару пластини, $D=\dfrac{Eh^3}{12\left(1-\mu^2\right)}$ – циліндрична жорсткість, ρ – густина матеріалу, E і μ – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона відповідно.

Вказаний спосіб спирання пластини допускає точний розв´язок [1] рівняння (1.1), який будемо шукати у вигляді

$$U(x,y,t)=A_0 u(x,y)\cos(\omega_0 t+\varphi_0), \tag{1.2}$$

де A_0 – амплітуда коливань, ω_0 – частота власних коливань пластини, φ_0 – початкова фаза.

Вираз для прогинів $u(x,y)$, який задовольняє крайовим умовам:

$$\begin{aligned} u_{y=0}&=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{y=0}=0,\\ u_{y=b}&=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{y=b}=0, \end{aligned} \tag{1.3}$$

можна подати у вигляді

$$u(x,y)=\left(C_1\,\mathrm{ch}\,\lambda_1 x+C_2\,\mathrm{sh}\,\lambda_1 x+C_3\cos\lambda_2 x+C_4\sin\lambda_2 x\right)\sin\left(n\pi y/b\right); \tag{1.4}$$

тут $n = 1, 2, \ldots$ – кількість півхвиль у напрямку осі y, $C_1, \ldots, C_4$ – сталі інтегрування, які визначаються з крайових умов для сторін $x = 0$ і $x = a$, сталі λ_1 і λ_2 залежать від частоти коливань,

$$\lambda_{1,2}^2 = k^2 \pm n^2\pi^2/b^2,$$

$$k^4 = \omega_0^2 \frac{\rho h}{D}. \tag{1.5}$$

Підставляючи вираз (1.4) у крайові умови для сторін $x = 0$ і $x = a$:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}\right)_{x=0} = 0,$$
$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{x=a} = \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}\right)_{x=a} = 0, \tag{1.6}$$

після відповідних перетворювань отримуємо рівняння частот [1]

$$\left(d_1\lambda_2 \operatorname{cth}\frac{\lambda_1 a}{2} + d_2\lambda_1 \operatorname{ctg}\frac{\lambda_2 a}{2}\right)\left(d_1\lambda_2 \operatorname{th}\frac{\lambda_1 a}{2} - d_2\lambda_1 \operatorname{tg}\frac{\lambda_2 a}{2}\right) = 0, \tag{1.7}$$

де

$$d_1 = \frac{\lambda_1^2 - \mu k^2}{\lambda_1^2 - (2-\mu)k^2}, \quad d_2 = \frac{\lambda_2^2 + \mu k^2}{\lambda_2^2 + (2-\mu)k^2},$$

і співвідношення для визначення сталих інтегрування C_{1-4}.

Власні форми коливань пластини подаються виразом

$$u_{m,n}(x,y) = \frac{\lambda_{2,m}\lambda_{1,m}^2\left(\lambda_{2,m}^2 + (2-\mu)k^2\right)\operatorname{sh}\lambda_{1,m}a - \lambda_{1,m}\lambda_{2,m}^2\left(\lambda_{1,m}^2 - (2-\mu)k^2\right)\sin\lambda_{2,m}x}{\lambda_{1,m}^2\left(\lambda_{2,m}^2 + \mu k^2\right)\operatorname{ch}\lambda_{1,m}a - \lambda_{2,m}^2\left(\lambda_{1,m}^2 - \mu k^2\right)\cos\lambda_{2,m}a}\left(\left(\lambda_{2,m}^2 + \mu k^2\right)\operatorname{ch}\lambda_{1,m}x + \right.$$
$$\left. + \left(\lambda_{1,m}^2 - \mu k^2\right)\cos\lambda_{2,m}x\right) - \left(\lambda_{2,m}\left(\lambda_{2,m}^2 + (2-\mu)k^2\right)\operatorname{sh}\lambda_{1,m}x + \lambda_{1,m}\left(\lambda_{1,m}^2 - (2-\mu)k^2\right)\sin\lambda_{2,m}x\right)]\times\sin(\pi m y/b)$$
$$(m = 0, 1, 2, \ldots; \quad n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{1.8}$$

де $\lambda_{1,m}$, $\lambda_{2,m}$ додатні корені рівняння частот (1.7).

Максимальна потенційна енергія, яку пластина набуває з закритою тріщиною, знаходячись у верхньому крайньому положенні при згинанні по формі *u(x,y)*, подається виразом [1]:

$$\Pi_0 = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b \frac{E_0 h^3}{12(1-\mu^2)} A_0^2\left\{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 + 2\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + 2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2\right\} dx\,dy. \tag{1.9}$$

Поклавши вираз у фігурних дужках рівним *P(x,y)*, маємо

$$\Pi_0 = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b \frac{E_0 h^3}{12(1-\mu^2)} A_0^2 P(x,y)\,dx\,dy. \tag{1.10}$$

Кінетична енергія у крайніх положеннях дорівнює нулю.

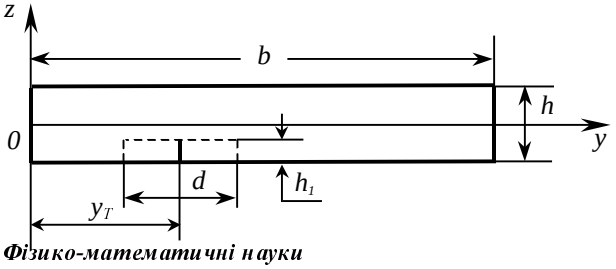


Рис. 1

Розглянемо частину періоду коливань пластини, під час якої тріщина розкривається. Припустимо, аналогічно [2], що з розкриттям тріщини в об'ємі матеріалу $h_1 \times a \times d$ (рис. 1) зникає пружна енергія деформації, що рівноцінно виборці цього

об'єму матеріалу й, отже, зміненню податливості системи.

Вибір характеру залежності між параметром d, який визначає зону впливу тріщини, її глибиною h_1, видом навантажения та іншими геометричними і механічними характеристиками зразка впливає на точність отримуваних в межах такого підходу результатів.

У роботі [3] для консольного стрижня експериментально встановлено

$$d = \frac{20}{3}\gamma^2 h, \tag{1.11}$$

де $\gamma = \frac{h_1}{h}$.

У [4] за використанням коефіцієнта інтенсивності напруг для згину штаби з крайовим вирізом отримано співвідношення

$$d = \frac{0{,}735h(1-\gamma)}{1-(1-\gamma)^3}\left[(1-\gamma)^6 - 3(1-\gamma)^2 + 2\right]. \tag{1.12}$$

Оцінити розміри зони впливу тріщини можна також за допомогою теорії розмірностей [5]. За незалежні аргументи шуканої функції можна прийняти параметри

$$h_1,\ E,\ K,$$

де K – коефіцієнт інтенсивності напруг, який залежить від геометрії зразка та характеру навантаження. На підставі $П$ – теореми для шуканого параметра запишемо

$$\frac{d}{h_1} = f\left(\frac{K}{E\sqrt{h_1}}\right).$$

Враховуючи лінійну залежність величини d від коефіцієнта K, можна покласти

$$d = C\frac{K\sqrt{h_1}}{E}, \quad (C = const). \tag{1.13}$$

Можна показати, що деякі співвідношення [6] являють собою окремий випадок (1.13).

У цій роботі як вираз для K використовується наведене в [7] значення коефіцієнта інтенсивності напруг на кінці малої півосі напівеліптичної поверхневої тріщини в прямокутній пластині під дією згинального моменту. Припускаючи, що одна з півосей еліпса достатньо велика у порівнянні з іншою, отримуємо

$$K = \frac{3\sigma}{8}\sqrt{\frac{h_1}{\pi}}, \tag{1.14}$$

де σ - розтягальна напруга, що діє на поверхні пластини поблизу тріщини.

Значення сталої C має бути визначине з додаткових теоретичних або експериментальних досліджень. У цьому випадку використовується значення, що було отримане при зіставленні співвідношення (1.13) з виразом, який запропоновано в роботі [6].

Оскільки за частот коливань, які реалізуються в роботі, довжина хвилі деформації на декілька порядків більша за глибину тріщини, пружне поле в її околі можна вважати квазістатичним [8]. Це дозволяє знехтувати впливом динамічних ефектів на коефіцієнт інтенсивності напруг.

Спираючись на підходи, що використані в роботі [9], позначимо за E_1 модуль пружності матеріалу при розкриванні тріщини. Введемо коефіцієнт

$$\alpha = \frac{E_0 - E_1}{E_0}, \tag{1.15}$$

який характеризує відносне змінення жорсткості матеріалу пластини на тій частині циклу її деформування, яка обумовлює розміщення тріщини в зоні розтягу. Отже, модуль пружності пошкодженої пластини можна подати у вигляді

$$E_1 = (1-\alpha)E_0. \tag{1.16}$$

Тоді власну частоту для вищевказаної частини періоду можна визначити у такий спосіб:

$$\omega_1 = \omega_0\sqrt{1-\alpha}, \tag{1.17}$$

а для всього періоду коливань, розглядаючи його як суму частин періоду з відкритою та закритою тріщиною, отримаємо

$$T = \frac{\pi}{\omega_0} + \frac{\pi}{\omega_1} = \frac{\pi}{\omega_0}\left(\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1-\alpha}}\right). \tag{1.18}$$

Отже, власна частота коливань пошкодженої пластини дорівнює

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\sqrt{1-\alpha}}{1+\sqrt{1-\alpha}}\omega_0 \ , \tag{1.19}$$

а відносне змінення частоти

$$\beta = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = \frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{1+\sqrt{1-\alpha}} . \tag{1.20}$$

Зазначимо, що основною проблемою адекватного моделювання тіла з тріщиною є обґрунтований вибір співвідношення жорсткостей коливальної системи E_1/E_0. У цій роботі для оцінки орієнтових значень коефіцієнта α використовується енергетичний підхід.

Максимальна потенційна енергія пластини з розкритою тріщиною визначається з урахуванням зроблених припущень у такий спосіб:

$$\Pi_1 = \frac{E_0 h^3}{24\left(1-\mu^2\right)} A_1^2 \int_0^a \left\{ \int_0^{y_T-d} P(x,y)\,dy + \int_{y_T-d}^{y_T+d} \left(1-\frac{h_1}{h}\right)^3 P(x,y)dy + \int_{y_T+d}^{b} P(x,y)dy \right\} dx, \tag{1.21}$$

де A_1 – амплітуда коливань пластини при розкритій тріщині.

Враховуючи зміну податливості системи (1.16), можемо записати

$$\Pi_1 = \frac{(1-\alpha)E_0 h^3}{24\left(1-\mu^2\right)} A_1^2 \int_0^a \int_0^b P(x,y)\,dx\,dy . \tag{1.22}$$

Прирівнюючи між собою вирази (1.18) та (1.19) визначаємо коефіцієнт α.

2. ПОБУДОВА ВІБРОДІАГНОСТИЧНИХ ПОКАЗНИКІВ ТА ЇХ ОЦІНКА

Зі зростанням пошкодженості матеріалу відбувається зменшення резонансної частоти коливань виробу з тріщиною, тому на практиці за вібродіагностичні критерії частіше за все використовують відносне змінення власних частот коливань тіла з появою в ньому різного роду пошкоджень. Розглянемо вплив глибини тріщини або, що те ж саме, величини параметра α, на зміну власних частот коливань прямокутної пластини з поперечною тріщиною.

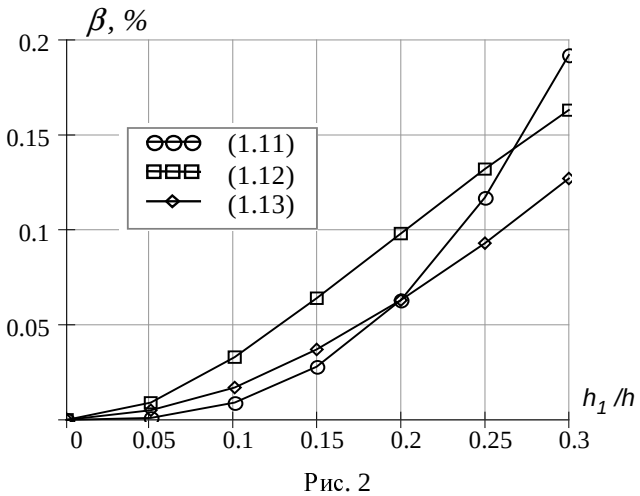


Рис. 2

Для прикладу візьмемо квадратну пластинку зі стороною $a = b = 1\cdot10^{-1}$ м і товщиною $h = 1\cdot10^{-3}$ м , $\mu = 0.3$ [10]. На рис. 2,3 наведені розрахункові залежності відносного змінення власних частот коливань пластини з тріщиною $\beta(h_1/h)$ від відносної глибини тріщини при виборі d у вигляді (1.11 – 1.13) для першої форми коливань (рис. 2) та для перших чотирьох форм згинальних коливань такої пластини при визначенні d за формулою (1.11) (рис. 3) (розрахунки виконано для $y_T/b = 0.5$) ; а на рис. 4 –залежності параметра $\beta(y_T/b)$ від відносного місця розміщення тріщини при $h_1/h = 0.2$.

У зв'язку з громіздкістю виразів, що стоять під знаком інтеґралу у (1.21) та (1.22), відповідні розрахунки та побудова графіків виконано за допомогою пакету прикладних програм MATHCAD 7.0 PRO.

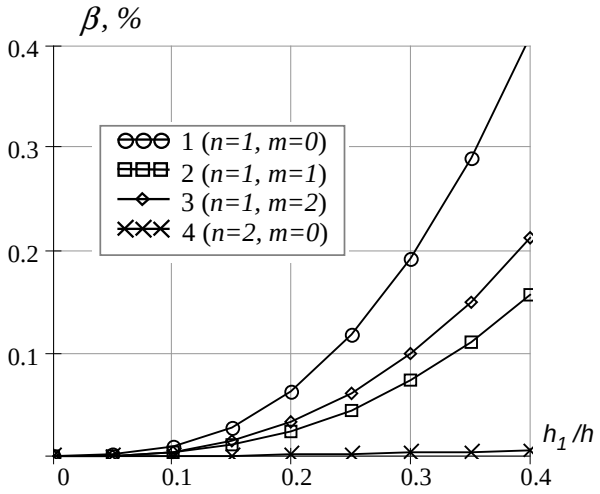


Рис. 3

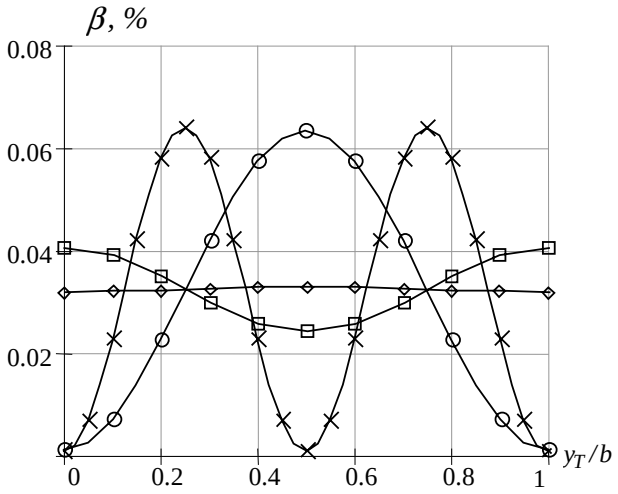


Рис. 4

Відносне змінення власних частот коливань пластини з тріщиною, як видно з рис. 3,4, суттєво залежить від відносної глибини тріщини та її місця розташування. Однак, враховуючи характер розміщення тріщини, найбільші зміни відповідають тим частотам, вузлові лінії яких проходять паралельно площині тріщини.

Далі розглянемо вібродіагностичні критерії, що базуються на гармонічному аналізі реального циклу деформування пластини з тріщиною.

Для згинальних коливань пластини за заданою власною формою з урахуванням ефекту “дихання” тріщини для одного циклу коливань будемо мати:

$$U(x,y,t)=\begin{cases} A_0\,u(x,y)\cos\omega_0 t, & -\pi/2\omega_0 \le t \le \pi/2\omega_0, \\ -A_1 u(x,y)\sin\omega_1\left(t-\pi/2\omega_0\right), & \pi/2\omega_0 \le t \le \pi/2\omega_0+\pi/\omega_1. \end{cases} \tag{2.1}$$

Заміну в другій частині періоду півхвилі косинусу на півхвилю синусу зі зсувом по фазі зроблено для того, щоб уникнути розриву функції $\cos\omega_0 t$ у точці $\pi/2\omega_0$.

Співвідношення між амплітудами коливань для частин періоду із закритою (A_0) і відкритою тріщиною (A_1) можна визначити, використавши для вищевказаних частин періоду закон збереження механічної енергії консервативної системи $W=П+K=const$. Враховуючи, що в крайніх положеннях кінетична енергія пластини $K=0$, отримаємо $П_0=П_1$; звідки, з урахуванням співвідношень (1.10) та (1.22), знайдемо

$$A_0^2=(1-\alpha)A_1^2. \tag{2.2}$$

Розклавши функцію (2.1) в ряд Фур’є по середній частоті (1.19), отримаємо рівняння коливань прямокутної пластини з тріщиною:

$$U(x,y,t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos k\omega t+b_k\sin k\omega t\right), \tag{2.3}$$

де

$$a_k=\frac{2A_0}{T}u(x,y)\left(\left(\frac{\sin(\omega_0+k\omega)\dfrac{\pi}{2\omega_0}}{\omega_0+k\omega}+\frac{\sin(\omega_0-k\omega)\dfrac{\pi}{2\omega_0}}{\omega_0-k\omega}\right)-\right.$$

$$-\frac{A_1}{A_0}\left(\frac{1-\cos(\omega_1+k\omega)\dfrac{\pi}{\omega_1}}{2(\omega_1+k\omega)}+\frac{1-\cos(\omega_1-k\omega)\dfrac{\pi}{\omega_1}}{2(\omega_1-k\omega)}\right)\quad (k=0,1,2,\ldots), \tag{2.4}$$

$$b_k=\frac{2A_1}{T}u(x,y)\left(\frac{\sin(\omega_1+k\omega)\dfrac{\pi}{\omega_1}}{2(\omega_1+k\omega)}-\frac{\sin(\omega_1-k\omega)\dfrac{\pi}{\omega_1}}{2(\omega_1-k\omega)}\right)\qquad (k=1,2,\ldots).$$

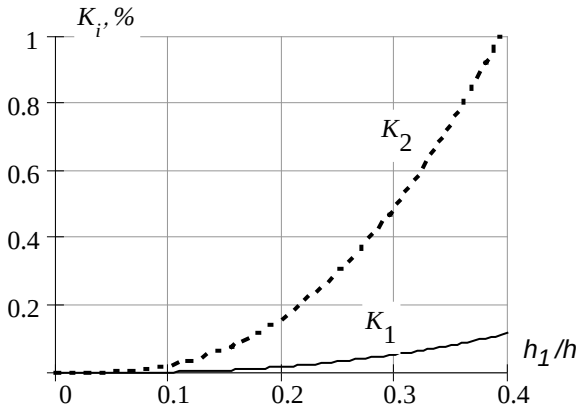


Рис. 5

На рис. 5 наведені графіки вібродіагностичних функцій K_1 і K_2, де K_1 являє собою коефіцієнт гармонік, що визначається через відношення середнього квадратичного значення амплітуд вищих гармонік до середнього квадратичного значення амплітуди досліджуваної гармоніки,

$$K_1=\sqrt{\frac{a_2^2+b_2^2}{a_1^2+b_1^2}}, \tag{2.5}$$

а K_2 характеризує наявність у спектрі циклу деформації пластинки сталої складової,

$$K_2=\frac{|a_0|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}.$$

Як видно з наведених графіків (рис. 5), критерій K_2 в цьому випадку виявляється більш інформативним, ніж K_1 й, отже, може бути використаний для діагностики “дихаючих” макротріщин як більш надійний у порівнянні з відносним зміненням власних частот коливань і коефіцієнтом гармонік.

ЛІТЕРАТУРА

1. Прочность. Устойчивость. Колебания. // Справочник: В 3 т. – М.: Машиностроение, 1968. – Т. 3. – 568 с.
2. Бовсуновский А. П. К вопросу об определении собственной частоты поперечных и продольных колебаний стержня с трещиной. Сообщение 1. Аналитический подход // Проблемы прочности. – 1999. – № 2. – С. 35 – 44.
3. Бовсуновский А. П. К вопросу об определении собственной частоты поперечных и продольных колебаний стержня с трещиной. Сообщение 2. Результаты эксперимента и расчета // Проблемы прочности. – 1999. – № 3. – С. 45 – 53.
4. Матвеев В.В., Бовсуновский А.П. К определению вибрационных характеристик стержня с закрывающейся трещиной при изгибных колебаниях // Проблемы прочности. – 2000. – № 3. – С. 5-23.
5. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике.– М.:Наука, 1981.– 447 с.
6. Ройтман А. Б., Титова О. А.Обоснование аналитических моделей диагностирования “дышащих” трещин в элементах конструкций // Техническая диагностика и неразрушающий контроль. – 2000. – № 3. – С. 27 – 32.
7. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2 т. Пер. с. англ./ Под ред. Ю. Мураками. – М.: Мир,1990. – Т. 2. – С. 453-1016.
8. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения.– М.:Наука, 1974.–640 с.
9. Матвеев В.В., Бовсуновский А.П. К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщение 2. Изгибные колебания, аналитическое решение // Проблемы прочности. – 1998. – № 6. – С. 9 – 29.
10. Krawczuk M. Natural vibrations of rectangular plates with a through crack // Archive of Applied Mechanics. – 1993. – 63. – P. 491 – 504.