УДК 519.8

НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ПОБУДОВИ ПАРАЛЕЛЬНОГО УПОРЯДКУВАННЯ ШИРИНИ ТРИ

Фірсов О.Д., м.н.с.

Дніпропетровський національний університет

Розроблено та теоретично обґрунтовано алгоритм розв'язку задачі паралельного упорядкування для випадку, коли значення параметра, який обмежує ширину упорядкування, дорівнює трьом.

Ключові слова: граф, вершина, упорядкування, алгоритм.

Фирсов А.Д. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО УПОРЯДОЧЕНИЯ ШИРИНЫ ТРИ / Днепропетровский национальный университет, Украина

Разработан и теоретически обоснован алгоритм решения задачи параллельного упорядочения для случая, когда значение параметра, который ограничивает ширину упорядочения, равно трем.

Ключевые слова: граф, вершина, упорядочение, алгоритм.

Phirsov A. D. THE APPROXIMATE SOLUTION OF THE PROBLEM OF BUILDING A PARALLEL SCHEDULING WITH A WIDTH THREE / Dnepropetrovsk national university, Ukraine

The solution algorithm of the problem of a parallel scheduling for the case, when the parameter, which bounds a width of scheduling, equals to three, has been developed and grounded theoretically.

Key words: graph, vertex, scheduling, algorithm.

Для аналізу структур графів застосовують два основні підходи. Або весь граф описують за допомогою деяких структур даних, для яких формулюють відому задачу і за допомогою відповідних методів знаходять її розв'язок. Наприклад, зводять до задачі цілочисельного лінійного програмування [1] чи до мережної моделі [2]. Або ведуть послідовний аналіз визначених структур у графі, застосовуючи метод гілок та меж [2]. Використання першого підходу призводить до одержання задач неприйнятно великої розмірності, а в другому випадку - до повного перебору варіантів.

При розв'язуванні ж практичних задач, що належать до класу NP-трудних [3], найчастіше досить знайти наближений розв'язок задачі в загальному чи окремих випадках, класичним способом одержання якого є розбивка задачі на підзадачі, кожну з яких можна розв'язати точно, а потім - об'єднання розв'язків із метою одержання загального розв'язку задачі.

Нехай граф G, що досліджується, має наступну структуру – ациклічний і без транзитивних дуг. Тоді наведемо відомі визначення [4].

Визначення 1. Лінійним упорядкуванням S кінцевої множини S, що складається з n елементів, називається розміщення елементів множині S по n місцях, розташованих у лінію так, що кожен елемент знаходиться тільки на одному місці.

Визначення 2. Довжиною *l* упорядкування S називається число непорожніх місць в упорядкуванні.

Визначення 3. Шириною h упорядкування S називається величина $h(S)=\max|S[i]|$, де i=1,...,n, S[i] - множина елементів, що знаходяться в упорядкуванні S на місці i.

Визначення 4. Паралельним упорядкуванням вершин орграфа G=(V,U) називається таке лінійне упорядкування його вершин, коли пара $(i,j)\in U$ та вершина i розташовується в упорядкуванні S лівіше вершини j, тобто з того, що $(i,j)\in U$ ($i\in S[p]$, $j\in S[q]$), випливає, що $p<q$.

Тоді формулюємо наступну оптимізаційну задачу: по заданому графу G і значенню параметра h побудувати паралельне упорядкування мінімальної довжини. Таке упорядкування назвемо оптимальним. Цю задачу позначимо, як S(G,3,*l*).

Щільним назвемо упорядкування, у якому на кожному місці стоїть h вершин, за виключенням останнього.

При дослідженні графів використуємо упорядкування спеціального вигляду $\underline{S}$, яке побудуємо за таким правилом [2]:

1. Вважаємо всі місця в упорядкуванні $\underline{S}$ порожніми, i=1.

2. У графі G шукаємо вершини, що не мають вхідних дуг, заносимо їх на і-те місце в упорядкуванні $\underline{S}$, у разі, якщо таких вершин немає, то кінець.
3. Вилучаємо з графа G розглянуті вершини разом з інцидентними дугами.
4. Перепозначимо: G:=G, i=i+1, перехід на пункт 2.

Довжину упорядкування $\underline{S}$ позначимо $\underline{l}$.

Будь-який граф G, у такому випадку, можна представити як об'єднання дводольних підграфів, які побудовані з вершин, та відповідних зв'язків множин $\underline{S}_t$, $\underline{S}_{t+1}$ (t=1,…,$\underline{l}$).

Уведемо підмножину вершин K_t^j множини $\underline{S}_t$, таку, що $|K_t^j|=k_t=\mathrm{mod}(|\underline{S}_t|,h)$, t=1,…,$\underline{l}$-1; j=1,…, $C_{|\underline{S}|}^{k_i}$.

Позначимо через ω_i множину безпосередніх послідовників вершини $i\in\underline{S}_t$, а $\Omega_t^j=\bigcup_{i=1}^{j}\omega_i$ - множину безпосередніх послідовників вершин множини K_t^j.

Тоді, у разі існування щільного упорядкування, буде існувати визначена підмножина вершин K_t^j множини $\underline{S}_t$ та підмножина вершин з h-$|K_t^j|$ вершин множини $\underline{S}_{t+1}$, що не належать відповідній множині Ω_t^j. Причому, ці вершини будуть стояти на одному місці в упорядкуванні і утворювати множину, яка є визначальною при побудові щільного чи оптимального упорядкування, у разі, якщо щільне не існує.

Щільне упорядкування існує, якщо існує такий набір множин Ω_t^j та K_t^m, що виконується умова:

$$\Omega_t^j \bigcap K_t^m=\varnothing,$$

де t=1,…,$\underline{l}$; $\Omega_l^j=\varnothing$ (множина вершин - безпосередніх послідовників K_t^m).

Назвемо множину S[j] в упорядкуванні S множиною переходу між множинами $\underline{S}_t$ і $\underline{S}_{t+1}$, якщо вона складається з вершин тільки цих множин (з кожної множини $\underline{S}_t$ та $\underline{S}_{t+1}$ множині S[j] належить хоча б одна вершина). Число усіх варіантів вибору таких множин на кожній множині S не більше $\prod_{p=1}^{h} C_{|V|}^{p}$. У конкретному упорядкуванні така множина може бути тільки одна.

Скористаємося введеними вище множинами переходу S[j] і підмножинами K_t^j і Ω_t^j для пошуку розв'язку задачі S(G,3,$\underline{l}$). У цьому випадку k_t може набувати значення 0,1,2. Множину переходу S[j], у якій k_t=1, позначимо S^1[j]. Використовуючи введене позначення, сформулюємо теорему.

Теорема 1. Якщо для множин $\underline{S}_t$, $\underline{S}_{t+1}$ (t=1,…,$\underline{l}$-1) графа G існує більше одного варіанта вибору множин переходу S^1 і виконуються умови:

1. M2′$\bigcap$ M2″=∅, де M2′ – деяка множина з двох вершин, що належать одному з варіантів вибору $S^1\backslash K_t^r$, а M2″- деяка множина з двох вершин, що належать іншому $S^1\backslash K_t^r$;
2. для множин M2′ і M2″ існує хоча б одна вершина, що належить $\underline{S}_t$ і не є безпосереднім попередником цих множин; тоді для графа G існує щільне упорядкування його вершин ширини h=3.

Доведення.

Нехай для графа G виконується умова теореми і $|K_t^j|\neq 0$, t=1,…,$\underline{l}$ (дана умова вводиться з метою виключення тривіального випадку).

Скористаємося методом математичної індукції.

1. Розглянемо випадок, коли k_t=1 для кожної множини $\underline{S}_m$.

Визначимо для $\underline{S}_1$ і $\underline{S}_2$ множини переходу. Поставимо в упорядкування на]|$\underline{S}_1$|/3[місце вершини множини переходу (одну вершину з $\underline{S}_1$ і дві вершини, що належать $\underline{S}_2$, для яких виконується умова 1). Місця з першого по]|$\underline{S}_1$|/3[заповнимо вершинами з $\underline{S}_1$, що залишилися. Виключимо ці вершини з графа.

Оскільки з $\underline{S}_2$ вилучені вершини, що відповідають умові 1 теореми, то існує як мінімум одна множина переходу між множинами $\underline{S}_2$ і $\underline{S}_3$. І, отже, можемо поставити в упорядкування на наступні](|$\underline{S}_2$|-2)/3[місць вершини множини $\underline{S}_2$ і вершину множини переходу, що належать $\underline{S}_3$, для якої виконується умова 1. У такий спосіб місця з першого по]|$\underline{S}_1$|/3[+](|$\underline{S}_2$|-2)/3[заповнені щільно.

Нехай щільно заповнені місця з першого по]|$\underline{S}_1$|/3[+](|$\underline{S}_2$|-2)/3[+…+[+](|$\underline{S}_{m-1}$|-2)/3[.

Покажемо, що наступні](|$\underline{S}_m$|-2)/3[місць можуть бути заповнені щільно.

З $\underline{S}_m$ вилучені дві вершини, що відповідають умові 1. За умовою теореми існує ще не менше однієї множини переходу між множинами $\underline{S}_m$ і $\underline{S}_{m+1}$. Отже, можемо поставити в упорядкування на $]|\underline{S}_1|/3[+](|\underline{S}_2|-2)/3[+\ldots+](|\underline{S}_{m-1}|-2)/3[+](|\underline{S}_m|-2)/3[$ місце вершини множини переходу (одну вершину з $\underline{S}_m$ і дві вершини, що належать $\underline{S}_{m+1}$), для яких виконується умова 1. На незаповнені місця до $](|\underline{S}_m|-2)/3[$ ставимо вершини множини з номером m.

Таким чином, можемо заповнити всі місця упорядкування по три вершини, за винятком останнього (число вершин у графі не кратне трьом). Тобто, побудувати щільне упорядкування вершин.

2. Розглянемо випадок $k_t=2$ для кожної множини $\underline{S}_m$.

Визначимо для $\underline{S}_1$ і $\underline{S}_2$ множини переходу. Поставимо в упорядкування на $]|\underline{S}_1|/3[$ місце дві вершини множини переходу (одну вершину з $\underline{S}_1$ і одну вершину, що належить $\underline{S}_2$, для якої виконується умова 1), і одну вершину, що належить $\underline{S}_1$, для якої виконується умова 2. Місця з першого по $]|\underline{S}_1|/3[$ заповнимо вершинами множини $\underline{S}_1$, що залишилися. Виключимо ці вершини з графа.

Оскільки з $\underline{S}_2$ вилучено вершини, які відповідають умові 1, то існує як мінімум одна множина переходу між множинами $\underline{S}_2$ і $\underline{S}_3$. Отже, можемо поставити в упорядкування на наступні $](|\underline{S}_2|-1)/3[$ місць вершини множини $\underline{S}_2$ і вершину множини переходу, що належить $\underline{S}_3$. У такий спосіб місця з першого по $]|\underline{S}_1|/3[+](|\underline{S}_2|-1)/3[$ заповнені щільно.

Нехай щільно заповнені місця з першого по $]|\underline{S}_1|/3[+](|\underline{S}_2|-1)/3[+\ldots+](|\underline{S}_{m-1}|-1)/3[$.

Покажемо, що і наступні $](|\underline{S}_m|-1)/3[$ місць можуть бути заповнені щільно.

З $\underline{S}_m$ вилучена вершина, що відповідає умові 1. За умовою теореми існує ще не менш однієї множини переходу між множинами $\underline{S}_m$ і $\underline{S}_{m+1}$. І, отже, можемо поставити в упорядкування на $]|\underline{S}_1|/3[+](|\underline{S}_2|-1)/3[+\ldots+](|\underline{S}_{m-1}|-1)/3[+](|\underline{S}_m|-1)/3[$ місце дві вершини множини переходу (одну вершину з $\underline{S}_m$ і одну вершину, що належить $\underline{S}_{m+1}$, для яких виконується умова 1) і одну вершину, що належить $\underline{S}_m$, для якої виконується умова 2. На незаповнені місця до $](|\underline{S}_m|-1)/3[$ ставимо вершини множини з номером m.

Таким чином, можемо заповнити всі місця упорядкування по три вершини, за винятком останнього (число вершин у графі не кратне трьом), тобто, побудувати щільне упорядкування.

Оскільки в п. 1), 2) значення m вибиралося довільно, то при розподілі вершин чергової множини одержимо або випадок 1, або випадок 2, для яких щільність доведена.

Далі пропонується алгоритм побудови щільного упорядкування у випадку, коли виконуються вимоги теореми.

1. i=0.
2. Побудуємо граф G^{α} по графу G. Нехай у вихідному графі існують дві сусідні множини $\underline{S}_t$, $\underline{S}_{t+1}$, зв'язані за допомогою множини дуг U_t, які утворюють дводольний граф $G^2=(\underline{S}_t,\underline{S}_{t+1},U_t)$. Позначимо через U′ множину дуг повного дводольного графа $G^{2\prime}=(\underline{S}_t,\underline{S}_{t+1},U_t')$. Видалимо з $G^{2\prime}$ усі дуги, відповідні U_t, у результаті одержимо граф $G^{\alpha}_t=(\underline{S}_t,\underline{S}_{t+1},U^{\alpha}_t)$. Застосуємо описану процедуру для всіх множин U_t вихідного графа - у результаті одержимо граф G^{α}. Перепозначимо для зручності $G:=G^{\alpha}$.
3. Знайдемо множини переходу в графі, що відповідають умовам теореми.
4. Визначаємо k_t для кожної множини $\underline{S}_t$.
5. Помітимо вершини множин переходу, що будуть належати шуканому упорядкуванню (між сусідніми множинами $\underline{S}_t$ множина переходу може бути тільки одна), а також позначимо в кожній множині $\underline{S}_t$, для якої $k_t=2$, по одній вершині, яка задовольняє умові 2 теореми.
6. Якщо $t=\underline{l}$, то $](|\underline{S}_t|-(h-k_{t-1}))/h[$ місць заповнюємо довільно вершинами множини $\underline{S}_t$. Упорядкування побудоване. Кінець.
7. Якщо $k_t=1$, то на наступні $](|\underline{S}_t|-(h-k_{t-1}))/h[-1$ місць в упорядкуванні ставимо непомічені вершини множини $\underline{S}_t$. На $](|\underline{S}_t|-(h-k_{t-1}))/h[$ місце ставимо помічену вершину множини $\underline{S}_t$ і вершини множини переходу, що належать $\underline{S}_{t+1}$, для яких виконується умова 1.
8. Якщо $k_t=2$, то на наступні $](|\underline{S}_t|-(h-k_{t-1}))/h[-1$ місць в упорядкуванні ставимо непомічені вершини множини $\underline{S}_t$. На $](|\underline{S}_t|-(h-k_{t-1}))/h[$ місце ставимо позначені вершини множини $\underline{S}_t$ і вершину множини переходу, що належить $\underline{S}_{t+1}$, для якої виконується умова 1.
9. t=t+1
10. Перехід на 5.

Покажемо складність розв'язку задачі S(G,3,*l*) для окремих випадків, коли $\underline{l}$ дорівнює 2, 3, 6.

Твердження 1. У випадку, коли граф $G=(\underline{S}_1,\underline{S}_2,U)$ - дводольний, перебір вершин для розв'язку задачі S(G,3,*l*) не перевершує $\max(|\underline{S}_1|,|\underline{S}_2|)$.

Доведення.

Введемо число k=mod(|$\underline{S}_1$|,3). Воно може приймати тільки три значення: 0,1,2.

Очевидно, що умова оптимальності упорядкування буде дотримуватися, якщо на]|$\underline{S}_1$|/3[місці буде стояти максимальне число вершин. У випадку k=0 ця умова дотримується автоматично.

Нехай k=1, тоді]|$\underline{S}_1$|/3[місце можна заповнити однією вершиною з $\underline{S}_1$ і, можливо, однією чи двома вершинами, що належать $\underline{S}_2$. Для того, щоб ці вершини могли стояти на одному місці в упорядкуванні, по визначенню, між ними не повинно бути зв'язків. Оскільки на]|$\underline{S}_1$|/3[місце можна вибрати будь-які вершини, що задовольняють заданим умовам, то для перевірки цих умов досить обчислити послідовно для кожної вершини i∈ $\underline{S}_1$ різницю |$\underline{S}_2$|-d_i^{out}, що і визначить шукані вершини.

Нехай k=2, тоді]|$\underline{S}_1$|/3[місце можна заповнити двома вершинами з $\underline{S}_1$ і, можливо, однією вершиною, що належить $\underline{S}_2$. Як і у першому випадку, досить обчислити послідовно для кожної вершини i∈ $\underline{S}_2$ різницю |$\underline{S}_1$|-d_i^{in}, що визначить шукану вершину.

Таким чином, у випадку k=1 необхідно перебрати не більше |$\underline{S}_1$| вершин, а у випадку k=2 не більше |$\underline{S}_2$| вершин. Отже, у загальному випадку необхідно перебрати не більше max(|$\underline{S}_1$|,|$\underline{S}_2$|) вершин чи виконати не більше O(max(|$\underline{S}_1$|,|$\underline{S}_2$|)) арифметичних операцій.

Виходячи з вищевикладеного доведення теореми, запропоновано алгоритм розв'язку задачі S(G,3,*l*) для дводольного графа:

1. k=mod(|$\underline{S}_1$|/3), b=0, q={∅}.
2. Якщо k=1, m=1;

   2.1. Для вершини i_m∈ $\underline{S}_1$ обчислюємо різницю r_m=|$\underline{S}_2$|-d_m^{out}.

   2.2. Якщо r_m≥2, то будуємо упорядкування S так, що на]|$\underline{S}_1$|/3[місце ставимо вершину i_m і будь-які дві вершини з множини $\underline{S}_2$\posl, де posl - множина безпосередніх послідовників i_m; місця з номерами від 1 до]|$\underline{S}_1$|/3[-1 і від]|$\underline{S}_1$|/3[+1 до](|$\underline{S}_1$|+|$\underline{S}_2$|)/3[-1 заповнюємо щільно довільними вершинами множин $\underline{S}_1$ і $\underline{S}_2$ відповідно; на](|$\underline{S}_1$|+|$\underline{S}_2$|)/3[місце ставимо mod((|$\underline{S}_1$|+|$\underline{S}_2$|),3) вершин, що залишилися . Перехід на 5.

   2.3. Якщо r_m=1, то будуємо послідовність q таку, що q[b]=m, b=b+1.

   2.4. Якщо m=|$\underline{S}_1$|, то

   якщо q≠∅ на]|$\underline{S}_1$|/3[місце ставимо вершину i_b і вершину з множини $\underline{S}_2$\posl, де posl - множина безпосередніх послідовників i_b,

   інакше на]|$\underline{S}_1$|/3[місце ставимо будь-яку вершину i∈ $\underline{S}_1$.

   Інші місця заповнюємо аналогічно пункту 2.2. Перехід на 5.

   2.5. m=m+1, перехід на 2.1.
3. Якщо k=2, m=1;

   3.1. Для вершини i_m∈ $\underline{S}_2$ обчислюємо різницю r_m=|$\underline{S}_1$|-d_m^{in}.

   3.2. Якщо r_m≥2 , то будуємо упорядкування S так, що на]|$\underline{S}_1$|/3[місце ставимо вершину i_m і будь-які дві вершини з множини $\underline{S}_1$\posl, де posl - множина безпосередніх попередників i_m; місця з номерами від 1 до]|$\underline{S}_1$|/3[-1 і від]|$\underline{S}_1$|/3[+1 до](|$\underline{S}_1$|+|$\underline{S}_2$|)/3[-1 заповнюємо щільно довільними вершинами множин $\underline{S}_1$ і $\underline{S}_2$ відповідно; на](|$\underline{S}_1$|+|$\underline{S}_2$|)/3[ставимо mod((|$\underline{S}_1$|+|$\underline{S}_2$|),3) вершин, що залишилися. Перехід на 5.

   3.3. Якщо m=|$\underline{S}_2$|, то на]|$\underline{S}_1$|/3[місце ставимо будь-які дві вершин із множини $\underline{S}_1$; місця з номерами від 1 до]|$\underline{S}_1$|/3[-1 і від]|$\underline{S}_1$|/3[+1 до]|$\underline{S}_1$|/3[+]|$\underline{S}_2$|/3[-1 заповнюємо щільно довільними вершинами множин $\underline{S}_1$ і $\underline{S}_2$ відповідно; на]|$\underline{S}_1$|/3[+]|$\underline{S}_2$|/3[місце ставимо mod(|$\underline{S}_2$|,3) вершин, що залишилися. Перехід на 5.

   3.4. m=m+1, перехід на 3.1.

4 Якщо k=0, то на]|$\underline{S}_1$|/3[місце ставимо будь-які три вершини з множини $\underline{S}_1$, місця з номерами від 1 до]|$\underline{S}_1$|/3[-1 і від]|$\underline{S}_1$|/3[+1 до]|$\underline{S}_1$|/3[+]|$\underline{S}_2$|/3[-1 заповнюємо щільно довільними вершинами множин $\underline{S}_1$ і $\underline{S}_2$ відповідно, на]|$\underline{S}_1$|/3[+]|$\underline{S}_2$|/3[місце ставимо mod(|$\underline{S}_2$|,3) вершин, що залишилися.

5. Шукане упорядкування побудоване. Кінець.

Приклад. Для графа G=($\underline{S}_1$,$\underline{S}_2$,U) побудуємо оптимальне упорядкування при h=3.

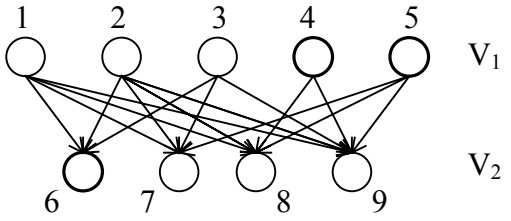

Рис.1

Оптимальне упорядкування:

$$S=\begin{matrix}1 & 4 & 7\\ <2 & 5 & 8>.\\ 3 & 6 & 9\end{matrix}$$

1. k=mod(5/3)=2, q=0;

2. k≠1;

3. k=2, m=1;

3.1. $i_1 \in \underline{S}_2$ різниця $r_1=5-2=3$.

3.2. $r_1 \geq 2$, то будуємо упорядкування S так, що на 2-ге місце ставимо вершину $i_6 \in \underline{S}_2$ і будь-які дві вершини з множини $\underline{S}_1 \backslash posl=\{4,5\}$, $posl=\{1,2,3\}$ - множина безпосередніх попередників i_6; місце 1 заповнюємо вершинами 1,2,3, що належать $\underline{S}_1$; на місце 3 ставимо вершини 7,8,9.

Шукане упорядкування побудовано.

Визначення. Тридольним графом $G=(\underline{S}_1,\underline{S}_2,\underline{S}_3,U)$ назвемо такий граф, у якого $\underline{l}=3$.

Твердження 2. У випадку, коли граф $G=(\underline{S}_1,\underline{S}_2,\underline{S}_3,U)$ - тридольний, перебір вершин для розв'язку задачі $S(G,3,l)$ не перевершує n^2**.**

Доведення.

Розглянемо дводольний підграф $G'=(\underline{S}_1,\underline{S}_2,U)$ графа G. За теоремою 1 для даного підграфа оптимальне упорядкування $S_{G'}$ можна побудувати за $\max(|\underline{S}_1|,|\underline{S}_2|)$ операцій. За допомогою алгоритму 1 визначимо вершини, які будуть стояти в цьому упорядкуванні на $]|\underline{S}_1|/3[$ місці, і позначимо їх.

Розглянемо дводольний підграф $G''=(\underline{S}_2,\underline{S}_3,U)$ графа G. За теоремою 1 для даного підграфа оптимальне упорядкування $S_{G''}$ можна побудувати за $\max(|\underline{S}_2''|,|\underline{S}_3|)$ операцій. За допомогою алгоритму 1 визначимо вершини, які будуть стояти в цьому упорядкуванні на $]|\underline{S}_2''|/3[$ місці ($S_{G''}[]|\underline{S}_2''|/3[]$).

У тому випадку, коли $|S_{G'}[]|\underline{S}_1|/3[] \bigcup S_{G''}[]|\underline{S}_2''|/3[]|<k_{G'}+k_{G''}$ (одна вершина не може стояти на різних місцях в упорядкуванні), відповідно до алгоритму 1 для підграфа G′ вибираємо інші вершини для заповнення $]|\underline{S}_1|/3[$ місця.

У противному випадку будуємо шукане упорядкування S. Для цього, відповідно до алгоритму 1, для підграфа G′ визначаємо вершини, що будуть стояти на місцях від 1 до $]|\underline{S}_1|/3[$, для підграфа G″ визначаємо вершини, що будуть стояти на місцях від першого до останнього в упорядкуванні вершин цього підграфа. Поставимо у відповідність місцям з 1 по $]|\underline{S}_1|/3[$ упорядкування S, місця з 1 по $]\underline{S}_1|/3[$ упорядкування $S_{G'}$, місцям з $]|\underline{S}_1|/3[$ +1 по останнє упорядкування S, місця з першого по останнє упорядкування $S_{G''}$. Упорядкування S оптимальне за побудовою.

Таким чином, для пошуку оптимального упорядкування вершин графа G необхідно виконати, після побудови $S_{G'}[]|\underline{S}_1|/3[]$, не більше $\max(|\underline{S}_2''|,|\underline{S}_3|)$ операцій. Побудова $S_{G'}[]|\underline{S}_1|/3[]$ вимагає не більше $\max(|\underline{S}_1|,|\underline{S}_2|)$ операцій. Отже, усього необхідно не більше $(\max(|\underline{S}_1|,|\underline{S}_2|))\times(\max(|\underline{S}_2''|,|\underline{S}_3|))$ операцій.

Нехай граф G такий, що $|\underline{S}_1|=p$, $|\underline{S}_2|=r$, $|\underline{S}_3|=1$, $n=p+r+1$, структура графа така, що для побудови оптимального розкладу потрібен перебір усіх вершин множини $\underline{S}_1$ і $\underline{S}_2$, тобто $p\times r$ операцій. Цей добуток максимальний у випадку p=r. Тоді, якщо число вершин у графі дорівнює n, то $p=r=](n-1)/2[$. А відповідно необхідно перебрати не більш $(n-1)^2/4$ вершин.

Алгоритм розв'язку задачі $S(G,3,l)$ для тридольного графа:

1. За допомогою алгоритму 1 визначимо вершини, які будуть стояти в упорядкуванні $S_{G'}$ на $]|\underline{S}_1|/3[$ місці, позначимо їх. Якщо для G′ не існує m такого, що $r_m \geq 2$, то далі ведеться аналіз тільки тих вершин, номери яких належать послідовності q.

2. Виділимо дводольний підграф $G''=(\underline{S}_2,\underline{S}_3,U)$ графа G.

3. За допомогою алгоритму 1 визначимо вершини, які будуть стояти в упорядкуванні $S_{G''}$ на $]|\underline{S}_2''|/3[$ місці.

4. Якщо $|S_{G'}[]|\underline{S}_1|/3[] \bigcup S_{G''}[]|\underline{S}_2''|/3[]|<k_{G'}+k_{G''}$ ($k_{G''}=\mathrm{mod}((|\underline{S}_2|-h+k_{G'})/3)$), то:

4.1. Якщо усі вершини перебрані (відповідно до алгоритму 1), то перехід на 1 з урахуванням того, що для m вершин графу G′ перевірка вже зроблена.

4.2. Перехід на 3 з урахуванням того, що для m вершин графу G″ перевірка вже зроблена. (Якщо для G″ немає m: $r_m \geq 2$, то далі ведеться аналіз тільки тих вершин, номера яких належать послідовності q.)

5. Будуємо шукане упорядкування S. Для підграфа G′ визначаємо вершини, що будуть стояти на місцях від 1 до $]|\underline{S}_1|/3[$ (аналогічно алгоритму 1), для підграфа G″ визначаємо вершини, що будуть стояти на місцях від першого до останнього в упорядкуванні вершин цього підграфа. Поставимо у відповідність до елементів упорядкування з 1 по $]|\underline{S}_1|/3[$ упорядкування S, елементи упорядкування з 1 по $]|\underline{S}_1|/3[$ упорядкування $S_{G'}$, елементам з $]|\underline{S}_1|/3[$ +1 по останнє упорядкування S, елементи з першого по останнє упорядкування $S_{G''}$. Упорядкування S побудоване.

Приклад. Для графа $G=(\underline{S}_1,\underline{S}_2,\underline{S}_3,U)$ побудуємо оптимальне упорядкування при параметрі h=3.

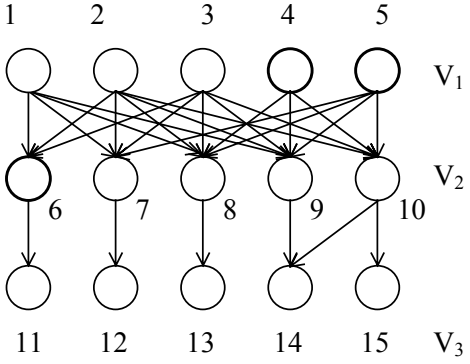

Рис. 2.

1. Застосовуємо алгоритм 1 до дводольного підграфа $G'(\underline{S}_1,\underline{S}_2)$. В упорядкуванні $S_{G'}$ на $]|\underline{S}_1|/3[$ місці будуть стояти вершини 4,5 з $\underline{S}_1$ і 6 з $\underline{S}_2$.

2. Далі продовжимо роботу з підграфом $G'(\underline{S}_2,\underline{S}_3)$.

3. Застосовуємо алгоритм 1 до дводольного підграфа $G''(\underline{S}_2,\underline{S}_3)$. В упорядкуванні $S_{G''}$ на $]|\underline{S}_2|/3[$ місці будуть стояти: вершина 7, з $\underline{S}_2$ і 11,13, що належать $\underline{S}_3$.

4. $|S_{G'}[]|\underline{S}_1|/3[]\bigcup S_{G''}[]|\underline{S}_2''|/3[]|>2+1$ ($k_{G''}$=mod((5-1)/3)).

5. Будуємо шукане упорядкування S. Для підграфа G′ визначаємо вершини, що будуть стояти на місці 1 (1,2,3, що належать $\underline{S}_1$), для підграфа G″ визначаємо вершини, що будуть стояти на місцях 1,2,3. На першому місці стоять вершини 8,9,10, що належать $\underline{S}_2$, на другому вершина 7, що належить $\underline{S}_2$ і 11,13, що належать $\underline{S}_3$, на третьому 12,14,15, що належать $\underline{S}_3$. Поставимо у відповідність до елементів 1 і 2 упорядкування S, елементи 1 і 2 упорядкування $S_{G'}$, елементам з третього по останнє упорядкування S, елементи з першого по останній упорядкування $S_{G''}$.

Визначення. Шестидольним графом $G=(\underline{S}_1,\underline{S}_2,\underline{S}_3,\underline{S}_4,\underline{S}_5,\underline{S}_6,U)$ назвемо такий граф, у якого $\underline{l}$=6.

Твердження 3. У випадку, коли граф $G=(\underline{S}_1,\ldots,\underline{S}_6,U)$ – шестидольний, перебір вершин для розв'язку задачі $S(G,3,l)$ не перевершує n^4.

Доведення. Виділимо з даного графа тридольні підграфи $G_1=(\underline{S}_1,\underline{S}_2,\underline{S}_3,U_1)$ і $G_2=(\underline{S}_4,\underline{S}_5,\underline{S}_6,U_2)$. Відповідно до теореми 3, для розв'язку задачі $S(G,3,l)$ на кожнім з цих графів потрібно перебрати не більше n^2 вершин. Для узгодження розв'язків для графів G_1 і G_2 необхідно розв'язати задачу $S(G,3,l)$ на дводольному графі $G_3(\underline{S}_3,\underline{S}_4,U_{34})$, для чого, відповідно до теореми 1, необхідний лінійний перебір. Цю задачу необхідно розв'язати не більш ніж $(\max\{\underline{S}_3,\underline{S}_4\})^2$ раз. Тоді для розв'язку задачі усього необхідно перебрати не більше n^4 вершин.

Узагальнюючи отримані результати, одержуємо оцінку складності зверху для розв'язку задачі для довільного графа такого вигляду: $O(n^{]l/3+1[})$. При такому підході зберігається експоненційна складність розв'язку задачі $S(G,3,l)$, але, очевидно, що вона значно нижча складності розв'язку даної задачі за допомогою узагальненого варіанта методу гілок та меж, чи розв'язку відповідної задачі ЦЛП.

Найкращим результатом, що дозволяє одержати наближений розв'язок задачі $S(G,3,l)$, є алгоритм точного розв'язку задачі $S(G,2,l)$ за допомогою лексикографічної нумерації вершин. Оцінка точності зверху для нього 2-2/h. У випадку h=3 одержуємо, що довжина упорядкування, побудованого за допомогою лексикографічного підходу, не більш ніж у 1,33 раза перевершує оптимальну.

Використовуючи результати тверджень 1-3, пропонується наступний підхід і алгоритм наближеного розв'язку задачі $S(G,3,l)$.

Виділимо в довільному графі кінцеве число підграфів, що складаються з однакового числа множин $\underline{S}_m$. Розв'яжемо задачу S(G,3,*l*) для кожного з цих підграфів. Розв'язок загальної задачі одержимо у вигляді щільної послідовності упорядкувань для підграфів. При такому підході, у гіршому випадку, довжина упорядкування виросте, у порівнянні з оптимальним, на k-1 місце, де k-число множин $\underline{S}_m$ у заданих підграфах.

Розіб'ємо граф G (*l*>5) на шестидольні підграфи. Тоді, відповідно до теореми 4, складність розв'язку задачі S(G,3,*l*) не перевершує $O(n^4)$.

Розрахуємо, як буде відрізнятися оптимальне упорядкування від наближеного в даному випадку. Нехай мінімальна потужність $\underline{S}_m$ дорівнює чотирьом. При менших значеннях складність розв'язку задачі зменшується, що добре для практичних задач, але в даному випадку розглянемо найгірший випадок. Отже, у заданому шестидольному графі 24 вершини. Щільне упорядкування в цьому випадку буде мати довжину рівну восьми. Звідси одержуємо співвідношення довжини наближеного упорядкування до оптимального (8k+k-1)/8k, що наближається до значення 9/8, яке менше значення 1,33, одержаного за допомогою лексикографічного підходу. Для загального випадку, коли потужність $\underline{S}_m$ більше трьох, одержуємо оцінку точності 3(n/3+k-1)/n.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бекишев Г.А. Решение одной задачи теории графов // Дискретный анализ.- Новосибирск, 1966. -С.57-62.
2. Бурдюк В.Я., Турчина В.А. Алгоритмы параллельного упорядочения. -Днепропетровск: ДГУ, 1985. -84 с.
3. Теория расписаний и вычислительные машины / Под ред. Э. Коффмана. -М.: Наука, 1984. -334 с.
4. Dolev D., Warmuth M., Scheduling flat graphs // SIAM J. Comput., August 1985. -Vol. 14. -No. 3.