УДК 517.95 + 517.518

ПОСТРОЕНИЕ СИММЕТРИЧНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ СИММЕТРИЧНЫХ ЧЕРТЕЖЕЙ

*Толок А. В., к.т.н., доцент, Семерич Ю.С., аспирант, Шейко Т.И., д.т.н., профессор

Институт проблем машиностроения НАН Украины (г. Харьков)
**Запорожский государственный университет*

В работе рассмотрены различные типы симметрии: симметрия относительно точки, оси, поворота и трансляционного типа. Предложены методы построения нормализованных уравнений локусов, обладающих симметрией, основанные на применении теории R-функций. При этом симметричный локус вполне определялся заданием канонического уравнения только одной из симметричных его частей. Построено уравнение поверхности трехмерного тела с трансляционным типом симметрии, визуализация которого выполнена при использовании системы "Ранок".
Ключевые слова: R-операции, локус, симметрия.

Толок О.В., Семерич Ю.С., Шейко Т.І. ПОБУДОВА СИМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ДЛЯ СИМЕТРИЧНИХ ЛОКУСІВ / Інститут проблем машинобудування НАН України, Запорізький державний університет, Україна

У роботі розглянуто різноманітні типи симетрії: симетрія відносно точки, осі, повороту і трансляційного типу. Запропоновано методи побудови нормалізованих рівнянь локусів, що володіють симетрією, засновані на використанні теорії R-функцій. При цьому симетричний локус цілком визначався завданням канонічного рівняння тільки однією з симетричних його частин. Побудовано рівняння поверхні тривимірного тіла з трансляційним типом симетрії, візуалізація якого виконана з використанням системи "Ранок".
Ключові слова: R-операції, локус, симетрія.

Tolok A.V., Semerich U.S., Sheiko T.I. BUILDING OF SYMMETRICAL FUNCTIONS FOR SYMMETRICAL LOCI / Institute of problems of mechanical engineering, Zaporozhye state university, Ukraine

The different types of symmetry, which are relative to point, axis, rotation and translation symmetry are considered in this paper. The methods of building of normalized locus equations with symmetry, based on the theory of R-functions are proposed. Thus symmetrical locus was quite determined by the representation of the canonical equation by only one of its symmetrical part. The equation of three-dimensional object surface with translation symmetry is built. Its visualization is carried out using system "Ranok".
Key words: R-operations, locus, symmetry.

Геометрические объекты, обладающие симметрией, встречаются во многих областях науки и техники. Учет симметрии упрощает решение многих проблем. Поэтому важно уметь строить точные уравнения симметричных чертежей и соответствующие этой симметрии аппроксимационные полиномы (в том числе финитные сплайны). Здесь мы ограничимся лишь наиболее часто встречающимися и простыми типами симметрии [1].

Понятие симметрии тесно связано с понятием преобразований координат, сохраняющих модуль всякого вектора. Пусть $y = Ax$ – есть отображение E^n в E^n, где $x = (x_1,\dots,x_n), y = (y_1,\dots,y_n)$, а

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Очевидно, что это отображение сохраняет модуль всякого вектора, если выполняется условие

$$\|Ax - Ay\| = \|x - y\|, \qquad (2)$$

где $\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ – расстояние между точками *x* и *y*.

Последнюю формулу можно переписать в виде $\|Ax + b - (Ay + b)\| = \|x - y\|$, где *b* – произвольный постоянный вектор. Таким образом, если отображение $y = Ax$ сохраняет расстояние, то его сохраняет

также и отображение $y = Ax + b$. Простейшим преобразованием координат, сохраняющим расстояние, является тождественное преобразование, определяемое единичной матрицей

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\{A_i\}$ – множество всех преобразований, сохраняющих расстояние. Рассмотрим отображения $y = A_1 x$ и $z = A_2 y$. Тогда очевидно, что $z = A_2 A_1 x$ – есть также отображение, сохраняющее модуль вектора. Выражение $A_2 A_1$ называется композицией отображений. Для композиции отображений справедлив ассоциативный закон, то есть $A_1(A_2 A_3) = (A_1 A_2) A_3$. Кроме того, $AI = A, IA = A$, а для всякого отображения A существует такое отображение A^{-1}, что $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Это отображение называется обратным, и его матрица представляет собой транспонированную матрицу A^T, то есть $A^{-1} = A^T$. Таким образом, отображения, определяемые матрицами вида (1), составляют группу. При этом, так как

$$\det(A_1 A_2) = \det A_1 \det A_2,$$

в частности,

$$\det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1} = \det A \det A^T = (\det A)^2 = |\det I| = 1,$$

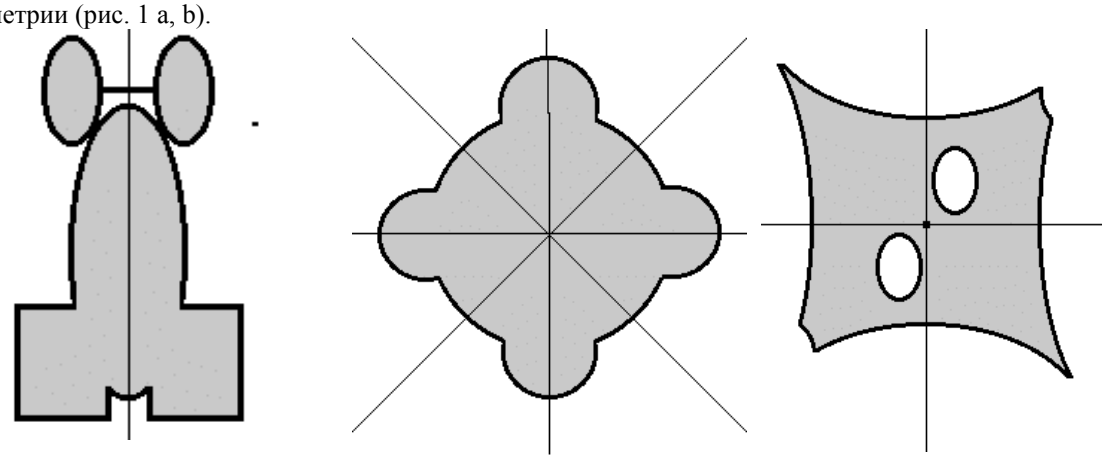
то $|\det I| = 1$ для любого отображения, сохраняющего модуль вектора. Таким свойством обладают все преобразования переноса, поворота, зеркального отражения осей координат. Используя преобразования, сохраняющие модуль вектора, легко дать определение симметрии.

Определение 1. Чертеж L называется симметричным, если существует такое, отличное от тождественного преобразования, отображение A, сохраняющее модуль всякого вектора, которое отображает L в L, то есть $AL = L$.

Определение 2. Отображения симметрии, сохраняющие неподвижной хотя бы одну точку пространства, называются точечными. Всякое точечное отображение имеет вид $y = Ax$.

Неточечные отображения принято называть отображениями трансляционного типа [2, 3].

Пример 1. Чертежи, симметричные относительно оси, плоскости, точки, обладают свойством точечной симметрии (рис. 1 a, b).



a) b) c)

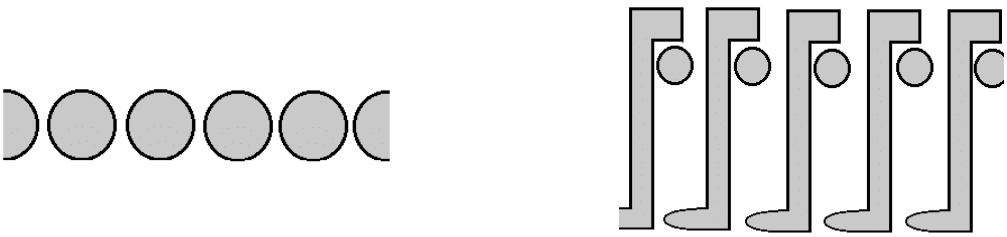
Рис. 1 a) симметрия относительно вертикальной оси;

b) симметрия относительно четырех осей и точки их пересечения;

c) симметрия относительно точки

Примерами симметричных объектов в 3D являются: куб (9 плоскостей симметрии, 7 осей симметрии и центр симметрии), шар (бесконечно много плоскостей и осей симметрии и центр симметрии), прямой круговой конус (бесконечно много плоскостей симметрии, одна ось симметрии) и т.д.

Пример 2. На рис. 2 a, b приведены чертежи, обладающие симметрией трансляционного типа. Нетрудно сообразить, что такие чертежи имеют бесконечную протяженность [2, 3].



a) b)

Рис. 2

Если чертеж обладает некоторым типом симметрии, а $f(x,y)=0$ – есть его уравнение, то это еще не значит, что этим видом симметрии обладает функция $f(x,y)$. Так уравнение $e^{xy}\left(1-x^2-y^2\right)=0$ есть уравнение окружности, которая симметрична относительно любой оси, проходящей через ее центр. Однако функция $e^{xy}\left(1-x^2-y^2\right)$ этим свойством не обладает. Например,

$$e^{-xy}\left(1-x^2-y^2\right)\neq e^{xy}\left(1-x^2-y^2\right) \quad .$$

Определение 3. Пусть $\omega=0$ – уравнение чертежа *L*, симметричного относительно отображения *A*. Будем говорить, что функция ω обладает тем же типом симметрии, если $\omega(Ax)=\omega(x)$. Функция ω называется кососимметричной относительно отображения *A*, если $\omega(Ax)=-\omega(x)$.

В условиях конкретной физической задачи с симметричным чертежом могут быть связаны как симметричные, так и кососимметричные функции [1, 5].

Пример 3. Пусть прямоугольник (рис. 3) деформируется под действием сил P и (-P), растягивающих его вдоль оси абсцисс.

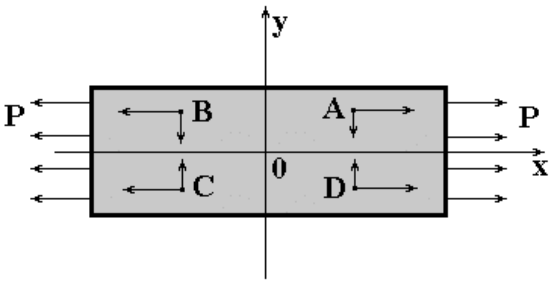


Рис. 3

Рассмотрим перемещения в симметрично расположенных относительно осей координат точках $A(x,y), B(-x,y), C(-x,-y), D(x,-y)$. Пусть вектор перемещения есть (u,v). Легко видеть, что

$$u(x,y)=u(x,-y); u(-x,y)=u(-x,-y)=-u(x,y),$$
$$v(x,y)=v(-x,y); v(x,-y)=v(-x,-y)=-v(x,y).$$

Таким образом, горизонтальные перемещения $u(x,y)$ являются кососимметричными относительно вертикальной оси симметрии прямоугольника и симметричными относительно его горизонтальной оси. Вертикальные перемещения $v(x,y)$, возникающие в стержне в соответствии с законом Пуассона, наоборот, симметричны относительно вертикальной оси и кососимметричны относительно горизонтальной оси. Поэтому при определении напряженного состояния в таком стержне нет

необходимости искать его во всей области, а достаточно ограничиться его четвертой частью. Уже этот простой пример показывает, что учет симметрии функций при решении прикладных задач, например, задач математической физики, может существенно сократить время и уменьшить погрешности вычислений. Заметим, что не для всякого вида симметрии может существовать кососимметричная функция.

Рассмотрим вначале симметричные объекты в 2D.

1. СИММЕТРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ

Предположим, что уравнение $\omega(x,y)=0$ является уравнением чертежа *L*, симметричного относительно некоторой прямой MN (рис. 4).

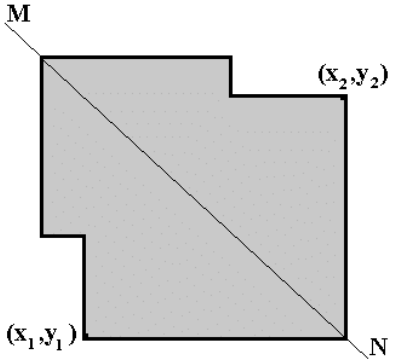


Рис. 4

Пусть нормальное уравнение этой прямой есть $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$, а точки (x_1,y_1) и (x_2,y_2) являются симметричными точками чертежа *L* относительно прямой MN. Нетрудно подсчитать, что координаты этих точек связаны соотношением

$$\begin{cases} x_2 = 2p\cos\alpha - y_1\sin 2\alpha - x_1\cos 2\alpha \\ y_2 = 2p\sin\alpha - x_1\sin 2\alpha + y_1\cos 2\alpha \end{cases} \tag{3}$$

Таким образом, для чертежа *L*, симметричного относительно прямой $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$, получаем равенство

$$\omega(x,y)=\omega\left(2p\cos\alpha-y\sin 2\alpha-x\cos 2\alpha,\ 2p\sin\alpha-x\sin 2\alpha+y\cos 2\alpha\right). \tag{4}$$

В частности, если ось симметрии проходит через начало координат ($p=0$) под углом β к оси абсцисс ($\beta=\frac{\pi}{2}+\alpha$, рис. 4), она имеет уравнение $x\sin\beta-y\cos\beta=0$, а координаты точки, симметричной данной точке (x,y), получаются в результате преобразования

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftarrow \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q_\beta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Например, если осью симметрии является ось *Ox* ($\beta=0$), то из (4) получаем: $\omega(x,y)=\omega(x,-y)$. Аналогично, для оси *Oy* $\omega(x,y)=\omega(-x,y)$.

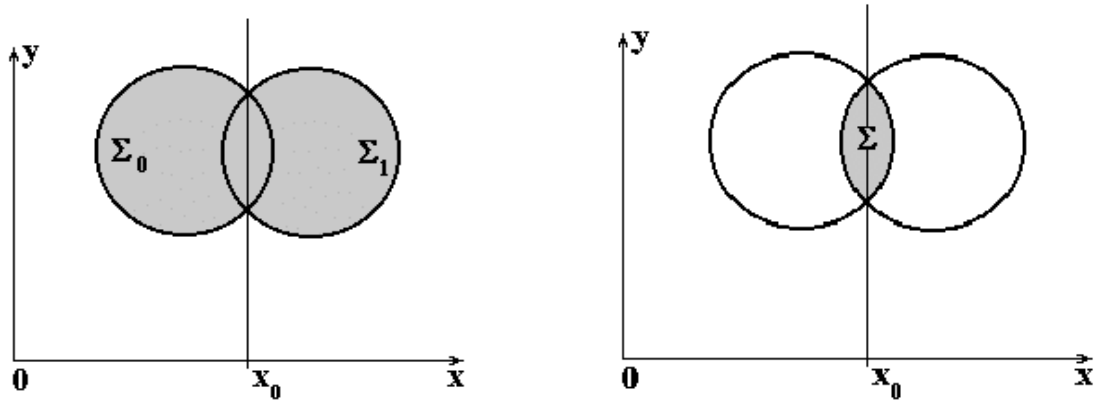
Чертеж, симметричный относительно прямой MN, вполне определяется заданием одной из симметричных его частей. Пусть $\omega_1(x,y)=0$ есть уравнение этой части. Тогда уравнение симметричной части имеет вид

$$\omega_2(x,y)=\omega_1(2p\cos\alpha-y\sin 2\alpha-x\cos 2\alpha,2p\sin\alpha-x\sin 2\alpha+y\cos 2\alpha)=0.$$

Предположим, что $\omega_1(x,y)>0$ определяет область Ω_1, для которой $\omega_1(x,y)=0$ есть ее граница. Тогда уравнение симметричного относительно прямой $x=x_0$ чертежа получим в виде (рис. 5 а)

$$\omega(x,y) \equiv \omega_0(\mathrm{x},\mathrm{y}) \vee_* \omega_1(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 0 \qquad (6)$$

Если $\omega_1(\mathrm{x},\mathrm{y})$ является нормализованной, а R-дизъюнкция $\vee_*$ обладает свойством сохранять нормализованность, то уравнение (7) также является нормализованным [1].



a) b)

Рис. 5

Замечание 1. Если чертеж L_1 есть граница области Ω_1, пересекающая прямую MN, то замена в формуле (7) R-дизъюнкции на R-конъюнкцию приведет к уравнению

$$\omega(x,y) \equiv \omega_0(\mathrm{x},\mathrm{y}) \wedge_* \omega_1(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 0\,, \qquad (7)$$

которое также будет уравнением симметричного чертежа (рис. 5 b).

Замечание 2. Возможны и другие пути учета симметрии, основанные на преобразовании координат, без применения R-операций. Так, например, если локус Σ_0 расположен слева (справа) от "зеркала" $x - x_0 = 0$, то после замены $x \Rightarrow x_0 - |x_0 - x|$ ($x \Rightarrow x_0 + |x_0 - x|$) в формуле $\sigma_0(x,y)$ неравенство $\omega(x,y) \equiv \sigma_0(x_0 - |x_0 - x|, y) \geq 0$ ($\omega(x,y) \equiv \sigma_0(x_0 + |x_0 - x|, y) \geq 0$) определит область Ω, а функция $\omega(x,y)$ также будет нормализованной и обладать необходимой зеркальной симметрией. Если же локус Σ_0 пересекает прямую $x - x_0 = 0$, то в формировании локуса Ω участвует только левая (правая) часть локуса Σ_0. Полученная в результате таких построений функция $\omega(x,y)$ будет представлена более простой формулой, поскольку в ней не содержится довольно громоздкая операция $\vee_\alpha$. Однако, в GSS (General Structure of Solution [1]) часто необходимо, чтобы функции, учитывающие геометрическую информацию, кроме свойства нормализованности, были бы достаточное число раз дифференцируемы [1]. Полученная же при втором подходе функция $\omega(x,y)$ может иметь разрывные первые производные. Эта трудность преодолевается следующим образом

$$\omega(x,y) \equiv \sigma_0\left(x_0 \mp \sqrt{(x_0 - x)^2 + \varepsilon^2 \left[\sigma_0(x,y)\sigma_0(2x_0 - x, y)\right]^{2m}}, y\right) \geq 0\,, \qquad (8)$$

где ε – множитель, выбираемый из условия, что якобиан преобразования

$$\begin{cases} |x_0 - x| \Rightarrow \sqrt{(x_0 - x)^2 + \varepsilon^2 \left[\sigma_0(x,y)\sigma_0(2x_0 - x, y)\right]^{2m}} \\ y \Rightarrow y \end{cases}$$

по модулю меньше единицы. Действительно, вблизи границы области Ω построенная таким образом функция $\omega(x,y)$ будет отличаться от прежнего своего выражения на величины порядка $\left[\sigma_0(x,y)\sigma_0(2x_0 - x, y)\right]^m$, которые, очевидно, не повлияют на ее нормализованность и в то же время будет дифференцируемой нужное число раз, если m – достаточно большое число. На рис. 6 приведены картины линий уровня функции $\omega(x,y)$ до применения формулы (8) (верхний рисунок, на котором видны изломы вдоль линии "зеркала") и после ее применения (нижний рисунок).



Рис. 6

Замечание 3. Приведенные рассуждения легко перенести на 3D. Представим себе, что плоскость, параллельная оси *Oz,* пересекает плоскость *xOy* по прямой MN и речь идет о симметрии относительно этой плоскости. Тогда координаты *x* и *y* симметричных точек по-прежнему связаны соотношением (3), а координаты *z* у них одинаковы. Поэтому для построения симметричного чертежа можно воспользоваться формулами (6) и (7), в которых вместо функций $\omega(\mathrm{x},\mathrm{y})$ будут рассматриваться функции $\omega(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$.

Пример 4. Пусть полый цилиндр задан нормализованным уравнением

$$\Sigma_1 = \left(\sigma_1 \equiv \left(\tfrac{1}{2R}\left(R^2 - x^2 - (y-a)^2\right) \wedge_0 \tfrac{1}{2r}\left(x^2 + (y-a)^2 - r^2\right)\right) \wedge_0 \tfrac{1}{h} z(h-z) = 0\right).$$

Тогда симметричный относительно плоскости *xOz* цилиндр имеет уравнение

$$\Sigma_2 = \left(\sigma_2 \equiv \left(\tfrac{1}{2R}\left(R^2 - x^2 - (y+a)^2\right) \wedge_0 \tfrac{1}{2r}\left(x^2 + (y+a)^2 - r^2\right)\right) \wedge_0 \tfrac{1}{h} z(h-z) = 0\right).$$

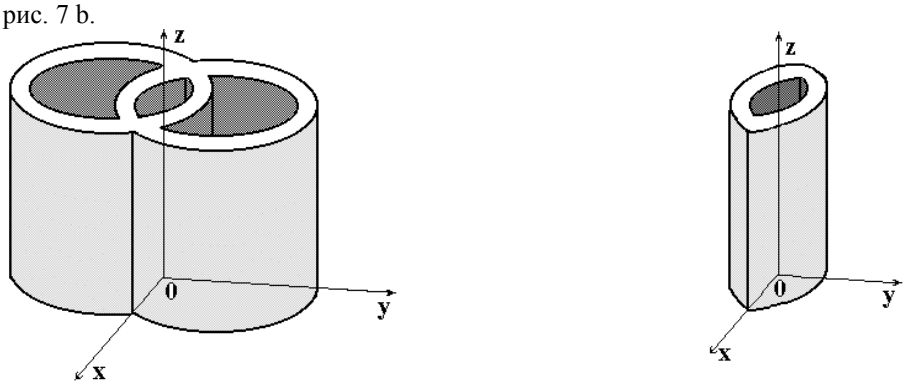
Тогда для двух симметричных относительно плоскости *xOz* поверхностей, изображенных на рис. 7, получаем

$$\omega_1(x,y,z) = \left(\left(\tfrac{1}{2R}\left(R^2 - x^2 - (y-a)^2\right) \wedge_0 \tfrac{1}{2r}\left(x^2 + (y-a)^2 - r^2\right)\right) \wedge_0 \tfrac{1}{h} z(h-z)\right) \vee_0$$
$$\vee_0 \left(\left(\tfrac{1}{2R}\left(R^2 - x^2 - (y+a)^2\right) \wedge_0 \tfrac{1}{2r}\left(x^2 + (y+a)^2 - r^2\right)\right) \wedge_0 \tfrac{1}{h} z(h-z)\right) = 0$$

для рис. 7 a

$$\omega_1(x,y,z) = \left(\left(\tfrac{1}{2R}\left(R^2 - x^2 - (y-a)^2\right) \wedge_0 \tfrac{1}{2r}\left(x^2 + (y-a)^2 - r^2\right)\right) \wedge_0 \tfrac{1}{h} z(h-z)\right) \wedge_0$$
$$\wedge_0 \left(\left(\tfrac{1}{2R}\left(R^2 - x^2 - (y+a)^2\right) \wedge_0 \tfrac{1}{2r}\left(x^2 + (y+a)^2 - r^2\right)\right) \wedge_0 \tfrac{1}{h} z(h-z)\right) = 0$$

и для рис. 7 b.



a) b)

Рис. 7

Нетрудно заметить, что если в формулах (6) или (7) вместо R-операции взять произвольную коммутативную операцию, а вместо функции $\omega(x,y)$ взять произвольную неопределенную функцию $\Phi(x,y)$, то получим формулу

$$u(x,y)=\Phi(x,y)*\Phi\left(2p\cos\alpha-y\sin 2\alpha-x\cos 2\alpha,\ 2p\sin\alpha-x\sin 2\alpha+y\cos 2\alpha\right), \quad (9)$$

определяющую пучок функций, симметричных относительно прямой MN. Так, например, если в качестве упомянутой коммутативной операции «$*$» взять сложение, а неопределенную компоненту Φ выбрать в виде степенного полинома степени n

$$\Phi(x,y)=\sum_{i+j=0}^{n}c_{ij}x^i y^j\ ,$$

то получим формулу для пучка полиномов степени n, обладающих симметрией относительно прямой с нормальным уравнением $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$

$$u(x,y)=\sum_{i+j=0}^{n}c_{ij}\left[x^i y^j+\left(2p\cos\alpha-y\sin 2\alpha-x\cos 2\alpha\right)^i\left(2p\sin\alpha-x\sin 2\alpha+y\cos 2\alpha\right)^j\right]. \quad (10)$$

Если необходимо построить пучок полиномов, обладающих также симметрией и по отношению к некоторой другой прямой $x\cos\beta+y\sin\beta-p_1=0$, то это не означает, что достаточно выполнить аналогичную процедуру над $u(x,y)$ в формуле (10).

Рассмотрим этот вопрос подробнее. Предположим, нам даны две оси симметрии, точку пересеченя которых примем в качестве начала координат

$$x\sin\beta-y\cos\beta=0\,,\ x\sin\gamma-y\cos\gamma=0\,, \quad (11)$$

где β,γ – углы этих прямых с осью абсцисс. Пусть (x,y) – произвольная точка, а r – ее расстояние до начала координат. Тогда координаты симметричных ей точек относительно этих осей можно получить соответствующими преобразованиями $Q_\beta\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $Q_\gamma\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. Отсюда находим

$$Q_\beta Q_\gamma\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2\beta & \sin 2\beta\\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos 2\gamma & \sin 2\gamma\\ \sin 2\gamma & -\cos 2\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2(\beta-\gamma) & -\sin 2(\beta-\gamma)\\ \sin 2(\beta-\gamma) & \cos 2(\beta-\gamma)\end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$Q_\gamma Q_\beta\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2\gamma & \sin 2\gamma\\ \sin 2\gamma & -\cos 2\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos 2\beta & \sin 2\beta\\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2(\beta-\gamma) & \sin 2(\beta-\gamma)\\ -\sin 2(\beta-\gamma) & \cos 2(\beta-\gamma)\end{pmatrix}.$$

Следовательно, $Q_\beta Q_\gamma\neq Q_\gamma Q_\beta$. Нетрудно проверить, что

$$\underbrace{\left(Q_\beta Q_\gamma\right)\left(Q_\beta Q_\gamma\right)\ldots\left(Q_\beta Q_\gamma\right)}_{k}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2k(\beta-\gamma) & -\sin 2k(\beta-\gamma)\\ \sin 2k(\beta-\gamma) & \cos 2k(\beta-\gamma)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}. \quad (13)$$

Из этой формулы видно, что если отношение $\dfrac{\pi}{\beta-\gamma}$ не является рациональным числом (числа π и $(\beta-\gamma)$ несоизмеримы), то процесс, определяемый формулой (13), является бесконечным и не повторяющимся. Это значит, что если некоторая точка $P_1(x,y)$ принадлежит чертежу, симметричному относительно данных осей, то ему принадлежит бесконечно много точек, причем, как это следует из (13),

$$\left(x\cos 2k(\beta-\gamma)-y\sin 2k(\beta-\gamma)\right)^2+\left(x\sin 2k(\beta-\gamma)+y\cos 2k(\beta-\gamma)\right)^2=x^2+y^2=r^2\,.$$

Если всю эту последовательность преобразований выполнить над аргументами непрерывной функции, то получим функцию, для которой окружность $x^2+y^2=r^2$ будет линией уровня. Отсюда следует, что оси, угол между которыми несоизмерим с π, могут быть осями симметрии только для осесимметричных чертежей, для которых любая прямая, проходящая через ось симметрии является осью симметрии.

Таким образом, не нарушая общности рассуждений, есть смысл рассматривать такие оси симметрии, угол наклона которых к оси абсцисс равен $\frac{\pi k}{N}$, $k = 0,1,\ldots,N-1$.

В этом случае уравнения осей симметрии, согласно формуле (11), имеет вид

$$x\sin\frac{k\pi}{N} - y\cos\frac{k\pi}{N} = 0,\ \ k = 0,1,\ldots,N-1. \tag{14}$$

Пусть (x,y) – произвольная точка. Тогда координаты точек, симметричных ей относительно осей (14), определяются преобразованиями (6), которые в этом случае имеют вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftarrow \begin{pmatrix} \cos\frac{2k\pi}{N} & \sin\frac{2k\pi}{N} \\ \sin\frac{2k\pi}{N} & -\cos\frac{2k\pi}{N} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q_k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ \ k = 0,1,\ldots,N-1 \tag{15}$$

Повторное применение операторов Q_k, Q_m приводит к формулам

$$Q_kQ_m\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{2k}{N} & \sin\frac{2k}{N} \\ \sin\frac{2k}{N} & -\cos\frac{2k}{N} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{2m}{N} & \sin\frac{2m}{N} \\ \sin\frac{2m}{N} & -\cos\frac{2m}{N} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{2(k-m)\pi}{N} & -\sin\frac{2(k-m)\pi}{N} \\ \sin\frac{2(k-m)\pi}{N} & \cos\frac{2(k-m)\pi}{N} \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$Q_mQ_k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{2m}{N} & \sin\frac{2m}{N} \\ \sin\frac{2m}{N} & -\cos\frac{2m}{N} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{2k}{N} & \sin\frac{2k}{N} \\ \sin\frac{2k}{N} & -\cos\frac{2k}{N} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{2(k-m)\pi}{N} & \sin\frac{2(k-m)\pi}{N} \\ -\sin\frac{2(k-m)\pi}{N} & \cos\frac{2(k-m)\pi}{N} \end{pmatrix}.$$

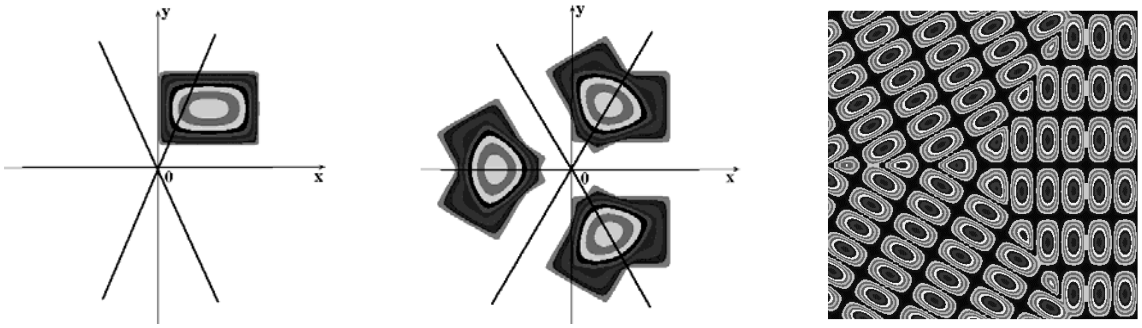
Нетрудно заметить, что Q_mQ_m есть единичная матрица. Среди других матриц вида Q_nQ_s, $n,s = 0,1,\ldots,N-1,\ n \neq s$, различных имеется только *N-1*. Это позволяет представить симметричную форму в виде

$$v(x,y) = u(x,y) + \sum_{k=0}^{N-1} u\left(\left(Q_k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)^T\right) + \sum_{i=1}^{N-1} u\left(\left(Q_{0i}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)^T\right). \tag{17}$$

Действительно, применяя к (17) Q_j, $j = 0,\ldots,N-1$, получаем, что

$$v\left(\left(Q_j\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)^T\right) = u(x,y) + \sum_{k=0}^{N-1} u\left(\left(Q_k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)^T\right) + \sum_{i=1}^{N-1} u\left(\left(Q_{0i}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)^T\right) = v(x,y). \tag{18}$$

Пример 5. На рис. 8 a показаны линии уровня финитной функции с прямоугольным носителем, определяемой формулой $u(x,y) = |f| + f$, где $f = x(2-x)\bigwedge_0(2-y)(y-0.5)$. На рис. 8 b показаны линии уровня той же функции после ее симметризации относительно трех осей, угол между которыми равен $\frac{2\pi}{3}$.



a) b) c)

Рис. 8

Пусть одна из симметричных частей области Ω с тремя осями симметрии покрыта прямоугольной сеткой сплайнов с финитными носителями. После симметризации эта сетка имеет вид, показанный на рис. 8 с.

2. СИММЕТРИЯ ПОВОРОТА

Определение 4. Чертеж Ω называют симметричным порядка N относительно оси C_N, если после поворота на угол $\frac{2\pi}{N}$ он занимает начальную область пространства. Если чертеж Ω занимает одну и ту же область пространства при любом угле поворота, то он называется осесимметричным, а ось симметрии обозначают C_∞.

Если осью симметрии является, например, ось Oz, то преобразование симметрии порядка N

$$Q_{z_N}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{2\pi}{N} & \sin\frac{2\pi}{N} & 0\\ -\sin\frac{2\pi}{N} & \cos\frac{2\pi}{N} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \tag{19}$$

Пусть $\Omega_0=\left(\omega_0(x,y,z)\ge 0\right)$ есть некоторая заданная область. Построим области Ω_k, получающиеся в результате преобразования (19), соответствующего повороту Ω_0 на углы $\frac{2\pi k}{N}$, $\left(k=0,\ldots,N-1\right)$.

$$\Omega_k=\left(\omega_k(x,y,z)\ge 0\right), \tag{20}$$

где

$$\omega_k(x,y,z)=\omega_0\left(\left(Q_{z_N}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)^T\right)=\omega_0\left(\left(\begin{pmatrix}\cos\frac{2\pi k}{N} & \sin\frac{2\pi k}{N} & 0\\ -\sin\frac{2\pi k}{N} & \cos\frac{2\pi k}{N} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)^T\right) \tag{21}$$

Очевидно, что область $\Omega=\Omega_0\cup\ldots\cup\Omega_{N-1}$ обладает симметрией порядка N относительно оси Oz. Уравнение границы $\partial\Omega$, обладающей такой же симметрией, можно записать в виде

$$\omega\equiv\left(\ldots\left(\omega_0\vee^*\omega_1\right)\vee^*\ldots\right)\vee^*\omega_{N-1}, \tag{22}$$

где $\vee^*$ – R-дизъюнкция, обладающая свойством ассоциативности. Например, $\vee^* = \vee_1$, или $\vee^* = \bigvee_m^0$.

Впрочем, симметричное уравнение $\partial\Omega$ можно получить, исходя из формулы (22), даже в том случае, когда $\vee^*$ – неассоциативная операция. Для этого достаточно произвести в левой части (22) все возможные циклические перестановки, результатом которых будут $\omega^{(k)}$, $\left(k = 1,\ldots,\frac{N(N-1)}{2}\right)$, а затем можно записать симметричное уравнение

$$\omega(x,y,z) \equiv \frac{2}{N(N-1)} \sum_{k=1}^{\frac{N(N-1)}{2}} \omega^{(k)}(x,y,z). \qquad (23)$$

Пример 6. Рассмотрим тело, осью симметрии которого является ось Oz, в центре которого имеется правильное четырехугольное призматическое отверстие, а по ободу – семь периодически расположенных выточек цилиндрической формы (рис. 9 b). Напишем уравнение поверхности этого тела. В качестве опорных выберем следующие области

$\Sigma_1 = \left(\sigma_1 \equiv \frac{R^2 - x^2 - y^2}{2R} \geq 0\right)$ – бесконечный цилиндр радиуса R, с осью Oz.

$\Sigma_2 = \left(\sigma_2 \equiv \frac{b^2 - x^2}{2b} \wedge_0 \frac{b^2 - y^2}{2b} \geq 0\right)$ – бесконечная призма квадратного сечения, со сторонами, параллельными плоскостям xOz, yOz и равными $2b$.

$\Sigma_3 = \left(\sigma_3 \equiv \frac{H^2 - z^2}{2H} \geq 0\right)$ – горизонтальный слой между плоскостями $z = \pm H$.

$\Sigma_4 = \left(\sigma_4 \equiv \frac{r^2 - (x-a)^2 - z^2}{2r} \geq 0\right)$ – бесконечный цилиндр, направляющей которого является окружность радиуса r, с центром в точке $(a,0,0,)$ и образующими, параллельными оси Oy.

$\Sigma_5 = \left(\sigma_5 \equiv \frac{yh - y^2}{h} \geq 0\right)$ – вертикальный слой между плоскостями $y = h,\ \ y = 0$.

Уравнение поверхности цилиндра с квадратным призматическим отверстием можно написать в виде:

$$\omega_1(x,y,z) \equiv \left(\sigma_1 \wedge_0 \overline{\sigma_2}\right) \wedge_0 \sigma_3 = 0.$$

Запишем уравнение поверхности одной из семи цилиндрических выточек, которые должны быть расположены с равным интервалом по ободу цилиндра.

$$\omega_0(x,y,z) \equiv \sigma_4 \wedge_0 \sigma_5 = 0.$$

Уравнения остальных шести выточек получаем по формуле (21)

$$\omega_k(x,y,z) = \omega_0\left(x\cos\frac{2k\pi}{7} + y\sin\frac{2k\pi}{7},\ -x\sin\frac{2k\pi}{7} + y\cos\frac{2k\pi}{7},\ z\right) =$$

$$= \frac{r^2 - \left(x\cos\frac{2k\pi}{7} + y\sin\frac{2k\pi}{7} - a \right)^2 - z^2}{2r} \wedge_0$$

$$\wedge_0 \frac{\left(-x\sin\frac{2k\pi}{7} + y\cos\frac{2k\pi}{7} \right) h - \left(-x\sin\frac{2k\pi}{7} + y\cos\frac{2k\pi}{7} \right)^2}{h} = 0, \quad (k = 1,...6)$$

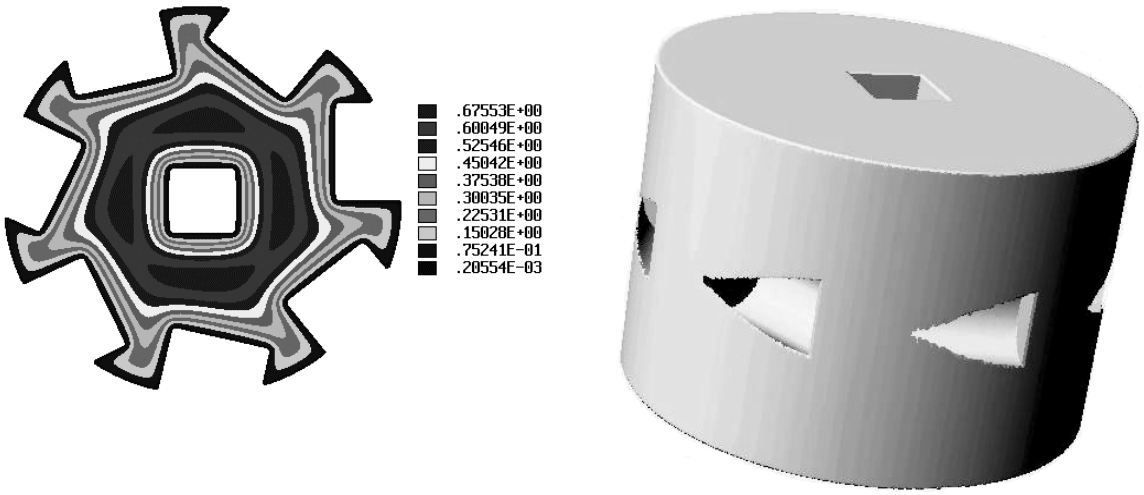
Общее уравнение поверхности семи выточек-цилиндров получаем по формуле (22) в виде

$$\omega_7(x,y,z) = \bigvee_{k=0}^{6} \omega_k(x,y,z) = 0 .$$

Остается лишь осуществить сборку рассматриваемого тела, определяемого уравнением $\omega_1(x,y,z) = 0$, с внешностью семи выточек-цилиндров, определяемой неравенством $\overline{\omega_7(x,y,z)} > 0$.

$$\omega(x,y,z) = \omega_1(x,y,z) \wedge_0 \overline{\omega_7(x,y,z)} = 0 .$$

На рис. 9 a представлена картина линий уровня функции $\omega(x,y,0)$, а на рис 9 b показано рассматриваемое тело в 3D, построенное с помощью системы визуализации "Ранок" [4, 6, 7].



a) b)

Рис. 9

3. СИММЕТРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ

Предположим, что уравнение $\omega(x,y,z) = 0$ есть уравнение чертежа *L* (рис. 10), обладающего симметрией относительно точки $A_0(x_0, y_0, z_0)$.

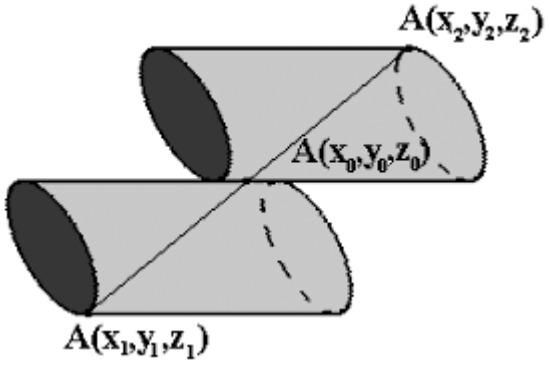


Рис. 10

Пусть $A_1(x_1, y_1, z_1)$ – произвольная точка чертежа, а $A_2(x_2, y_2, z_2)$ – симметричная ей точка относительно точки $A_0(x_0, y_0, z_0)$. Тогда легко получить, что

$$\begin{cases} x_2 = 2x_0 - x_1 \\ y_2 = 2y_0 - y_1 \\ z_2 = 2z_0 - z_1 \end{cases} \tag{24}$$

Таким образом, для чертежа, обладающего симметрией относительно точки $A_0(x_0, y_0, z_0)$, получаем равенство

$$\omega(x, y, z) = \omega(2x_0 - x,\ 2y_0 - y,\ 2z_0 - z). \tag{25}$$

В частности, если центром симметрии является начало координат, то

$$\omega(x, y, z) = \omega(-x,\ -y,\ -z). \tag{26}$$

Чертеж, симметричный относительно точки $A_0(x_0, y_0, z_0)$, вполне определяется заданием какой-либо из ее симметричных частей. Пусть $\omega_1(x, y, z) = 0$ есть уравнение этой части. Тогда уравнение симметричной части имеет вид

$$\omega_2(x, y) = \omega_1(2x_0 - x,\ 2y_0 - y,\ 2z_0 - z) = 0. \tag{27}$$

Предположим, что $\omega_1(x, y, z) > 0$ определяет область, для которой $\omega_1(x, y, z) = 0$ есть ее граница. Тогда уравнение симметричного относительно точки $A_0(x_0, y_0, z_0)$ чертежа получим в виде

$$\omega(x, y, z) \equiv \omega_1(x, y, z) \vee_* \omega_2(x, y, z) = 0 \tag{28}$$

Если $\omega_1(x, y, z)$ является нормализованной, а R-дизъюнкция $\vee_*$ обладает свойством сохранять нормализованность, то уравнение (28) также является нормализованным.

Замечание 4. Если чертеж L_1 есть граница области Ω_1, содержащей центр симметрии $A_0(x_0, y_0, z_0)$, то замена в формуле (28) R-дизъюнкции на R-конъюнкцию приведет к уравнению

$$\omega(x, y, z) \equiv \omega_1(x, y, z) \wedge_* \omega_2(x, y, z) \ = 0, \tag{29}$$

которое также будет уравнением симметричного относительно центра $A_0(x_0, y_0, z_0)$ чертежа.

Нетрудно заметить, что рассуждения, которые привели к формуле (7), можно провести и в данном случае. Так, вместо формулы (7) для пучка функций с центром симметрии $A_0(x_0, y_0, z_0)$ получим:

$$u(x, y, z) = \Phi(x, y, z) * \Phi(2x_0 - x,\ 2y_0 - y,\ 2z_0 - z), \tag{30}$$

Аналогично для пучка полиномов степени n, обладающих симметрией относительно центра $A_0(x_0, y_0, z_0)$,

$$u(x,y,z) = \sum_{i+j+k=0}^{n} c_{ijk}\left[x^i y^j z^k + (2x_0 - x)^i (2y_0 - y)^j (2z_0 - z)^k\right]. \tag{31}$$

4. СИММЕТРИЯ ТРАНСЛЯЦИОННОГО ТИПА

Считают, что чертеж L обладает симметрией трансляционного типа в направлении некоторого вектора $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, если при преобразовании

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \tag{32}$$

он переходит сам в себя. Легко привести примеры, когда чертеж L обладает симметрией трансляционного типа в нескольких направлениях, определяемых векторами $\vec{a}^1, \ldots, \vec{a}^m$. Рассмотрим вопрос о построении уравнений чертежей, обладающих симметрией трансляционного типа. Вначале опишем общий подход, затем рассмотрим некоторые частные ситуации, допускающие возможность построения симметричных уравнений более простым путем.

Пусть $\Omega_0 = (\omega_0(x,y,z) \ge 0)$ – некоторая область, а $\vec{h}(h_1, h_2, h_3)$ – вектор. Тогда $\Omega_1 = (\omega_1(x - h_1, y - h_2, z - h_3) \ge 0)$ – область, полученная сдвигом точек области Ω_0 в направлении вектора $\vec{h}$ на величину $|\vec{h}|$. Задача состоит в том, чтобы написать уравнение разницы области

$$\Omega \equiv \bigcup_{k=-\infty}^{k=+\infty} (\omega(x - h_1, y - h_2, z - h_3) \ge 0), \tag{33}$$

которая, очевидно, обладает симметрией трансляционного типа в направлении вектора $\vec{h}$, но на практике не реализуема.

Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что вектор $\vec{h}$ имеет направление оси Ox. Предположим, что область Ω_0 может быть заключена в область ("слой") $-a \le x \le a$, и обладает симметрией относительно плоскости $x = 0$, то есть $\omega(x,y,z) \equiv \omega(-x,y,z)$. Тогда область Ω заключена в область, определяемую неравенством

$$\frac{h}{2\pi \sin\frac{2\pi a}{h}}\left(\cos\frac{2\pi x}{h} - \cos\frac{2\pi a}{h}\right) \ge 0. \tag{34}$$

Введем вспомогательную функцию [1]

$$\tau_n(x,q) \equiv \left[\frac{\cos\frac{2\pi x}{h} - \cos\frac{2\pi a}{h} + \left|\cos\frac{2\pi x}{h} - \cos\frac{2\pi a}{h}\right|}{2\left(1 - \cos\frac{2\pi q}{h}\right)}\right]^{n+1}. \tag{35}$$

Нетрудно убедиться в том, что эта функция дифференцируема до n-го порядка, тождественно равна нулю на интервалах $(k-1)h + q \le x \le kh - q$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ и равна единице в точках $x = kh$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Кроме того, эта функция является неотрицательной, на интервалах $kh \le x \le kh + q$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ монотонно убывает, а на интервалах $kh - q \le x \le kh$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ монотонно возрастает. Тогда функция

$$\mu_n(x,a,h) \equiv \frac{h}{\pi}\arcsin\frac{\sin\frac{\pi x}{h}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a\pi}{2h}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a\pi}{2h}\right)+\left(1-\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a\pi}{2h}\right)\right)\tau_n\left(x-\frac{h}{2},\frac{h}{2}-a\right)} \qquad (36)$$

также n раз дифференцируема, на интервалах $kh-a \le x \le kh+a,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ принимает значения $(-1)^k(x-kh)$ (то есть является линейной), а ее модуль достигает максимума, равного $\frac{1}{4}(h+2a)$, в точках $kh+\frac{h}{2}$ (рис. 11).

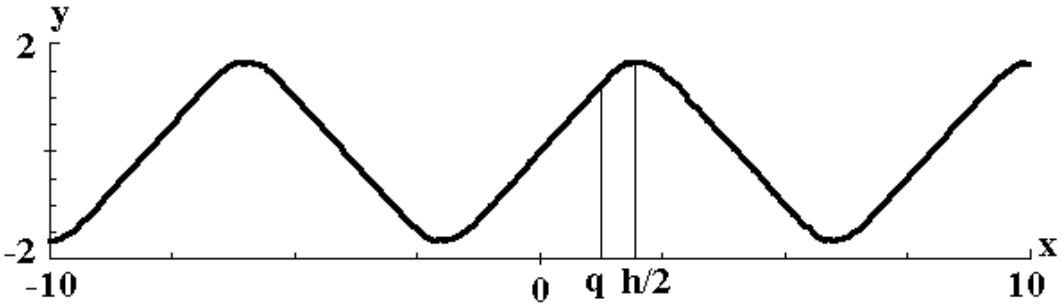


Рис. 11

Теорема [1]. Уравнение

$$\omega \equiv \omega_0\left[\mu_n(x,a,h),y,z\right]=0 \qquad (37)$$

является уравнением границы $\partial\Omega$ рассматриваемой области Ω (33).

Доказательство. На интервале $kh-a \le x \le kh+a$ уравнение (37) принимает вид

$$\omega_0\left[(-1)^k(x-hk),y,z\right]=0\,. \qquad (38)$$

Поскольку по предположению функция ω_0 является четной по *x,* то его можно переписать в виде

$$\omega_0(x-hk,y,z)=0\,. \qquad (39)$$

Легко видеть, что оно является уравнением границы Ω_k, $k=0,\pm1,\pm2\ldots$. Вне интервалов $kh-a \le x \le kh+a$ это уравнение не имеет нулей, поскольку по предположению уравнение $\omega_0(x,y,z)=0$ определяет чертеж, лежащий на полосе $-a \le x \le a$.

При этом, если уравнение $\omega_0(x,y,z)=0$ является нормализованным, то нормализованным оказывается и уравнение (38). Это следует из того, что не только сама область Ω обладает симметрией трансляционного типа в направлении оси Ox с шагом h, но такой же симметрией обладает построенная функция $\omega(x,y,z)$, которая в точках слоя $-a \le x \le a$ тождественно равняется функции $\omega_0(x,y,z)$, а, следовательно, имеет те же самые производные по нормали к границе.

Пример 7. Пусть $\omega_0 \equiv \left(\frac{R^2-x^2-y^2}{2R}\wedge_0\frac{x^2+y^2-r^2}{2r}\right)\ge 0$. Тогда уравнение $\omega(x,y)=\left(\frac{R^2-\mu_2{}^2(x,a,h)-y^2}{2R}\wedge_0\frac{\mu_2{}^2(x,a,h)+y^2-r^2}{2r}\right)=0$ будет уравнением бесконечных областей (рис.12), соответствующим наборам параметров: $R=1.4; r=0.5; a=1, h=4$.

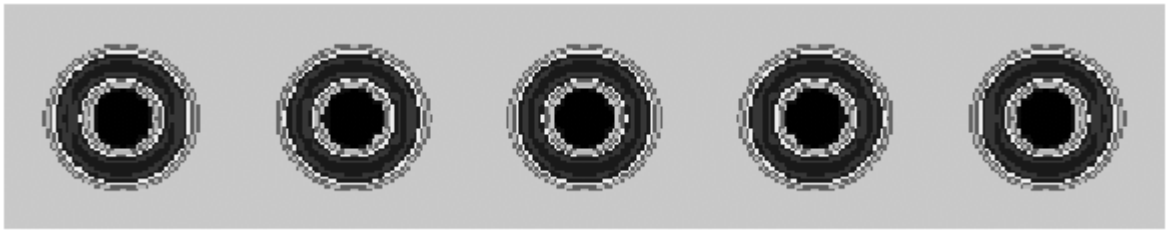


Рис. 12

При доказательстве теоремы предполагалась четность функции $\omega_0(x,y,z)$ относительно x. Если это условие нарушено, то уравнение (37) будет уравнением границы области, которая получается трансляцией опорной области с шагом, кратным k, с одновременным ее зеркальным отражением в некоторой плоскости, перпендикулярной оси Ox.

Пример 8. Пусть $\omega_0 \equiv \left(\dfrac{R^2 - x^2 - y^2}{2R} \wedge_0 \dfrac{(x-c)^2 + y^2 - r^2}{2r} \right) \geq 0$ определяет серповидную область Ω_0, полученную в результате исключения из круга радиуса R, смещенного по оси Ox на величину c круга радиуса r. Тогда уравнение

$$\omega(x,y) = \left(\frac{R^2 - \mu_2{}^2(x,a,h) - y^2}{2R} \wedge_0 \frac{\left(\mu_2(x,a,h) - c\right)^2 + y^2 - r^2}{2r} \right) = 0$$

будет уравнением бесконечных областей (рис. 13 а), соответствующих наборам параметров: $R = 1.4; r = 0.5; a = 1, h = 4, c = 1$.

Предположим, что нам необходимо исключить зеркальные образы данной области, поставив на их место оригинал. Для этого возьмем систему полос, определяемую неравенствами

$$\Sigma \equiv \left(-\cos\frac{\pi x}{h} - \cos\frac{\pi a}{h} \geq 0 \right). \qquad (40)$$



a)



b)



c)

Рис. 13

Очевидно, что эта система полос накрывает все зеркальные отражения исходной области Ω. Следовательно, уравнение границы области (рис. 13 b), из которой исключены зеркальные отражения, можно написать в виде

$$\omega_\Sigma = \omega_0 \left[\mu_n(x,a,h),y\right]_\wedge^* \left(-\cos\frac{\pi x}{h} - \cos\frac{\pi a}{h}\right) = 0 \qquad (41)$$

Теперь уравнение границы области Ω, полученной путем трансляции исходной области Ω_0 с шагом h в направлении оси Ox (рис. 13 c), можно записать следующим образом

$$\omega(x,y) \equiv \omega_\Sigma(x,y) \bigvee_0 \omega_\Sigma(x-h,y) = 0\,. \qquad (42)$$

Итак, решен вопрос о построении уравнения границы произвольной области, которая обладает симметрией трансляции в направлении оси и может быть заключена в периодически повторяющуюся систему полос, перпендикулярных этой оси.

Последнее ограничение несущественно, так как области более общего вида (например, рис. 2 b) можно получить путем логических операций над областями трансляционного типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наукова думка, 1982.– 566 с.
2. Рвачев В.Л., Шейко Т.И., Шапиро В.. Метод R-функций (RFM) в краевых задачах с геометрической и физической симметрией // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 1998.– 41, №1.– С. 146-159.
3. Рвачев В. Л., Шапиро В., Шейко Т. И. Применение метода R-функций к построению уравнений локусов, обладающих симметрией // Электромагнитные волны & электронные системы. – 1999.-Т.4.-№4.
4. Рвачев В.Л., Толок А.В., Уваров Р.А., Шейко Т.И. Новые подходы к построению уравнений трехмерных локусов с помощью R-функций // Вісник Запорізького державного університету.– 2000.– №2.– С. 119–131.
5. Рвачев В.Л., Синекоп Н.С. Метод R-функций в задачах теории упругости и пластичности. – Киев: Наукова думка, 1990.– 216 с.
6. Толок А.В. Образный анализ в интеллектуальных системах // Искусственный интеллект.– 2000.– №3.– С. 558–565.
7. Гладкий Б.М., Толок А.В. Применение алгоритма частичной сортировки по глубине к визуализации функций трех переменных // Вісник Запорізького державного університету.– 1999.– №2.– С. 28–35.