УДК 515.2

ГЕОМЕТРИЧНЕ КОНСТРУЮВАННЯ ТРИВИМІРНИХ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ СИРЕНДИПОВОЇ СІМ'Ї

Манойленко О.С., аспірант

Херсонський державний технічний університет

Традиційний підхід до побудови базисних функцій у методі скінченних елементів приводить до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно параметрів, що визначають інтерполяційний поліном, і подальшому визначенню пробних функцій. Цей підхід спряжено з певними обчислювальними функціями і вимагає великих витрат машинного часу. Розроблено новий геометричний підхід до побудови базисних функцій, який дає можливість отримання нових альтернативних моделей. У роботі показана методика геометричного моделювання тривимірних скінченних елементів сирендипової сім'ї на кубі.

Ключові слова: геометричне моделювання, скінченні елементи, інтерполяція, дискретні методи, відновлення функцій.

Манойленко Е.С. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СИРЕНДИПОВА СЕМЕЙСТВА / Херсонский государственный технический университет, Украина

Традиционный подход к построению базисных функций в методе конечных элементов сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно параметров, определяющих интерполяционный полином, и к дальнейшему определению пробных функций. Этот подход сопряжен с определенными вычислительными трудностями и требует больших затрат машинного времени. Разработан новый геометрический подход к построению базисных функций, который дает возможность получения новых альтернативных моделей. В работе показана методика геометрического моделирования трехмерных конечных элементов сирендипова семейства на кубе.

Ключевые слова: геометрическое моделирование, конечные элементы, интерполяция, дискретные методы, восстановление функций

Manoilenko E.S. GEOMETRIC CONSTRUCTION OF THE TREE-DIMENSIONAL FINITE ELEMENTS OF THE SERENDIP FAMILY / Kherson state technical university, Ukraine

The traditional approach to the basal functions construction in the finite element method reduces to the solution of linear algebraic equations system relative to the parameters assigned the interpolar polynome, and to the further trial function estimation. This approach conjugates with the certain calculating difficulties and demands big expenditures of machine time. The new geometric approach to the basal functions construction is developed which gives the possibility to obtain the new alternative models. The geometric modeling methods of the tree-dimensional finite elements of the serendip family on the cube are shown in the work.

Key words: Geometrical modeling, finite elements, interpolation, discrete methods, restoration of functions

При побудові базису в методі скінченних елементів традиційно використовується апарат лінійної алгебри, який приводить до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь відносно параметрів, що визначають інтерполяційний поліном. Задача побудови базису, наприклад, для 44-х вузлового скінченного елемента сирендипової сім'ї вимагає побудови і розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь 44 порядку. Розв'язання цієї системи приводить тільки до єдиного розв'язку і можливості отримати єдину систему базисних функцій [1,2]. Новий підхід до моделювання сирендипових скінченних елементів та конструювання базисних функцій грунтується на геометричних уявленнях і дає можливість отримання нових альтернативних моделей на тому ж самому скінченному елементі. Тривимірні елементи дозволяють отримати розв'язки задач загальної тривимірної теорії пружності, наприклад, розрахунки масивних бетонних конструкцій гребель, розрахунки напруги в породах, розв'язки задач механіки для ґрунтів і скельних порід, чисельне визначення напруги у фланцях та сполученнях товстостінних труб [3].

У роботі на тривимірному скінченному елементі сирендипової сім'ї з 44-а вузлами побудовано шість моделей, у яких використані композиції площин та поверхонь. Розглянемо базисні функції та геометричні композиції для моделі з паралельними площинами (модель друга).

При побудові N_1 використана композиція з площин $\xi - 1 = 0,\quad \eta - 1 = 0,\quad \zeta - 1 = 0,$ $2\xi + 2\eta + 2\zeta + 5 = 0,\quad \xi + \eta + \zeta + 2 = 0,\quad 2\xi + 2\eta + 2\zeta + 3 = 0.$

Базисна функція для кутових вузлів має такий вигляд (рис. 1, де $|\xi| \le 1,\quad |\eta| \le 1,\quad |\zeta| \le 1$):

$$N_i = -\frac{1}{24}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta)(-2\xi_i\xi - 2\eta_i\eta - 2\zeta_i\zeta + 5)\times$$
$$\times(-\xi_i\xi - \eta_i\eta - \zeta_i\zeta + 2)(-2\xi_i\xi - 2\eta_i\eta - 2\zeta_i\zeta + 3)$$
$$\xi_i, \eta_i, \zeta_i = \pm 1, \quad i = 1,5,9,13,17,21,25,29.$$

При побудові N_2 використана композиція з площин $\xi - 1 = 0,\ \xi + 1 = 0,\ \eta - 1 = 0,\ \zeta - 1 = 0,$ $2\xi - \zeta - 1 = 0,\ 2\xi - 2\eta + \zeta - 2 = 0.$ Базисна функція для проміжних вузлів має вигляд (рис. 2):

$$N_i = \frac{1}{6}(1-\xi^2)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta)(-4\xi_i\xi + \zeta_i\zeta - 1)(-4\xi_i\xi + 2\eta_i\eta - \zeta_i\zeta - 2)$$
$$\xi_i = \pm\frac{1}{2}, \eta_i, \zeta_i = \pm 1, \quad i = 2,4,10,12,18,20,26,28. \tag{1}$$

Щоб отримати базисні функції для вузлів 6,8,14,16,22,24,30,32, треба у формулі (1) зробити перестановку ξ та η. Щоб отримати базисні функції для вузлів 33,35,36,38,39,41,42,44, треба у формулі (1) зробити перестановку ξ та ζ.

При побудові базисної функції для вузла 3 використана композиція з площин $\xi - 1 = 0,\ \xi + 1 = 0,$

$$\eta - 1 = 0,\ \zeta - 1 = 0,\ \xi + \frac{1}{2} = 0,\ \xi - \frac{1}{2} = 0.$$

Базисна функція для вузлів у середині ребра має вигляд (рис. 3):

$$N_i = \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta)(1-4\xi^2)$$
$$\eta_i, \zeta_i = \pm 1, \quad i = 3,11,19,27. \tag{2}$$

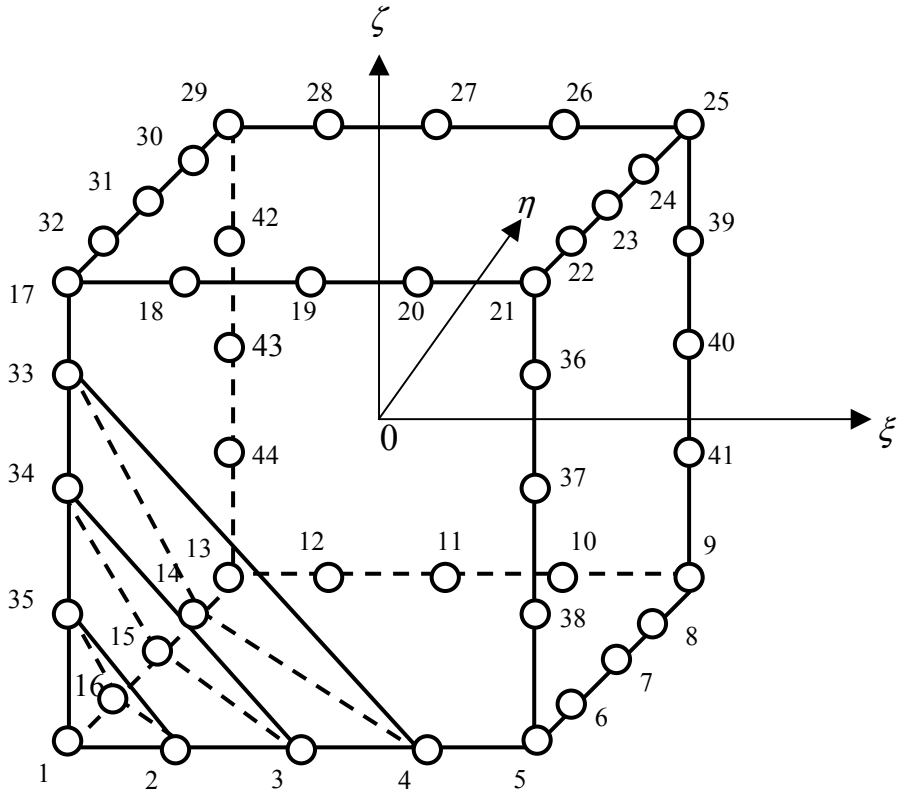

Рис. 1 До геометричної побудови базисної функції для 1 вузла тривимірного елемента

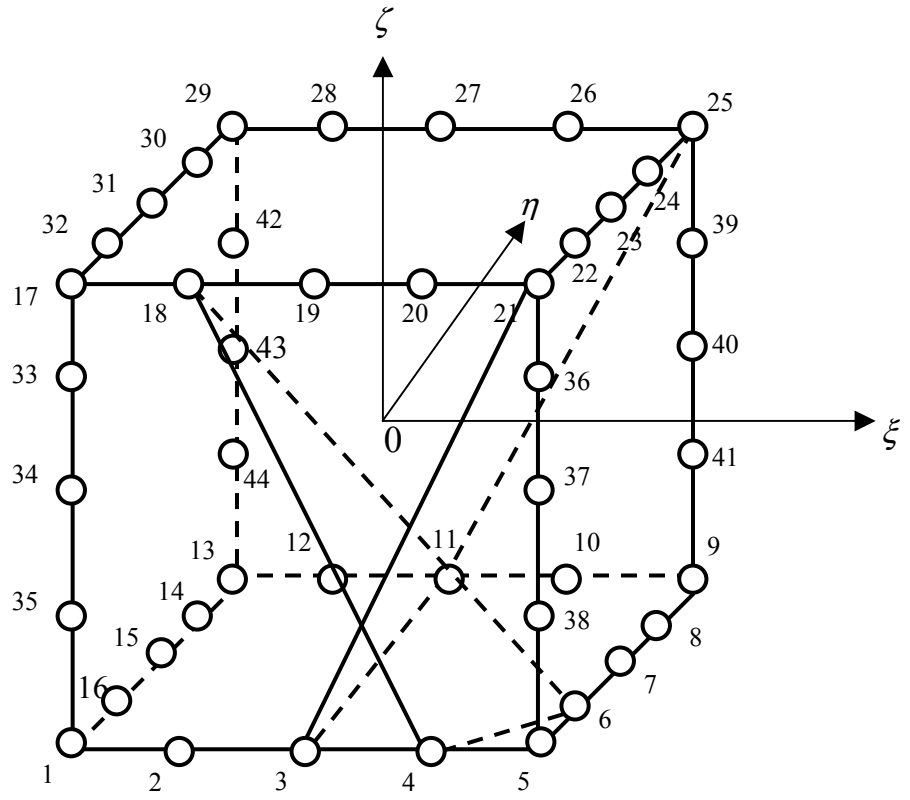

Рис. 2 До геометричної побудови базисної функції для 2 вузла тривимірного елемента

Щоб отримати базисні функції для вузлів 7,15,23,31, треба у формулі (2) зробити перестановку ξ та η. Щоб отримати базисні функції для вузлів 34,37,40,43, треба у формулі (2) зробити перестановку ξ та ζ.

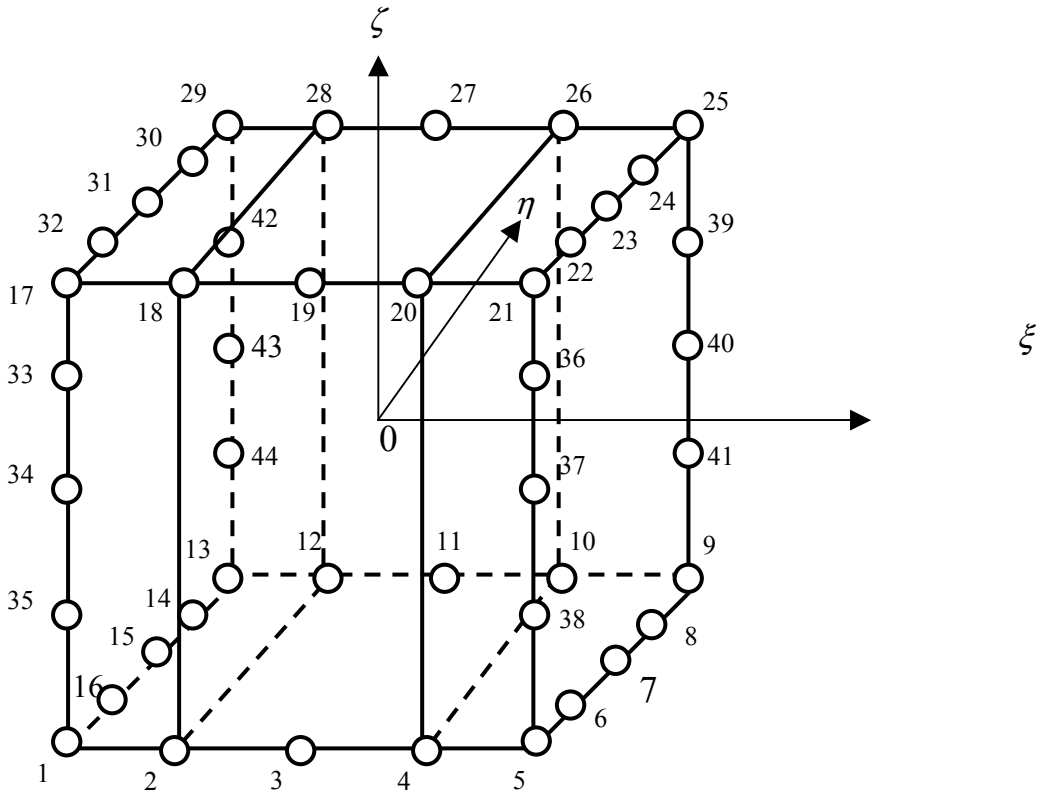

Рис. 3 До геометричної побудови базисної функції для 3 вузла тривимірного елемента

Ці функції задовольняють основним умовам:
- базисна функція дорівнює одиниці в однойменному вузлі і обертається в нуль в інших вузлах;
- сума базисних функцій на елементі дорівнює одиниці.

Існування альтернативних базисів на одному елементі відкриває нові можливості для розв'язання задачі оптимізації інтерполяційних якостей дискретної моделі. Оптимізація досягається "зважуванням" альтернативних базисів за формулою:

$$N_i^{(k)} = (1-\alpha)N_i^{(m)} + \alpha N_i^{(s)},$$

де $\{N_i^{(k)}\}$, $\{N_i^{(m)}\}$, $\{N_i^{(s)}\}$ - різноманітні базиси елемента, α - ваговий коефіцієнт $(0 \le \alpha \le 1)$.

Отримані моделі пройшли тест, який пов'язано з обчисленням спектра вузлових навантажень рівномірної масової сили. Вузлові долі навантаження визначаються подвійним інтегралом по області ϖ скінченного елемента від відповідної базисної функції, яка зважена з поверхневою щільністю γ:

$$P_i = \iint\limits_{\varpi} \gamma N_i(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta \qquad i = 1,...44, \gamma = 0{,}125. \tag{3}$$

У задачах теплопровідності інтеграли типу (3) дають вузлові долі тепла внутрішнього джерела, що генеруються у скінченному елементі. Існують інші інтерпретації даного тесту.

Результати тесту для шести побудованих моделей показані в таблиці 1.

Кожна побудована модель у тривимірному просторі має від'ємні вузлові навантаження. Такий розподіл є фізично абсурдним, або, як зазначив Зенкевич, "протиприродним" [4]. Але в практичних розрахунках ці моделі дають цілком прийнятні результати.

Таблиця 1 - Спектр вузлових параметрів різних моделей скінченних елементів.

Модель	Значення P_i для вузлів у кутах куба	Значення P_i для проміжних вузлівна ребрах куба	Значення P_i для вузлів на серединах ребер куба
Перша	273/1080	-64/1080	36/1080
Друга	-1581/3240	608/3240	108/3240
Третя	-1581/3240	608/3240	108/3240
Четверта	-381/3240	208/3240	108/3240
П'ята	-381/3240	208/3240	108/3240
Шоста	-381/3240	208/3240	108/3240

Для порівняння властивостей побудованих моделей було знайдено стаціонарний розподіл температури в кубі. Спочатку ця задача розв'язується за допомогою нанесення решітки на область, яка досліджується. Для знаходження температури у 27 внутрішніх вузлах куба (рис.4) необхідно: скласти та розв'язати 6 систем лінійних алгебраїчних рівнянь 9x9 і знайти температуру у внутрішніх вузлах на кожній грані, використовуючи знайдену температуру, скласти та розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь 27x27, що приведе нас до шуканого результату.

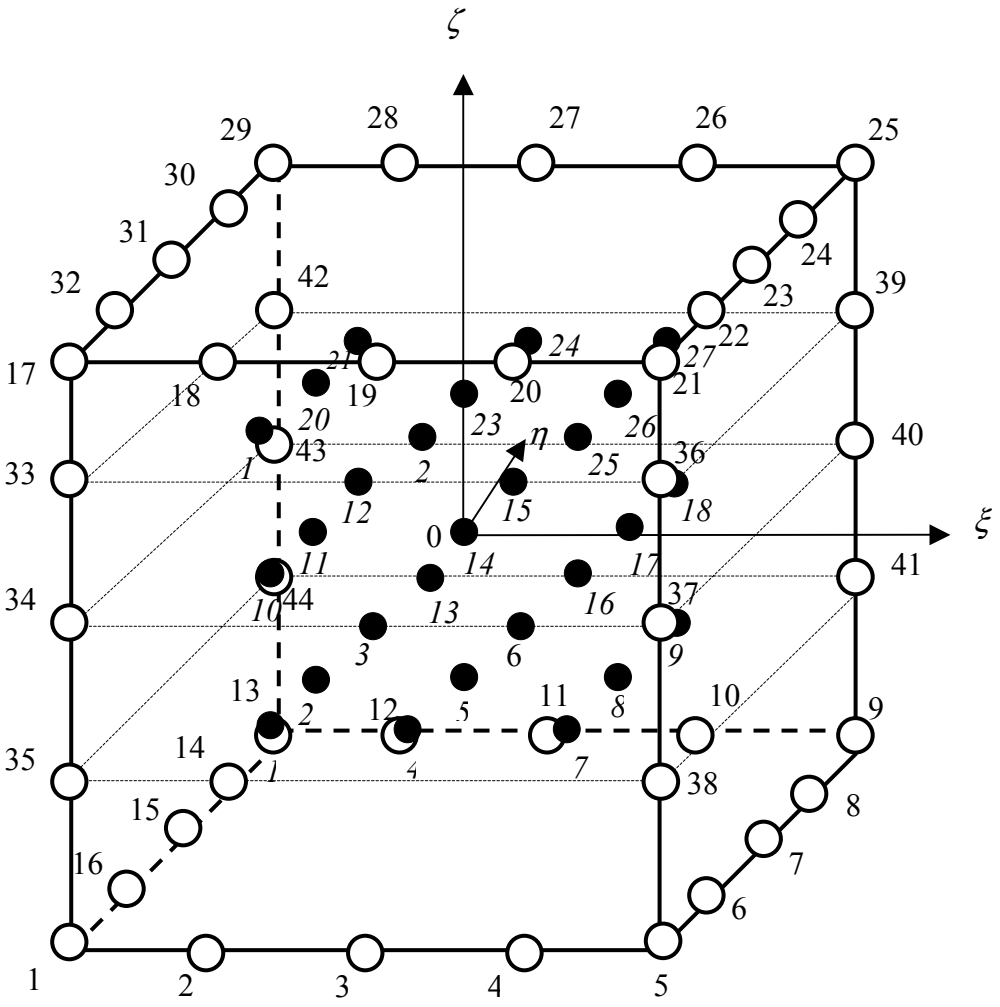

Рис 4. До дослідження температурного поля куба

Кожна з отриманих систем лінійних алгебраїчних рівнянь розв'язувалась методом послідовного виключення невідомих (метод Гаусса). Розв'язок, отриманий методом Лібмана, досягається за 29 ітерацій. Помітимо, що ітераційний метод Лібмана потребує завдання початкового наближення, яке може бути отримано, наприклад, за допомогою лінійної інтерполяції. Вибір початкового наближення потребує певних навичок, урахування особливостей задачі і, крім того, не вільний від похибок.
Значний виграш у часі порівняно з перерахованими методами дає така формула:

$$T(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{i=1}^{44} T_i N_i(\xi,\eta,\zeta), \qquad (4)$$

де T_i -значення температури в граничних вузлах,

$N_i(\xi,\eta,\zeta)$ -базисні функції обраної моделі.

При використанні скінченно-різницевих методів температура визначається в результаті розв'язання великих систем лінійних алгебраїчних рівнянь тільки у вузлах нанесеної сітки. Обчислення температури в будь-якій точці міжвузлового простору вимагає застосування додатково процедури інтерполяції. Обчислення за формулою (4) виключають необхідність застосування вище перерахованих процедур і дають температуру в довільній точці області. Аналіз результатів показує, що нефізичні осциляції в деяких моделей приводять до заниження температури в одних вузлах і до перебільшення - в інших. Цілком прийнятні результати дає шоста модель скінченного елемента сирендипової сім'ї (модель з еліпсоїдом).

Таблиця 2 - Значення температури у граничних вузлах куба.

№ вузла	Значення T	№ вузла	Значення T	№ вузла	Значення T	№ вузла	Значення T
1	**0**	12	**100**	23	**50**	34	**0**
2	**0**	13	**100**	24	**75**	35	**0**
3	**0**	14	**75**	25	**100**	36	**0**
4	**0**	15	**50**	26	**100**	37	**0**
5	**0**	16	**25**	27	**100**	38	**0**
6	**25**	17	**0**	28	**100**	39	**100**
7	**50**	18	**0**	29	**100**	40	**100**
8	**75**	19	**0**	30	**75**	41	**100**
9	**100**	20	**0**	31	**50**	42	**100**
10	**100**	21	**0**	32	**25**	43	**100**
11	**100**	22	**25**	33	**0**	44	**100**

У відповідності до граничних умов температура змінюється шарами за лінійним законом. У результаті використання метода скінченних різниць (МСР) та метода Лібмана ми отримаємо результати, що збігаються з результатами, отриманими за допомогою формули (4). Середнє квадратичне відхилення, яке обчислювалося за допомогою формули:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{n=1}^{27}(T - T^*)^2},$$

де T – точне значення вузлових температур (табл.2),

T^* – вузлові температури, обчислені за формулою (4), дорівнює нулю.

На відміну від граничних вузлів внутрішні вузли позначаються курсивом.

Таблиця 3. - Результати чисельного дослідження температурного поля куба.

№ внутрішнього вузла	Значення T	№ внутрішнього вузла	Значення T	№ внутрішнього вузла	Значення T
1	**25**	*10*	**25**	*19*	**25**
2	**50**	*11*	**50**	*20*	**50**
3	**75**	*12*	**75**	*21*	**75**
4	**25**	*13*	**25**	*22*	**25**
5	**50**	*14*	**50**	*23*	**50**
6	**75**	*15*	**75**	*24*	**75**
7	**25**	*16*	**25**	*25*	**25**
8	**50**	*17*	**50**	*26*	**50**
9	**75**	*18*	**75**	*27*	**75**

При більш складних граничних умовах (наприклад, нелінійних) виникають незначні відхилення наближеного розв'язку, але для експрес досліджень отримані моделі дають цілком прийнятні результати.

ЛІТЕРАТУРА

1. Литвиненко Е.И., Хомченко А.Н. Геометрическое моделирование трехмерных сирендиповых КЭ // Прикл. геом. и инж. графика. – Мелитополь: ТГАТА. – 1997. – Вып. 4.- Т. 1. – С. 40-42.
2. Гучек П.И., Литвиненко Е.И., Буба М.С., Хомченко А.Н. Моделирование конечных элементов сирендипова семейства для исследования температурных полей // Проблеми пожежної безпеки.-К.: МВС України. – 1995.С. 75-77.
3. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. - М.: Мир, 1984. - 428 с.
4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. - М.: Мир, 1975. - 541 с.