УДК 539.3

ПЛОСКА ДЕФОРМАЦІЯ БАГАТОШАРОВИХ ОСНОВ З ТРІЩИНАМИ В ШАРАХ

Зіновєєв І.В., ст. викладач

Запорізький державний університет

Приведено схему розв'язку першої основної граничної задачі плоскої теорії пружності для багатошарових основ, які містять в одному із шарів криволінійну тріщину, на берегах якої відомі нормальні і дотичні напруження. Отриманий у виді невласних інтегралів Фур'є розв'язок, будується на основі методу функцій піддатливості і методу розривних зсувів.

Ключові слова: плоска деформація, багатошарова основа, шар, межова задача, тріщина, пружна площина, напруження, переміщення, трансформанта Фур'є, метод функцій піддатливості, метод розривних переміщень.

Зиновеев И.В. ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ОСНОВАНИЙ С ТРЕЩИНАМИ В СЛОЯХ / Запорожский государственный университет, Украина

Приведена схема решения первой основной граничной задачи плоской теории упругости для многослойных оснований содержащих в одном из слоев криволинейную трещину, на берегах которой известны нормальные и касательные напряжения. Полученное в виде несобственных интегралов Фурье решение, строится на основе метода функций податливости и метода разрывных смещений.

Ключевые слова: плоская деформация, многослойное основание, слой, граничная задача, трещина, упругая плоскость, напряжения, перемещения, трансформанта Фурье, метод функций податливости, метод разрывных перемещений.

Zinoveyev I.V. THE PLANE DEFORMATION OF THE MULTILAYER BASIS WITH CRACKS IN LAYERS / Zaporozhye state university, Ukraine

The scheme of the solution of the first basic boundary problem of a plane theory of elastic strength for the multiplayer basis keeping in one of layers a curvilinear crack is adduced, on beaches for which one are known normal and shearing stresses. Obtained by the way of improper integrals of the Fourier the solution, is under construction on the basis of a method of functions of a compliance and method of burst displacement.

Key words: plane deformation, multilayer basis, layer, boundary problem, crack, elastic plane, stresses, displacement, transformant Fourier, method of functions of a compliance, method of burst displacement.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається n-шарова пружна основа, з ізотропними плоскопаралельними шарами, яка в одному з шарів має криволінійну тріщину, на берегах якої відомі нормальні та дотичні напруження. На верхній межі основи відомі нормальні та дотичні напруження. Усі шари в основі зчеплені. На нижній межі основи виконуються умови зчеплення з півпростором (пружним, або абсолютно жорстким). Необхідно визначити напруження та переміщення в будь-якій точці основи, за умови, що деформація основи плоска.

Нумерація шарів проводиться з верху вниз, починаючи з одиниці, півпросторові надамо номер n+1. Кожний шар віднесемо до місцевої прямокутної декартової системи координат з початком на верхній межі шару (рис.1). Величини, що відповідають k-му шару основи, будемо позначати нижнім індексом k (ν_k коефіцієнт Пуассона, E_k - модуль Юнга, h_k - товщина шару). Вважаємо, що тріщина знаходиться в m-му шарі (1<m<n).

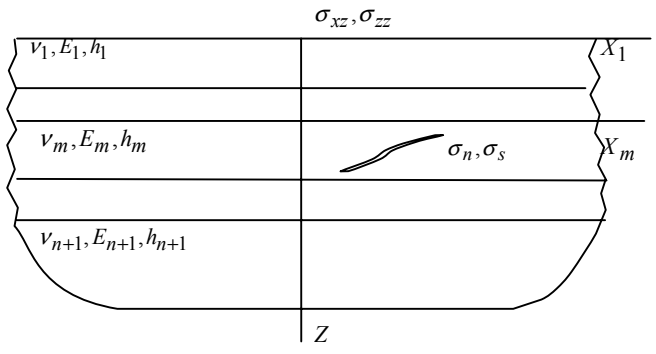


Рис. 1. Багатошарова основа з криволінійною тріщиною в шарі.

У термінах робіт [1,5] багатошарова основа, що розглядається, відноситься до основ складної структури, тому для її розв'язання можна застосувати схему розв'язку, запропоновану в роботах [1,2,3]. За цією схемою розв'язок задачі про визначення напружено-деформівного стану m-го шару основи може бути визначений як сума розв'язків двох допоміжних задач. Перша допоміжна задача (величини, що характеризують напружений стан позначаємо верхнім індексом 0) - задача для пружної площини, яка містить таку ж саму тріщину, що і шар з номером *m* багатошарової основи і має пружні характеристики ν_m, E_m цього шару. Друга допоміжна задача (величини, що характеризують напружений стан, позначаємо верхнім індексом 1) – задача для багатошарової основи без тріщини, на межах якої виконуються умови

$$u^1_{s_{m-1}}(x,h_{m-1}) = u^1_{s_m}(x,0) + u^0_{s_m}(x,0),\ \ \sigma^1_{zs_{m-1}}(x,h_{m-1}) = \sigma^1_{zs_m}(x,0) + \sigma^0_{zs_m}(x,0),$$

$$u^1_{s_m}(x,h_m) + u^0_{s_m}(x,h_m) = u^1_{s_{m+1}}(x,0),\ \ \sigma^1_{zs_m}(x,h_m) + \sigma^0_{zs_m}(x,h_m) = \sigma^1_{zs_{m+1}}(x,0),$$

$$u^1_{s_k}(x,h_k) = u^1_{s_{k+1}}(x,0),\ \sigma^1_{zs_k}(x,h_k) = \sigma^1_{zs_{k+1}}(x,0),\ \ k \neq m, m-1,\ s = x,z\,. \qquad (1)$$

Суперпозиція цих розв'язків забезпечує розв'язок поставленої задачі.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ПЕРШОЇ ДОПОМІЖНОЇ ЗАДАЧІ

Розглянемо нескінченну пружну площину, пружні характеристики якої збігаються з відповідними характеристиками *m*-го шару основи, і яку віднесемо до допоміжної правої системи координат з осями X,Y (рис.2). Площина містить криволінійну тріщину у вигляді гладкого розімкненого контуру L: $x = \xi(s),\ y = \eta(s),\ 0 \le s \le l$, для обходу якого обирається додатній напрямок обходу. На берегах тріщини навантаження задано функціями дугової координати s контуру L. Необхідно визначити напружено-деформівний стан пружної площини, при умові, що на нескінченності напруження дорівнюють нулю.

З достатньою точністю тріщину можна представити набором N прямолінійних граничних елементів, що примикають один до одного. Місце положення та орієнтація цих елементів визначаються по відношенню до загальної системи координат OXY координатами центру елемента та кутом α між нормаллю до контуру L в центрі елемента і додатним напрямком осі OX. Під дією навантажень береги тріщини зміщуються відносно один одного, при цьому вважаємо, що рух берегів тріщини не обмежується, за винятком їх перекриття.

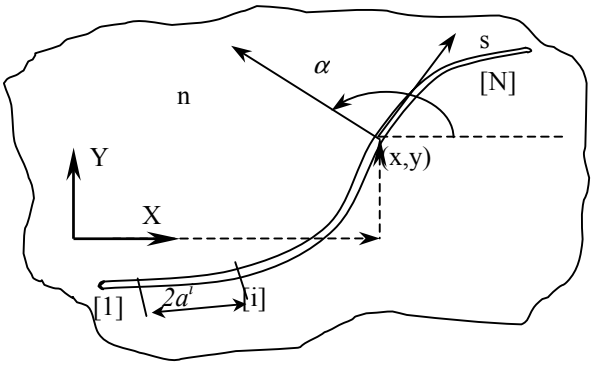


Рис. 2 Пружна площина з тріщиною.

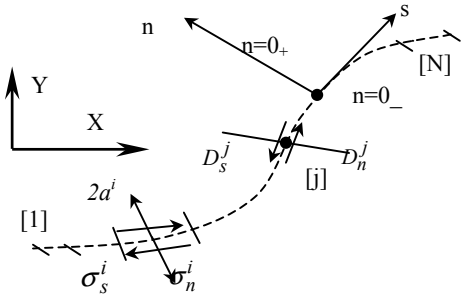


Рис.3 Математична модель тріщини.

Метод розривних переміщень [4] дозволяє знайти дискретне наближення до того розподілу відносних переміщень, що виникають в площині. Це дискретне наближення знаходиться по відношенню до N підобластей тріщини (граничних елементів). Кожний *i*-й граничний елемент характеризується елементарним розривом переміщень D^i, що визначається в локальних координатах *(n,s)* (рис.2). На рис.3 виділено елементарний розрив переміщення і-го відрізка тріщини.

Компоненти розривів у цьому елементі в напрямках *n* і *s* позначимо через D^i_n, D^i_s і визначаємо як

$$D^i_n = u^{-i}_n - u^{+i}_n\,,\quad D^i_s = u^{-i}_s - u^{+i}_s\,. \qquad (2)$$

Тут u_n^i, u_s^i - нормальне та дотичне переміщення і-го елемента тріщини. Індексами "+" і "–" позначені додатна і від'ємна поверхні тріщини по відношенню до локальної координати n. Локальні переміщення u_n^i, u_s^i додатні в додатних напрямках *n* і *s*, незалежно від поверхні тріщини.

Вплив окремого елементарного розриву переміщень на переміщення і напруження довільної точки пружної площини можна визначити, спираючись на розв'язок задачі про постійний розрив переміщень на скінченному відрізку площини (розв'язок Крауча [4]).

Якщо на берегах тріщини ($|x| \le a$, $y = 0$) при переході з одного берега на другий переміщення мають постійний розрив $D = (D_x, D_y)$ (рис.4а), то переміщення і напруження в довільній точці пружної площині визначаються виразами

$$u_x = D_x[\nu_1 f_x - y f_{xx}] - D_y[\nu_2 f_x + y f_{xy}],\ u_y = D_x[\nu_2 f_x - y f_{xy}] + D_y[\nu_1 f_y - y f_{yy}],$$

$$\sigma_{xx} = 2G\{D_x[2f_{xy} + y f_{xyy}] + D_y[f_{yy} + y f_{yyy}]\},\quad \frac{\sigma_{yy}}{2G} = -D_x y f_{xyy} + D_y[f_{yy} - y f_{yyy}],\quad \frac{\sigma_{xy}}{2G} = D_x[f_{yy} + y f_{yyy}] - D_y y f_{xyy} \qquad (3)$$

де

$$f(x,y) = -A\left[y\left(arctg(\frac{y}{x_1}) - arctg(\frac{y}{x_2}) \right) - x_1 \ln\sqrt{R_1} + x_2 \ln\sqrt{R_2} \right],\ f_\omega = \frac{\partial f}{\partial \omega},\ f_{\omega\theta} = \frac{\partial^2 f}{\partial\omega\partial\theta},$$

$$f_{\omega\theta\theta} = \frac{\partial^3 f}{\partial\theta^2\partial\omega},\ \omega,\theta = x, y,$$

$$A = \frac{1}{4\pi(1-\nu)},\ x_1 = x - a,\ x_2 = x + a,\ R_1 = x_1^2 + y^2,\ R_2 = x_2^2 + y^2, \qquad (4)$$

Враховуючи граничні значення для u_x, u_y, при $y = 0$ маємо

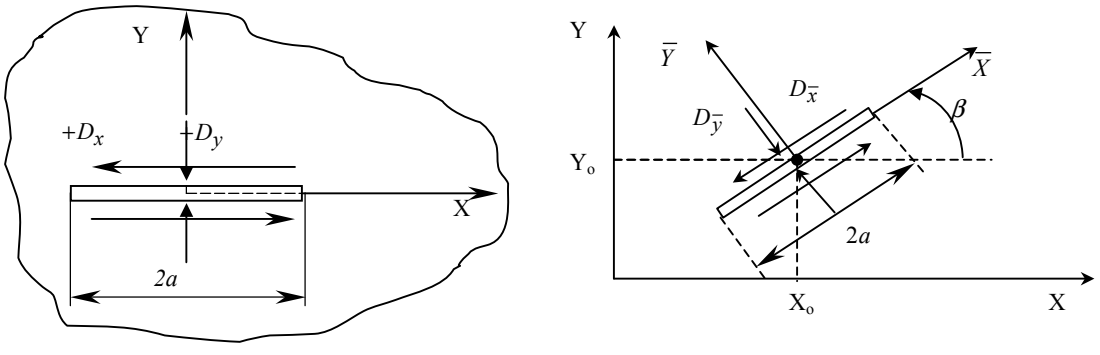
$$u_x(x,0) = -\tilde{A}_y, u_y(x,0) = \tilde{A}_x, |x| > a,\ y = 0_\pm,\ \tilde{A}_x = \nu_2^2 D_x A \ln\left|\frac{x_1}{x_2}\right|,\ \tilde{A}_y = \nu_2^2 D_y A \ln\left|\frac{x_1}{x_2}\right|.$$

$$u_x(x,0_+) = -\tilde{A}_y - D_x/2,\quad u_y(x,0_+) = \tilde{A}_x - D_y/2,\quad |x| < a,\ y = 0_+,$$

$$u_x(x,0_-) = -\tilde{A}_y + D_x/2,\quad u_y(x,0_-) = \tilde{A}_x + D_y/2,\quad |x| < a,\ y = 0_-, \qquad (5)$$

$$\sigma_{xx}(x,0) = \sigma_{yy}(x,0) = -4GaAD_y/R,\ \sigma_{xy}(x,0) = -4GaAD_x/R,\ R = x^2 - a^2 \qquad (6)$$

Напруження всюди на лінії $y = 0$ за виключенням точок $x = \pm a$ скінченні та неперервні і залежать тільки від компонент D_x, D_y. Для випадку довільно орієнтованої прямолінійної тріщини (рис.4б) напруження і переміщення



(а) (б)

Рис. 4. Довільно орієнтована прямолінійна тріщина

в локальній системі координат $\bar{x}, \bar{y}$ визначаються за формулами (5)-(6), у яких необхідно замінити x, y на $\bar{x}, \bar{y}$

$$\bar{x} = (x - x_o)\cos\beta + (y - y_o)\sin\beta,\ \bar{y} = -(x - x_o)\sin\beta + (y - y_o)\cos\beta. \qquad (7)$$

Тоді в глобальній системі координат x, y напруження і переміщення можна визначити за формулами

$$u_x^o = D_{\bar{x}}[-\nu_2 sF_2 + \nu_1 cF_3 + \bar{y}(sF_4 - cF_5)] + D_{\bar{y}}[-\nu_2 cF_2 - \nu_1 sF_3 - \bar{y}(cF_4 + sF_5)],$$

$$u_y^o = D_{\bar{x}}[\nu_2 cF_2 + \nu_1 sF_3 - \bar{y}(cF_4 + sF_5)] + D_{\bar{y}}[-\nu_2 sF_2 + \nu_1 cF_3 - \bar{y}(sF_4 - cF_5)],$$

$$\sigma_{xx}^o = 2G\{D_{\bar{x}}[(1+\tilde{c})F_4 + \tilde{s}F_5 + \bar{y}(\tilde{c}F_6 - \tilde{s}F_7)] + D_{\bar{y}}[-F_5 + \bar{y}(\tilde{s}F_6 + \tilde{c}F_7)]\},$$

$$\sigma_{yy}^o = 2G\{D_{\bar{x}}[(1-\tilde{c})F_4 - \tilde{s}F_5 - \bar{y}(\tilde{c}F_6 - \tilde{s}F_7)] + D_{\bar{y}}[-F_5 - \bar{y}(\tilde{s}F_6 + \tilde{c}F_7)]\},$$

$$\sigma_{xy}^o = 2G\{D_{\bar{x}}[\tilde{s}F_4 - \tilde{c}F_5 + \bar{y}(\tilde{c}F_7 + \tilde{s}F_6)] + D_{\bar{y}}[-\bar{y}(\tilde{c}F_6 - \tilde{s}F_7)]\}, \qquad (8)$$

де

$$F_1(\bar{x},\bar{y}) = f(\bar{x},\bar{y}), F_2(\bar{x},\bar{y}) = f_{\bar{x}}(\bar{x},\bar{y}), F_3(\bar{x},\bar{y}) = f_{\bar{y}}(\bar{x},\bar{y}),\ F_4(\bar{x},\bar{y}) = f_{\bar{x}\bar{y}}(\bar{x},\bar{y}),\ F_5(\bar{x},\bar{y}) = f_{\bar{x}\bar{x}}(\bar{x},\bar{y}) = -f_{\bar{y}\bar{y}}(\bar{x},\bar{y}),$$

$$F_6(\bar{x},\bar{y}) = f_{\bar{x}\bar{y}\bar{y}}(\bar{x},\bar{y}), F_7(\bar{x},\bar{y}) = f_{\bar{y}\bar{y}\bar{y}}(\bar{x},\bar{y}), \qquad c = \cos\beta, \tilde{c} = \cos 2\beta, s = \sin\beta, \tilde{s} = \sin 2\beta \qquad (9)$$

Для спрощення побудови математичної моделі задачі про тріщину в площині, будемо вважати, що елементарні розриви переміщень постійні для кожного з N відрізків вздовж тріщини. Суперпозиція розв'язків для всіх відрізків дозволяє визначити напруження і переміщення в центрі $(x_o^i, y_o^i), i = \overline{1,N}$ кожного відрізка. Наприклад, для і-го відрізка $(i = \overline{1,N})$ маємо

$$\left\{\sigma_n^o(x_o^i, y_o^i) = \sum_{j=1}^{N} A_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^{N} A_{nn}^{ij} D_n^j,\ \sigma_s^o(x_o^i, y_o^i) = \sum_{j=1}^{N} A_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^{N} A_{sn}^{ij} D_n^j,\right. \qquad (10)$$

$$\left\{u_n^o(x_o^i, y_o^i) = \sum_{j=1}^{N} B_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^{N} B_{nn}^{ij} D_n^j,\ u_s^o(x_o^i, y_o^i) = \sum_{j=1}^{N} B_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^{N} B_{sn}^{ij} D_n^j,\right. \qquad (11)$$

де

$$B_{ss}^{ij} = \nu_2 sF_2 + \nu_1 cF_3 - \bar{y}(sF_4 + cF_5),\ B_{sn}^{ij} = -\nu_2 cF_2 + \nu_1 sF_3 - \bar{y}(cF_4 - sF_5),$$

$$B_{ns}^{ij} = \nu_2 cF_2 - \nu_1 sF_3 - \bar{y}(cF_4 - sF_5),\ B_{nn}^{ij} = \nu_2 sF_2 + \nu_1 cF_3 + \bar{y}(sF_4 + cF_5),$$

$$A_{ns}^{ij} = 2G[(1-\tilde{c})F_4 + \tilde{s}F_5 - \bar{y}(\tilde{c}F_6 + \tilde{s}F_7)],\ A_{nn}^{ij} = 2G[-F_5 + \bar{y}(\tilde{s}F_6 - \tilde{c}F_7)],$$

$$A_{ss}^{ij} = 2G[-\tilde{s}F_4 - \tilde{c}F_5 - \bar{y}(-\tilde{c}F_7 + \tilde{s}F_6)],\ A_{sn}^{ij} = 2G[-\bar{y}(\tilde{c}F_6 + \tilde{s}F_7)],$$

$$A_{ns}^{ii} = A_{sn}^{ii} = 0,\ A_{ss}^{ii} = A_{nn}^{ii} = \frac{2G}{\pi\nu_1 a_i},\ B_{ns}^{ii} = B_{sn}^{ii} = 0,\ B_{ss}^{ii} = B_{nn}^{ii} = \mp\frac{1}{2} \text{ при } \bar{y} = 0_{\pm},$$

$$\bar{x} = (x_i - x_j)\cos\beta_j + (y_i - y_j)\sin\beta_j,\ \bar{y} = -(x_i - x_j)\sin\beta_j + (y_i - y_j)\cos\beta_j,$$

$$c = \cos\gamma, \tilde{c} = \cos 2\gamma, s = \sin\gamma, \tilde{s} = \sin 2\gamma, \gamma = \beta_i - \beta_j. \qquad (12)$$

У наведених виразах $A_{ns}^{ii}, A_{sn}^{ii}, A_{ss}^{ii}, A_{nn}^{ii}, B_{ns}^{ii}, B_{sn}^{ii}, B_{ss}^{ii}, B_{nn}^{ii}$ - граничні коефіцієнти впливу. Якщо до виразів з (10), (11) додати відповідні значення нормальних і дотичних напружень та переміщень другої допоміжної задачі, то отримаємо шукані для поставленої задачі значення нормальних і дотичних напружень та переміщень у точках, що відповідають центрам елементів тріщини.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ДРУГОЇ ДОПОМІЖНОЇ ЗАДАЧІ

Для другої допоміжної задачі, трансформанти напружень і переміщень напружено-деформівного стану *m*-го шару багатошарової основи можна визначити за схемою та формулами, що наводяться в роботах [1,2.3,5], замінивши на певному етапі деякі з них на необхідні вирази. При цьому розв'язок отримаємо у вигляді інтегралів Фур'є від трансформант напружень та переміщень.

Наведемо розрахункові формули, домовившись величини, що характеризують першу допоміжну задачу, позначати верхнім індексом 0, а величини другої задачі – індексом 1.

$$\overline{\sigma}^1_{zz\,k}(\xi, z) = e^{-pz}\alpha_k[a_k(D - pzC) + b_k pzD + 1 + pz] - e^{-pz}\delta_k[b_k(D - pzC) + b_{\tau k} pzD + pz] + L_k^0(\tilde{D} - pz\tilde{C}) - M_k^0 pz\tilde{D},$$

$$-\frac{i\xi}{p}\overline{\sigma}^{1}_{xz\,k}(\xi,z)=e^{-pz}\alpha_k\left[a_k\,pzD-b_k(D+pzC)+pz\right]-e^{-pz}\delta_k\left[b_k\,pzD-b_{\tau k}(D+pzC)+pz-1\right]+L^0_k\,pz\widetilde{D}+M^0_k\left(\widetilde{D}+pz\widetilde{C}\right),$$

$$2G_k(-i\xi)\overline{u}^{-1}_{x_k}(\xi,z)=e^{-pz}\alpha_k\left[a_k\left(\nu_{2_k}D+pzC\right)-b_k\left(\nu_{1_k}C+pzD\right)+pz-\nu_{2_k}\right]-$$

$$-e^{-pz}\delta_k\left[b_k\left(\nu_{2_k}D+pzC\right)-b_{\tau k}\left(\nu_{1_k}C+pzD\right)+pz-\nu_{1_k}\right]+L^0_k\left(\nu_{2_k}\widetilde{D}+pz\widetilde{C}\right)+M^0_k\left(\nu_{1_k}\widetilde{C}+pz\widetilde{D}\right),$$

$$2G_k\,p\overline{u}^{-1}_{z_k}(\xi,z)=e^{-pz}\alpha_k\left[a_k\left(\nu_{1_k}C-pzD\right)-b_k\left(\nu_{2_k}D-pzC\right)-pz-\nu_{1_k}\right]-$$

$$-e^{-pz}\delta_k\left[b_k\left(\nu_{1_k}C-pzD\right)-b_{\tau k}\left(\nu_{2_k}D-pzC\right)-pz-\nu_{2_k}\right]+L^0_k\left(\nu_{1_k}\widetilde{C}-pz\widetilde{D}\right)+M^0_k\left(\nu_{2_k}\widetilde{D}-pz\widetilde{C}\right)\quad(13)$$

Тут

$$\alpha_k(\xi)=\overline{\sigma}^{-1}_{zk}\big|_{z=0},\quad \beta_k(\xi)=\widetilde{G}_k\,p\overline{u}^{-1}_{zk}\big|_{z=0},\ \gamma_k(\xi)=-i\xi\,\widetilde{G}_k\,\overline{u}^{-1}_{xk}\big|_{z=0},\quad \delta_k(\xi)=-\frac{i\xi}{p}\overline{\sigma}^{-1}_{xzk}\big|_{z=0}.\qquad(14)$$

$$C=\frac{1}{2}\left(e^{-2p(h_k-z)}+e^{-2ph_k}\right),\quad D=\frac{1}{2}\left(e^{-2p(h_k-z)}-e^{-2ph_k}\right),.\ \widetilde{C}=\frac{1}{2}\left(e^{-p(h_k-z)}+e^{-p(h_k+z)}\right),\widetilde{D}=\frac{1}{2}\left(e^{-p(h_k-z)}-e^{-p(h_k+z)}\right).$$

У цих формулах функції податливості $A_k(p),B_k(p),B_{\tau k}(p),k=\overline{1,n}$ і модифіковані функції податливості $a_k(p),b_k(p),b_{\tau k}(p),\quad k=\overline{1,n}$ обчислюються за формулами, наведеними в роботі [2], а функції $L_k(\xi),M_k(\xi)$ згідно з формулами

$$D_k(p)L_k(p)=e^{-p_k}\Delta_k\left\{V_k\cdot\left[\widetilde{c}_k+\frac{p_k\widetilde{s}_k}{\nu_{1_k}}+\Delta_k B_{\tau k+1}\left(\widetilde{s}_k+p_k\widetilde{c}_k\right)+\Delta_k A_{\tau k+1}p_k\widetilde{s}_k\right]+W_k\cdot\left[\frac{\nu_{2_k}\widetilde{s}_k-p_k\widetilde{c}_k}{\nu_{1_k}}-\Delta_k B_{k+1}\left(\widetilde{s}_k+p_k\widetilde{c}_k\right)-\Delta_k A_{k+1}p_k\widetilde{s}_k\right]\right\},$$

$$D_k(p)M_k(p)=e^{-p_k}\Delta_k\left\{V_k\cdot\left[\frac{\nu_{2_k}\widetilde{s}_k+p_k\widetilde{c}_k}{\nu_{1_k}}-\Delta_k B_{\tau k+1}p_k\widetilde{s}_k+\Delta_k A_{\tau k+1}\left(\widetilde{s}_k-p_k\widetilde{c}_k\right)\right]+W_k\cdot\left[-\widetilde{c}_k+\frac{p_k\widetilde{s}_k}{\nu_{1_k}}-\Delta_k A_{k+1}\left(\widetilde{s}_k-p_k\widetilde{c}_k\right)+\Delta_k B_{k+1}p_k\widetilde{s}_k\right]\right\},\qquad(15)$$

де

$$D_k(p)=N_k\left[\nu_{4_k}\widetilde{c}_k^2+p_k^2e_k+e_k\nu_{2_k}{}^2\right]+\Delta_k\left(A_{k+1}\left(\widetilde{s}_k\widetilde{c}_k-p_ke_k\right)+B_{\tau k+1}\left(\widetilde{s}_k\widetilde{c}_k+p_ke_k\right)\right)+\frac{\widetilde{\Delta}_k}{2}\left[B_{k+1}+A_{\tau k+1}\right]\cdot\left[\nu_{2_k}\widetilde{s}_k^2+p_k^2e_k\right]+H_k\left[\widetilde{s}_k^2-p_k^2e_k\right],$$

$$N_k=\frac{1}{4(1-\nu_k)^2},\ H_k=\Delta_{k+1}^2\left[A_{k+1}B_{\tau k+1}-B_{k+1}A_{\tau k+1}\right],\ V_k=\left[-\beta_k^0-A_{k+1}\alpha_k^0+B_{k+1}\delta_k^0+L_{k+1}\right],W_k=\left[\gamma_k^0-A_{\tau k+1}\alpha_k^0+B_{\tau k+1}\delta_k^0-M_{k+1}\right]$$

Якщо тріщина в m-му шарі основи, то функції $\alpha_k^o,\beta_k^o,\gamma_k^o,\delta_k^o$, $k=1,2,...,n$ визначаються за правилом:

$$\alpha_k^o=\beta_k^o=\gamma_k^o=\delta_k^o=0\ ,\text{ при }\ k=1,...,m-3,m-2,m+1,...,n\ ,$$

$$\alpha_m^o=\overline{\sigma^o_{zz_m}},\ \beta_m^o=A\frac{i\xi}{p}\overline{\frac{\partial u^o_{z_m}}{\partial x}},\ \gamma_m^o=A\overline{\frac{\partial u^o_{x_m}}{\partial x}},\ \delta_m^o=-\frac{i\xi}{p}\overline{\sigma^o_{xz_m}},\ \text{при }\ z=h_m\ ,$$

$$\alpha_{m-1}^o=-\overline{\sigma^o_{zz_m}},\ \beta_{m-1}^o=-\widetilde{A}\frac{i\xi}{p}\overline{\frac{\partial u^o_{z_m}}{\partial x}},\ \gamma_{m-1}^o=\widetilde{A}\overline{\frac{\partial u^o_{x_m}}{\partial x}},\ \delta_{m-1}^o=\frac{i\xi}{p}\overline{\sigma^o_{xz_m}},\ \text{при }\ z=0\ .\qquad(16)$$

Тут $A=\frac{G_{m+1}}{1-\nu_{m+1}}$, $\widetilde{A}=\frac{G_m}{1-\nu_m}$.

У цих формулах трансформанти $\overline{\sigma^o_{xz_m}},\overline{\sigma^o_{zz_m}},\overline{u^o_{z_m}},\overline{u^o_{x_m}}$ є трансформантами одновимірного інтегрального перетворення Фур'є від функцій (8):

$$\overline{\frac{\partial u^o}{\partial x}}=-\nu_2\overline{F_5}(c+s)\left(sD_{\bar{x}}+D_{\bar{z}}c\right)+\nu_1(\overline{F_4}c+\overline{F_5}s)\left(cD_{\bar{x}}-D_{\bar{z}}s\right)+\left(-s\overline{F_4}-\overline{\bar{z}(sF_6+cF_7)}\right)\left(sD_{\bar{x}}-D_{\bar{z}}c\right)-\left(-s\overline{F_5}-\overline{\bar{z}(cF_6-sF_7)}\right)\left(cD_{\bar{x}}+D_{\bar{z}}s\right),$$

$$\overline{\frac{\partial u^o}{\partial x}}=\nu_2\overline{F_5}(c+s)\left(cD_{\bar{x}}-sD_{\bar{z}}\right)+\nu_1(\overline{F_4}c+\overline{F_5}s)\left(sD_{\bar{x}}+cD_{\bar{z}}\right)-\left(-s\overline{F_4}-\overline{\bar{z}(sF_6+cF_7)}\right)\left(cD_{\bar{x}}+sD_{\bar{z}}\right)-\left(-s\overline{F_5}-\overline{\bar{z}(cF_6-sF_7)}\right)\left(sD_{\bar{x}}-cD_{\bar{z}}\right),$$

$$\overline{\sigma^o_{xx}}=2G\left\{D_{\bar{x}}\left[(1+\tilde{c})\overline{F_4}+\tilde{s}\overline{F_5}+\overline{\tilde{z}(\tilde{c}F_6-\tilde{s}F_7)}\right]+D_{\bar{z}}\left[-\overline{F_5}+\overline{\tilde{z}(\tilde{s}F_6+\tilde{c}F_7)}\right]\right\}\ \overline{\sigma^o_{zz}}=2G\left\{D_{\bar{x}}\left[(1-\tilde{c})\overline{F_4}-\tilde{s}\overline{F_5}-\overline{\tilde{z}(\tilde{c}F_6-\tilde{s}F_7)}\right]+D_{\bar{z}}\left[-\overline{F_5}-\overline{\tilde{z}(\tilde{s}F_6+\tilde{c}F_7)}\right]\right\},$$

$$\overline{\sigma^o_{xz}}=2G\left\{D_{\bar{x}}\left[\tilde{s}\overline{F_4}-\tilde{c}\overline{F_5}+\overline{\tilde{z}(\tilde{c}F_7+\tilde{s}F_6)}\right]+D_{\bar{z}}\left[-\overline{\tilde{z}(\tilde{c}F_6-\tilde{s}F_7)}\right]\right\}. \qquad (17)$$

Зауважимо, що отримані трансформанти є лінійними комбінаціями трансформант функцій $\overline{F_4},\overline{F_5},\overline{F_6},\overline{F_7},\overline{\tilde{x}F_6},\overline{\tilde{x}F_7}$, які у свою чергу можна обчислити точно за допомогою табличних інтегралів та деяких попередніх перетворень.

Покладаючи по черзі $D_{\bar{x}}=0$, $D_{\bar{z}}=1$ і $D_{\bar{x}}=1$, $D_{\bar{z}}=0$ знайдемо нормальні і дотичні напруження та переміщення другої допоміжної задачі, в точках, що відповідають центрам кожного елемента тріщини. Додавши знайдені значення до (10), (11) приходимо до співвідношень

$$\begin{cases}\sigma_{n_m}=\sigma_n^o(x_o^i,y_o^i)+\sigma_n^1(x_o^i,y_o^i)=\sum\limits_{j=1}^{N}\tilde{A}_{ns}^{ij}D_s^j+\sum\limits_{j=1}^{N}\tilde{A}_{nn}^{ij}D_n^j,\\ \sigma_{s_m}=\sigma_s^o(x_o^i,y_o^i)+\sigma_s^1(x_o^i,y_o^i)=\sum\limits_{j=1}^{N}\tilde{A}_{ss}^{ij}D_s^j+\sum\limits_{j=1}^{N}\tilde{A}_{sn}^{ij}D_n^j,\quad i=\overline{1,N},\end{cases} \qquad (18)$$

$$\begin{cases}u_{n_m}=u_n^o(x_o^i,y_o^i)+u_n^1(x_o^i,y_o^i)=\sum\limits_{j=1}^{N}\tilde{B}_{ns}^{ij}D_s^j+\sum\limits_{j=1}^{N}\tilde{B}_{nn}^{ij}D_n^j,\\ u_{s_m}=u_s^o(x_o^i,y_o^i)+u_s^1(x_o^i,y_o^i)=\sum\limits_{j=1}^{N}\tilde{B}_{ss}^{ij}D_s^j+\sum\limits_{j=1}^{N}\tilde{B}_{sn}^{ij}D_n^j,\quad i=\overline{1,N},\end{cases} \qquad (19)$$

Залежно від умов на кожному елементі, обираються рівняння або з (18), або з (19). Тепер якщо для кожного елемента тріщини задати значення напружень σ_n^i,σ_s^i, або переміщень u_n^i,u_s^i, то співвідношення для нормальних і дотичних напружень та переміщень поставленої задачі утворюють систему 2N лінійних алгебраїчних рівнянь з 2N невідомими компонентами $D_s^i,D_n^i,i=\overline{1,N}$ елементарних розривів переміщень

$$\begin{cases}f_{n_m}^i(x_o^i,y_o^i)=\sum\limits_{j=1}^{N}C_{ns}^{ij}D_s^j+\sum\limits_{j=1}^{N}C_{nn}^{ij}D_n^j,\\ f_{s_m}^i(x_o^i,y_o^i)=\sum\limits_{j=1}^{N}C_{ss}^{ij}D_s^j+\sum\limits_{j=1}^{N}C_{sn}^{ij}D_n^j,\quad i=\overline{1,N}.\end{cases} \qquad (20)$$

Розв'язавши отриману СЛАР (20), ми знайдемо такі значення компонент $D_s^i,D_n^i,i=\overline{1,N}$ елементарних розривів переміщень, що нормальні та дотичні напруження (переміщення) в точках контуру будуть дорівнювати заданим. Таким чином задача про тріщину в багатошаровій основі розв'язується за таким алгоритмом:

а) за умовами задачі контур тріщини розбивається на елементарні частини, для кожної з яких задаються геометричні характеристики (координати центру елемента та напрямні косинуси вектору нормалі) та фізичні умови (напруження або переміщення);

б) згідно з заданими умовами обчислюються коефіцієнти системи лінійних алгебраїчних рівнянь (20) ;

в) розв'язавши СЛАР (20), визначимо значення компонент $D_s^i,D_n^i,i=\overline{1,N}$ елементарних розривів переміщень;

г) за формулами (16)-(17) визначаються функції $\alpha_k^0,\beta_k^0,\gamma_k^0,\delta_k^0$, $k=1,2,...,n$;

д) визначаються для багатошарової основи функції податливості $a_k(p),b_k(p),b_{\pi k}(p),\quad k=\overline{1,n}$ і функції $L_k(\xi),M_k(\xi)$ за формулами (15);

е) виходячи з граничних умов на верхній межі основи за формулами (14) визначаються функції $\alpha_k\,\beta_k,\gamma_k,\delta_k$, $k=1,2,...,n$;

є) за допомогою співвідношень (13) визначаються трансформанти шуканих величин напружень та переміщень для розрахункового шару. Потім за допомогою зворотного перетворення Фур'є і самі шукані величини;

ж) якщо в розрахунковому шарі є тріщина, то до отриманих значень треба додати величини (8).

ЛІТЕРАТУРА

1. Вигдерович И.Е., Ламзюк В.Д., Приварников А.К. О решении граничных задач теории упругости для многослойных оснований сложной структуры // Всесоюзная конференция по теории упругости. Тезисы докладов. - Ереван, 1979. С.81-84.
2. Вигдерович И.Е., Ламзюк В.Д., Приварников А.К. Об использовании метода функций податливости при решении граничных задач для многослойных оснований сложной структуры. - Докл. АН УССР. Сер.А.–1979.-№6.-С. 434-438.
3. Зиновеев И. В. Напряженно-деформированное состояние много-слойного основания под действием оверхностных и объемных нагрузок // Вопросы механіки деформирования и разрушения твердых тел. – Дніпропетровськ: ДДУ, 1999. – С.66-73.
4. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. – М.:Мир, 1987.– 328 с.
5. Приварников А.К. Граничные задачи теории упругости для многослойных оснований простой и сложной структуры.: Автореф. дисс. д-ра фіз.-мат. наук. - М.,1982. - 41 с.
6. Приварников А.К., Ламзюк В.Д. Упругие многослойные основания. - Днепропетровск, 1985. - Ч.1,182 с. Деп. в ВИНИТИ 23.12.85,8789-В.