УДК 539.3

ЗАСТОСУВАННЯ ГІБРИДНОГО ВКБ-ГАЛЬОРКІН ПІДХОДУ ДО РОЗРАХУНКУ РОЗПОДІЛУ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ У ДИСКУ ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ*

Герасімов Т.С., аспірант, Грищак В.З., д.т.н., професор

Запорізький державний університет

Для розрахунку теплових напружень, що виникають у диску турбомашини при нерівномірному нагріванні, важливо знати правильний розподіл температури у ньому. Розрахунок одновимірного температурного поля у диску змінної товщини зводиться до розв'язання крайової задачі для диференціального рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами. Точних аналітичних розв'язків такого рівняння в загальному випадку не існує.

У роботі, внаслідок виділення в рівнянні теплопровідності для круглої пластини змінної вздовж радіуса товщини "малого" параметра (відношення номінальної товщини пластини до радіуса) з'являється можливість побудувати його наближений аналітичний розв'язок за методом ВКБ (фазових інтегралів), який, однак, стає непридатним при великих значеннях параметра. Використаний на другому етапі гібридний ВКБ-Гальоркін підхід дозволяє будувати наближений аналітичний розв'язок задачі в замкненому вигляді при будь-якому розумному, свідомо невідомому законі зміни товщини пластини (диска); причому цій розв'язок вже в нульовому наближенні добре збігається з чисельними результатами на широкому інтервалі зміни параметра.

Ключові слова: температурне поле, кругла пластина, змінна товщина, наближений розв'язок, параметр, гібридний підхід

Герасимов Т.С., Грищак В.З. ПРИМЕНЕНИЕ ГИБРИДНОГО ВКБ-ГАЛЬОРКИН ПОДХОДА ДЛЯ РАСЧЕТА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ДИСКЕ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ / Запорожский государственный университет, Украина

Для расчета тепловых напряжений, возникающих в диске турбомашины при его неравномерном нагревании, важно знать точное распределение температуры в нем. Расчет одномерного температурного поля в диске переменной толщины сводится к решению краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. В общем случае такое уравнение не имеет точных аналитических решений.

В работе, вследствие выделения в уравнении теплопроводности для круглой пластины переменной вдоль радиуса толщины «малого» параметра (отношение номинальной толщины пластины к радиусу) появляется возможность построить его приближенное аналитическое решение с помощью метода ВКБ (фазовых интегралов), которое, однако, становится непригодным при возрастании параметра. Использованный на втором этапе гибридный ВКБ-Гальоркин подход позволяет получить приближенное аналитическое решение задачи в замкнутом виде для любого приемлемого, заведомо неизвестного закона изменения толщины пластины; причем данное решение уже в нулевом приближении хорошо согласуется с численным решением на широком интервале изменения параметра.

Ключевые слова: температурное поле, круглая пластина, переменная толщина, приближенное решение, параметр, гибридный подход

Gerasimov T.S. , Gristchak V.Z. A HYBRID WKB-GALERKIN TECHNIQUE WITH APPLICATION TO THE PROBLEM OF DETERMINING THE TEMPERATURE DISTRIBUTION INSIDE A ROUND PLATE WITH VARIABLE THICKNESS / Zaporizhzhia state university, Ukraine

The problem of the determining the steady-state temperature distribution inside a round plate with variable thickness could be reduced to the boundary problem for ordinary differential equation of the second order with variable coefficients which contains a parameter. Generally, when the function of the thickness variation is initially arbitrary, such an equation has no an exact analytical solution.

In the paper we have demonstrated usefulness of a two-step hybrid WKB-Galerkin technique, which combines WKB technique (method of phase integrals) with the Galerkin method, for solving the aforesaid problem.

It is shown that the offered technique gives the opportunity to obtain the approximate closed-form analytical solution of the problem and provides rather high accuracy comparing with numerical results simultaneously for small and large values of the parameter.

* Робота виконувалась у Запорізькому державному університеті згідно з держбюджетною темою №3/2000 Міністерства освіти і науки України

Key words: temperature field, round plate, variable thickness, approximate solution, parameter, hybrid technique

1. ВСТУП

Для розв'язку досить актуальної технічної задачі – розрахунку теплових напружень, що виникають у диску турбомашини при нерівномірному нагріванні, важливо знати правильний розподіл температури у ньому. У літературі [1] детально висвітлене питання розрахунку температури у диску постійної товщини. Розрахунок одновимірного температурного поля у диску змінної товщини зводиться до розв'язання крайової задачі для диференціального рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами. Точні аналітичні розв'язки такого рівняння з використанням гіпергеометричних функцій отримані лише в деяких окремих випадках для конкретних законів зміни товщини [1], взагалі далеких від практичного використання.

У цій роботі внаслідок виділення в рівнянні теплопровідності для круглої пластини змінної вздовж радіуса товщини "малого" параметра ε (відношення номінальної товщини пластини до радіуса) з'являється можливість побудувати його наближений аналітичний розв'язок за методом ВКБ (фазових інтегралів) [2], який, однак, стає непридатним при великих значеннях ε. Використаний на другому етапі гібридний ВКБ-Гальоркін підхід [3] дозволяє будувати наближений аналітичний розв'язок задачі в замкненому вигляді при будь-якому розумному, свідомо невідомому законі зміни товщини пластини (диска); причому цей розв'язок вже в нульовому наближенні добре збігається з чисельними результатами на широкому інтервалі зміни параметра ε.

Альтернативним підходом до розв'язання вищезгаданої крайової задачі є використання гібридного методу збурювань-Гальоркіна [4], однак отримані за його допомогою результати виявляють у цьому випадку незадовільну ефективність методу в порівнянні з ВКБ-Гальоркін методом.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

При стаціонарному одномірному температурному полі, симетричному осі диска, коли температура є функцією тільки радіуса, диференціальне рівняння теплопровідності для диска змінної товщини з внутрішнім і зовнішнім радіусами b і a, причому $b \ll a$ має вигляд:

$$\frac{d^2T}{dr^2}+\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{h}\frac{dh}{dr}\right)\frac{dT}{dr}-\frac{2\alpha}{\lambda h}(T-T_*)=0, \qquad (1)$$

де $r\in[b,a]$ – радіальна координата, $T=T(r)$ – температура диска, T_* – температура навколишнього середовища, $h=h(r)$ – змінна товщина, α – коефіцієнт тепловіддачі від бічних поверхонь диска до навколишнього середовища, λ – коефіцієнт теплопровідності матеріалу диска.

Температуру навколишнього середовища T_* візьмемо нульовою (принципово це не буде впливати на подальший розв'язок проблеми) і коефіцієнти α і λ припускаються постійними.

Граничні умови для температури на внутрішньому і зовнішньому контурах диска задамо так:

$$T(b)=t_2 \text{ и } T(a)=t_1. \qquad (2)$$

Нехай товщина диска змінюється за законом $h=h_0\varphi(r)$, де h_0 – номінальна товщина диска, тобто товщина такого диска постійної товщини, для якого виконується умова теорії тонких пластин $\frac{h_0}{a}<\frac{1}{5}$; $\varphi(r)$ – деяка додатна нелінійна функція, така, що для розглянутого диска також виконується умова теорії тонких пластин $\frac{h_0\varphi(r)}{a}<\frac{1}{5}$ при кожному $r\in[b,a]$. Тоді однорідне диференціальне рівняння, що відповідає (1), можна переписати як

$$\frac{d^2T}{dr^2}+\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dr}\right)\frac{dT}{dr}-\frac{2\alpha}{\lambda h_0\varphi}T=0, \qquad (3)$$

де $\varphi = \varphi(r)$.

Перейдемо до незалежної змінної $x = (r/a)^{\alpha_0}$, де $\alpha_0 > 0$, і, зробивши необхідні перетворення, одержимо вихідне рівняння (3) у формі

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dx}\right)\frac{dT}{dx} - \frac{2\alpha h_0}{\lambda\alpha_0^2}\left(\frac{a}{h_0}\right)^2 \frac{x^{\frac{2(1-\alpha_0)}{\alpha_0}}}{\varphi} T = 0, \tag{4}$$

де тепер $T = T(x)$, $\varphi = \varphi(x)$, $x \in [(b/a)^{\alpha_0}, 1]$. Запишемо його інакше в характерному вигляді, зручному для побудови ВКБ-розв'язку:

$$\varepsilon^2\left[\frac{d^2T}{dx^2} + p(x)\frac{dT}{dx}\right] - Pq(x)T = 0, \tag{5}$$

де $\varepsilon^2 = (h_0/a)^2 << 1$ – «малий» параметр, $p(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dx}$, $q(x) = x^{2\left(\frac{1}{\alpha_0}-1\right)}\varphi^{-1}$, $P = \frac{2\alpha h_0}{\lambda\alpha_0^2}$.

Функція $q(x)$ на інтервалі $x \in [(b/a)^{\alpha_0}, 1]$ додатна та не має точок розриву другого роду і нулів, тобто точок повороту.

Отже, розв'яжемо диференціальне рівняння (5) гібридним методом ВКБ-Гальоркіна [3]. Покажемо, що коли в рівнянні (5) параметр перестає бути малим, наближений розв'язок, отриманий методом ВКБ, може бути значно «поліпшено» при використанні критерію ортогональності методу Бубнова-Гальоркіна.

3. ЗАСТОСУВАННЯ ГІБРИДНОГО ВКБ-ГАЛЬОРКІН МЕТОДУ

На першому етапі, відповідно до методу ВКБ, наближений розв'язок диференціального рівняння (5) будемо шукати у вигляді [2]:

$$T_{WKB}(x,\varepsilon) = \exp \int_{(b/a)^{\alpha_0}}^{x} (\varepsilon^{-1}\psi_0 + \psi_1 + \varepsilon\psi_2 + ...)d\xi, \tag{6}$$

де ψ_0, ψ_1, ψ_2,… – невідомі функції.

В одному (нульовому) наближенні формула (6) буде мати вигляд

$$T_{WKB[0]}(x,\varepsilon) = \exp \int_{(b/a)^{\alpha_0}}^{x} \varepsilon^{-1}\psi_0 d\xi, \tag{7}$$

і після підстановки виразу (7) та його перших двох похідних у рівняння (5) одержимо:

$$\psi_0 = \pm P^{1/2} q^{1/2}(x). \tag{8}$$

Тоді загальний ВКБ-розв'язок рівняння (5) виглядає так:

$$T_{WKB[0]}(x,\varepsilon) = C_0 \exp\left(\varepsilon^{-1}P^{1/2}\int_{(b/a)^{\alpha_0}}^{x} q^{1/2}(\xi)d\xi\right) + D_0 \exp\left(-\varepsilon^{-1}P^{1/2}\int_{(b/a)^{\alpha_0}}^{x} q^{1/2}(\xi)d\xi\right), \tag{9}$$

де C_0, D_0 – довільні постійні, які визначаються з граничних умов для температури (2).

Розв'язок (9) не враховує коефіцієнта $p(x)$ при першій похідній у рівнянні (5). Щоб врахувати його внесок, побудуємо ВКБ-розв'язок рівняння (5), узявши два члени розвинення (6):

$$T_{WKB[1]}(x,\varepsilon) = \exp \int_{(b/a)^{\alpha_0}}^{x} (\varepsilon^{-1}\psi_0 + \psi_1)d\xi. \tag{10}$$

Підставивши вираз (10) з його двома похідними у (5) і зібравши коефіцієнти при ступенях ε^{-1} і ε^{0}, одержимо систему рівнянь для визначення ψ_0 і ψ_1, з якої легко знайти

$$\psi_0 = \pm P^{1/2} q^{1/2}(x) \text{ і } \psi_1 = -\frac{p(x)}{2} - \frac{\psi_0'}{2\psi_0}. \tag{11}$$

Тоді згідно з (10) і (11) загальний ВКБ-розв'язок рівняння (5) у першому наближенні запишеться так:

$$T_{WKB[1]}(x,\varepsilon) = \frac{q^{1/4}(b/a)}{q^{1/4}(x)} \exp\left(-\frac{1}{2} \int\limits_{(b/a)^{\alpha_0}}^{x} p(\xi) d\xi \right) \times$$

$$\times \left[C_1 \exp\left(\varepsilon^{-1} P^{1/2} \int\limits_{(b/a)^{\alpha_0}}^{x} q^{1/2}(\xi) d\xi \right) + D_1 \exp\left(-\varepsilon^{-1} P^{1/2} \int\limits_{(b/a)^{\alpha_0}}^{x} q^{1/2}(\xi) d\xi \right) \right], \tag{12}$$

де C_1, D_1 – довільні постійні, які також визначаються з граничних умов для температури (2).

На другому етапі зобразимо гібридний розв'язок $T(x,\varepsilon)$ рівняння (5) у вигляді [3]:

$$T_H(x,\varepsilon) = \exp \int\limits_{(b/a)^{\alpha_0}}^{x} (\delta_0 \psi_0 + \delta_1 \psi_1 + ...) d\xi, \tag{13}$$

де припускається, що координатні функції $\psi_0, \psi_1, ...$ визначені на першому етапі, а $\delta_0, \delta_1, ...$ – невідомі функції параметра ε, які необхідно знайти.

У нульовому наближенні вираз (13) і його перші дві похідні запишуться так:

$$T_{H[0]}(x,\varepsilon) = \exp \int\limits_{(b/a)^{\alpha_0}}^{x} \delta_0 \psi_0 d\xi, \tag{14}$$

$$\frac{dT_{H[0]}}{dx} = \delta_0 \psi_0 \exp \int\limits_{(b/a)^{\alpha_0}}^{x} \delta_0 \psi_0 d\xi,$$

$$\frac{d^2 T_{H[0]}}{dx^2} = (\delta_0^2 \psi_0^2 + \delta_0 \psi_0') \exp \int\limits_{(b/a)^{\alpha_0}}^{x} \delta_0 \psi_0 d\xi, \tag{15}$$

де нагадаємо $\psi_0 = \pm P^{1/2} q^{1/2}(x)$.

Підставивши вирази (14), (15) у рівняння (5), знайдемо його відхил:

$$R = \varepsilon^2 \left[\delta_0^2 \psi_0^2 + \delta_0 \psi_0' + p(x) \delta_0 \psi_0 \right] - Pq(x). \tag{16}$$

Умова ортогональності відхилу R і функції ψ_0 являє собою алгебраїчне квадратне рівняння відносно невідомої δ_0:

$$\delta_0^2 \int\limits_{(b/a)^{\alpha_0}}^{1} \varepsilon^2 \psi_0^3 dx + \delta_0 \int\limits_{(b/a)^{\alpha_0}}^{1} \varepsilon^2 (\psi_0' + p(x)\psi_0) \psi_0 dx - \int\limits_{(b/a)^{\alpha_0}}^{1} Pq(x) \psi_0 dx = 0. \tag{17}$$

Розв'язавши його, знайдемо:

$$\delta_{0_{1,2}} = -\frac{1}{2}\frac{\int\limits_{(b/a)^{\alpha_0}}^{1}(\psi_0' + p(x)\psi_0)\psi_0 dx}{\int\limits_{(b/a)^{\alpha_0}}^{1}\psi_0^3 dx} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{\varepsilon^2} + \left(\frac{\int\limits_{(b/a)^{\alpha_0}}^{1}(\psi_0' + p(x)\psi_0)\psi_0 dx}{\int\limits_{(b/a)^{\alpha_0}}^{1}\psi_0^3 dx}\right)^2}. \qquad (18)$$

У виразі (18) функцію ψ_0 можна обрати як $\psi_0 = +P^{1/2}q^{1/2}(x)$, так і $\psi_0 = -P^{1/2}q^{1/2}(x)$ [3].

У підсумку, з огляду на (14) за аналогією до (9), загальний гібридний ВКБ-Гальоркін розв'язок рівняння (5) в нульовому наближенні має вигляд:

$$T_{H[0]}(x,\varepsilon) = \overline{C}_0 \exp\left(\int\limits_{(b/a)^{\alpha_0}}^{x}\delta_{0_1}\psi_0 dx\right) + \overline{D}_0 \exp\left(\int\limits_{(b/a)^{\alpha_0}}^{x}\delta_{0_2}\psi_0 dx\right), \qquad (19)$$

а постійні $\overline{C}_0, \overline{D}_0$ визначаються з відповідних граничних умов.

4. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ЗБУРЮВАНЬ-ГАЛЬОРКІНА

Помітимо, що коли параметр $\varepsilon^2 = (h_0/a)^2$ при старших похідних в рівнянні (5) перестає бути «малим», і таким стає ε^{-2}, виникає можливість побудувати наближений розв'язок рівняння за методом збурювань. Переписавши (5) як

$$\frac{d^2T}{dx^2} + p(x)\frac{dT}{dx} - \varepsilon^{-2}Pq(x)T = 0, \qquad (20)$$

представимо його розв'язок $T(x,\varepsilon)$ у вигляді ε-розвинення

$$T_P(x,\varepsilon) = T_0 + \varepsilon^{-2}T_1 + \varepsilon^{-4}T_2 + \ldots, \qquad (21)$$

де $T_0, T_1, T_2, \ldots$ – невідомі функції, що підлягають визначенню.

Підстановка виразу (21) у рівняння (20) і відповідні граничні умови дає рекурентну послідовність крайових задач для визначення невідомих $T_0, T_1, T_2, \ldots$, яка в нашому випадку має досить прості аналітичні розв'язки (розглянемо два наближення):

$$T_0(x) = C_0 + D_0\int e^{-\int p(x)dx}dx, \qquad (22)$$

$$T_1(x) = -P[I_2(x) - I_1(x)] + C_1 + D_1\int e^{-\int p(x)dx}dx, \qquad (23)$$

де $I_1(x)$ й $I_2(x)$ інтеграли, що задаються формулами

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \int\left[\int e^{-\int p(x)dx}dx\right]q(x)T_0(x)\left[e^{\int p(x)dx}dx\right]dx, \\ I_2(x) &= \int q(x)T_0(x)\left[e^{\int p(x)dx}dx\right]dx\cdot\int e^{-\int p(x)dx}dx, \end{aligned} \qquad (24)$$

а довільні постійні C_0, D_0 і C_1, D_1 визначаються з відповідних граничних умов.

Таким чином, на основі (21) одержимо наближений розв'язок рівняння (20) у вигляді ε-розвинення у двох наближеннях:

$$T_{P[1]}(x,\varepsilon) = T_0(x) + \varepsilon^{-2}T_1(x). \qquad (25)$$

Розв'язок у нульовому наближенні відповідно має вигляд $T_{P[0]}(x,\varepsilon) = T_0(x)$.

Далі згідно з методом збурювань-Гальоркіна [4] представимо новий наближений (гібридний) розв'язок $T(x,\varepsilon)$ рівняння (20) у вигляді:

$$T_{P-G}(x,\varepsilon) = \delta_0 T_0 + \delta_1 T_1 + \delta_2 T_2 + \dots, \tag{26}$$

де припускається, що функції $T_0, T_1, \dots$ знайдені на першому етапі за методом збурювань, а $\delta_0, \delta_1, \dots$ їх невідомі «амплітуди», функції параметра ε, що підлягають визначенню. Помітимо також, що поклавши в (26) $\delta_0 = 1$, $T_{P-G}(x,\varepsilon)$ буде задовольняти граничним умовам задачі при будь-яких $\delta_1, \delta_2, \dots$ [4].

Після підстановки виразу (26) у рівняння (20) одержимо його відхил:

$$R = \frac{d^2 T_{P-G}}{dx^2} + p(x)\frac{dT_{P-G}}{dx} - \varepsilon^{-2} P q(x) T_{P-G}. \tag{27}$$

Тепер у загальному випадку невідомі «амплітуди» $\delta_1, \delta_2, \dots$ можуть бути знайдені з умови ортогональності відхилу R і координатних функцій $T_1, T_2, \dots$, тобто з умови

$$\int_{(b/a)^{\alpha_0}}^{1} R T_i(x)dx = \int_{(b/a)^{\alpha_0}}^{1} \left\{ \frac{d^2 T_{P-G}}{dx^2} + p(x)\frac{dT_{P-G}}{dx} - \varepsilon^{-2} P q(x) T_{P-G} \right\} T_i(x)dx = 0, \tag{28}$$

де $i = 1,2,\dots$.

Узявши гібридний розв'язок (26) у двох наближеннях, остаточно після деяких спрощень рівняння (28) для визначення δ_1 буде мати вигляд:

$$\varepsilon^{-2} P \int_{(b/a)^{\alpha_0}}^{1} q(x) T_0 T_1 dx - \delta_1 P \int_{(b/a)^{\alpha_0}}^{1} q(x)\left(T_0 - \varepsilon^{-2} T_1\right) T_1 dx = 0, \tag{29}$$

звідки

$$\delta_1 = \left[\varepsilon^2 - \int_{(b/a)^{\alpha_0}}^{1} q(x) T_1^2 dx \Big/ \int_{(b/a)^{\alpha_0}}^{1} q(x) T_0 T_1 dx \right]^{-1}, \tag{30}$$

де T_0 і T_1, нагадаємо, задані аналітично виразами (22) і (23).

Таким чином, наближений розв'язок рівняння (20), знайдений за методом збурювань-Гальоркіна, у двох наближеннях буде таким:

$$T_{P-G[1]}(x,\varepsilon) = T_0(x) + \delta_1 T_1(x), \tag{31}$$

де δ_1 визначено за формулою (31).

5. АНАЛІЗ ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

На рисунках 1а – 1є зображені наближені розв'язки рівняння (5) залежно від величини параметра $\varepsilon = h_0/a$, отримані методом ВКБ в нульовому та першому наближеннях (на графіках позначені відповідно як $T_{WKB[0]}$ та $T_{WKB[1]}$), гібридним ВКБ-Гальоркін методом у нульовому наближенні (позначено як $T_{H[0]}$) і чисельний розв'язок T_N, отриманий методом скінчених різниць.

Як можна побачити з графіків, при значеннях ε порядку 0.01~0.02, тобто коли «малий» параметр $\varepsilon = h_0/a$ в рівнянні (5) дійсно є таким (для реальних тонких пластин (дисків) ця умова виконується), метод ВКБ-наближень в порівнянні з точним чисельним розв'язком дає цілком прийнятні результати. При «великих» для пластини значеннях ε (порядку 0.1 і більше) ВКБ-розв'язки стають непридатними, причому «уточнююче» перше наближення не завжди ближче до точного розв'язку, ніж нульове. При цьому гібридний ВКБ-Гальоркін підхід вже в нульовому наближенні добре "тримає" чисельний

розв'язок, тобто дає такий розв'язок задачі, що збігається з чисельними результатами на широкому інтервалі зміни параметра ε.

Це тим більш цінне, оскільки в цьому випадку гібридний метод ВКБ-Гальоркіна дозволяє будувати наближені аналітичні розв'язки задачі в замкненому вигляді при будь-якому розумному, свідомо невідомому законі зміни товщини пластини (диска).

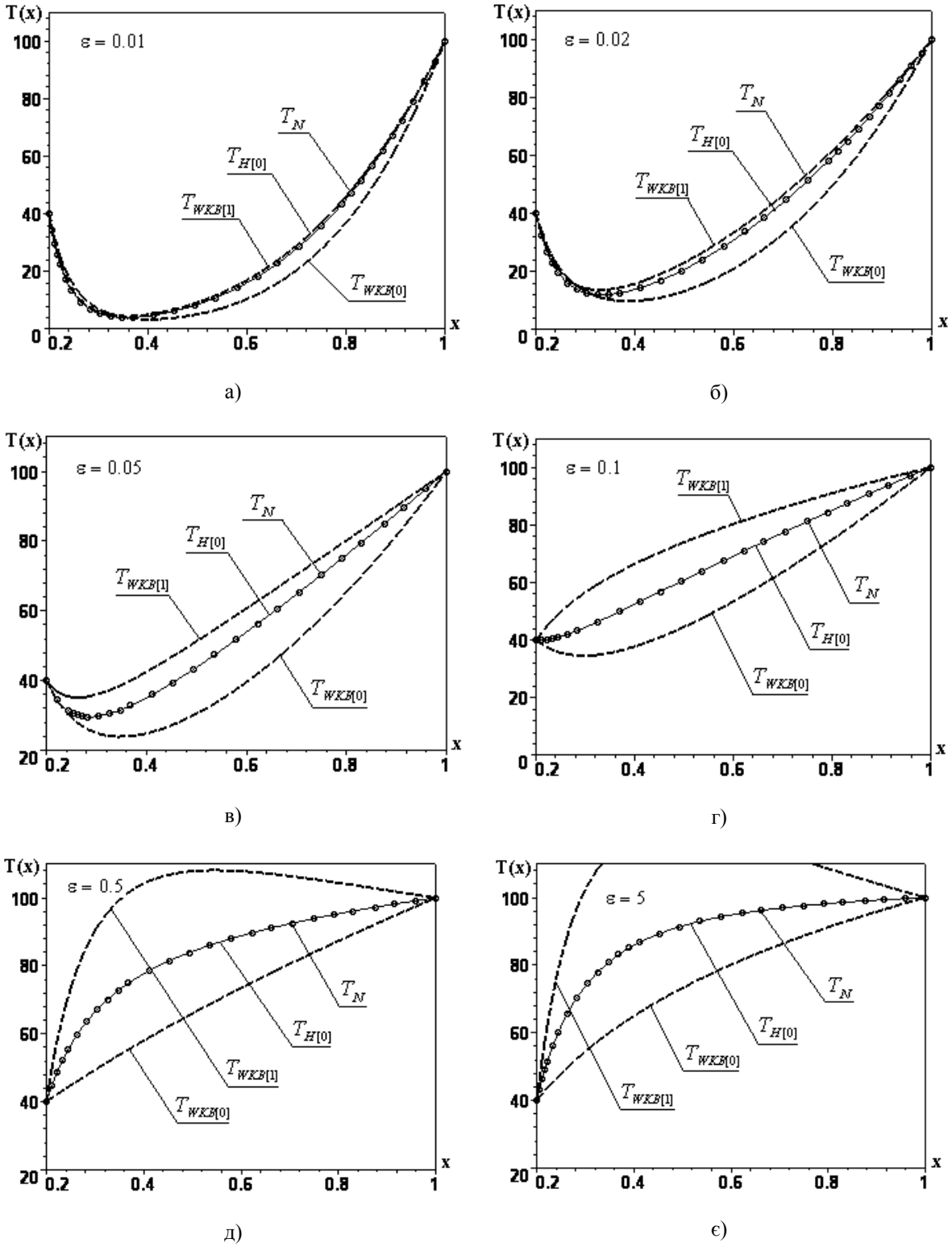

Рис. 1. Розв'язки рівняння теплопровідності (5) для диска, товщина якого змінюється за законом $\varphi(x) = x^2$, залежно від величини параметра $\varepsilon = h_0 / a$: ВКБ-розв'язки в нульовому та першому наближенні (пунктирні лінії), гібридні ВКБ-Гальоркін розв'язки в нульовому наближенні (безперервна лінія) і методом кінцевих різниць (кола).

Стосовно використаного щодо розв'язання рівняння (20) в четвертому розділі методу збурювань, то, як можна бачити з графіків (рисунки 2а – 2г), при «малих» ε він не працює взагалі (графіки розв'язків позначені відповідно як $T_{P[0]}$ та $T_{P[1]}$), а в поєднанні з методом Гальоркіна – гібридний підхід збурювань-Гальоркіна – (позначено як $T_{P-G[1]}$) лише наближає до точних результатів. Разом с тим збільшення параметра ε призводить, як і очікувалося, до поліпшення отриманих за їх допомогою результатів, а при дійсно "великих" значеннях ε й до цілковитого збігання аналітичних результатів з чисельними.

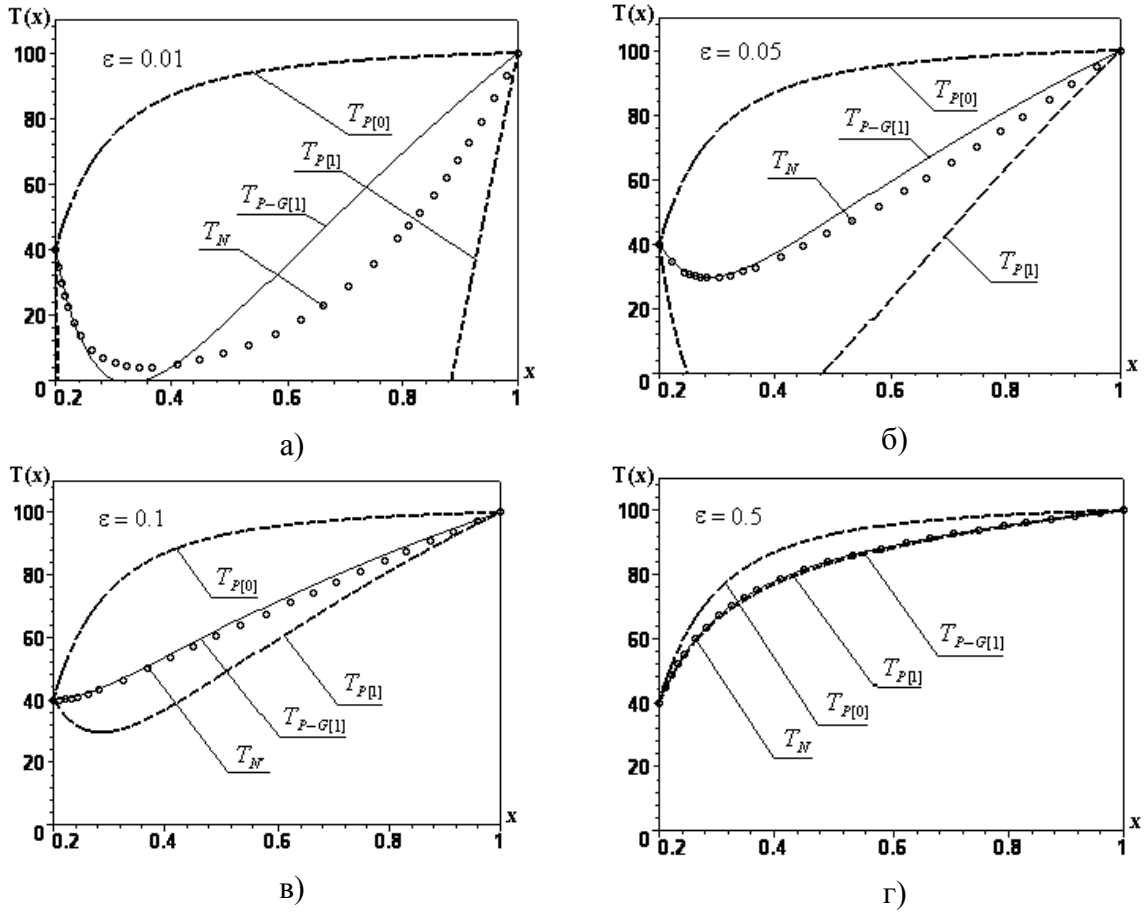

Рис. 2. Розв'язки рівняння (22) при $\varphi(x) = x^2$ отримані методом збурювань у нульовому та першому наближеннях (пунктирні лінії), гібридним методом збурювань-Гальоркіна в нульовому наближенні (безперервна лінія) і методом кінцевих різниць (кола) залежно від величини параметра $\varepsilon = h_0 / a$.

Усі розрахунки здійснені при законі зміни товщини $\varphi(x) = x^2$ та при таких, прийнятих у рівнянні (5), позначеннях: $\alpha_0 = 1$, $\alpha/\lambda = 10$, $b/a = 0.2$. Температури на внутрішньому і зовнішньому контурах відповідно $t_2 = 40$ і $t_1 = 100$. Температуру навколишнього середовища T_* прийнято нульовою.

ЛІТЕРАТУРА

1. Коваленко А.Д. Круглые пластины переменной толщины. – К.: Наукова думка, 1959. – 328 с.
2. Найфе А.Х. Введение в методы возмущений: Пер. с англ. – М: Мир, 1984. – 456с.
3. Gristchak V.Z., Dmitrijeva Ye.M. A hybrid WKB-Galerkin method and its application // Technishe Mechanik. – 1995. – 15, № 3. – P. 281 – 294.
4. Geer J.F., Andersen C.M. A hybrid perturbation Galerkin technique for differential equations containing a parameter // Appl. Math. Rev. – 1989. – 42, № 11. – P. S69 – S77.