УДК 517.521.15: 519.212.2

ОЦЕНКА И СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ И КОНЕЧНЫХ СУММ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА ПРИ ПОМОЩИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Величко И.Г., ст. преподаватель, Зиновеев И.В., ст. преподаватель, Зиновеева О.В*., преподаватель, Яресько Е.В., студент

Запорожский государственный университет
** Запорожский авиационный колледж им. Івченко А.Г.*

В данной работе доказано новое алгебраическое тождество $\sum_{k=1}^{n}\left(p_k \prod_{i=1}^{k-1}(1-p_i)\right)+\prod_{j=1}^{n}(1-p_j)=1$, где $p_s \in R$. Придавая p_k произвольные значения, из него получены как известные, так и новые тождества. Для случая, когда все $p_k \in [0;1]$, строится вероятностное пространство, в котором первая сумма в данном равенстве есть вероятность наступления некоторого события. При $n \to \infty$, вместо конечной суммы получаем ряд, который сходится, и его сумма меньше или равна единице. Найдены достаточные условия, когда сумма этого ряда в точности равна 1, а так же получены оценки сумм некоторых рядов.

Ключевые слова: ряды, ряды специального вида, сумма ряда, вероятностное пространство, событие, вероятность события, сходимость ряда, условия сходимости ряда.

Величко І.Г., Зіновєєв І.В., Зіновєєва О.В.*, Яресько О.В., ОЦІНКА ТА ПІДСУМОВУВАННЯ РЯДІВ І КІНЦЕВИХ СУМ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ ЗА ДОПОМОГОЮ ТЕОРІЇ ІМОВІРНОСТЕЙ / Запорізький державний університет, * Запорізький авіаційний коледж ім. Івченка О.Г., Україна

У даній роботі доведене нова алгебраїчна тотожність $\sum_{k=1}^{n}\left(p_k \prod_{i=1}^{k-1}(1-p_i)\right)+\prod_{j=1}^{n}(1-p_j)=1$, де $p_s \in R$. Надаючи p_k довільні значення, із нього отримані як відомі, так і нові тотожності. Для випадку, коли усі $p_k \in [0;1]$, будується імовірносний простір, у якому перша сума в даній рівності є імовірність настання деякої події. При $n \to \infty$, замість кінцевої суми одержуємо ряд, що сходиться, і його сума менше або дорівнює одиниці. Знайдено достатні умови, коли сума цього ряду в точності дорівнює 1, а так само отримані оцінки сум деяких рядів.

Ключові слова: ряди, ряди спеціального вигляду, сума ряду, імовірнісний простір, подія, імовірність події, збіжність ряду, умови збіжності ряду.

Velichko I. G., Zinoveyev I. V., Zinoveyeva O. V.*, Yaresko E. V. ESTIMATION AND TOTING OF A SERIES AND TERMINATING TOTALS SPECIAL VIEW THROUGH PROBABILITY THEORY / Zaporozhye state university, * Zaporozhye air college by him. Ivchenko A. G.

In sectional operation the new algebraic identity $\sum_{k=1}^{n}\left(p_k \prod_{i=1}^{k-1}(1-p_i)\right)+\prod_{j=1}^{n}(1-p_j)=1$, where $p_s \in R$ is proved. Adding p_k the arbitrary values, from it are obtained both known, and new identities. For a case, when all $p_k \in [0;1]$, is created probability space, in which the first total in sectional equality is probability of approach of some event. At $n \to \infty$, instead of the terminating total we gain a series, which converges, and its total less or is equal to unity. The sufficient requirements are retrieved, when the total of this series is equal precision 1, and as the estimation of the totals of some series are obtained.

Keywords: a series, series of a special view, total of a series, probability space, event, probability of occurrence of event, convergence of a series, requirement of convergence of a series.

Рассмотрим задачу теории вероятности: *имеется бесконечное (счетное) количество занумерованных автоматов, каждый из которых может находиться в одном из двух состояний: А или Б. Опыт состоит в том, что автоматы по очереди проверяются, и опыт заканчивается, когда обнаруживается автомат, находящийся в состоянии А. Требуется найти вероятность того, что опыт закончится.*

Обозначим через H событие, что опыт закончится. Событие, состоящее в том, что опыт закончится до испытания $n+1$-го автомата (событие H^n), состоит из следующих событий: опыт закончится после испытания первого автомата (событие H_1), опыт закончится после испытания второго автомата (событие H_2),…, опыт закончится после испытания n-го автомата (событие H_n), т.е. $H^n = H_1 + H_2 + \ldots + H_n$. В силу несовместности событий $H_1, H_2, ..., H_n$ можем записать, что $p\left(H^n\right) = \sum_{i=1}^{n} p(H_i)$ [1]. Обозначим через p_i - вероятность того, что i-й автомат находится в состоянии А, тогда вероятность того, что этот автомат находится в состоянии В, равна $q_i = 1 - p_i$. Событие H_k состоит в том, что первые $k-1$ автоматов находятся в состоянии В, а k-й автомат находится в состоянии А, и вероятность наступления события H_k вычисляется по формуле $p(H_k) = q_1 q_2 ... q_{k-1} p_k$. Отсюда, $p\left(H^n\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(p_k \prod_{i=1}^{k-1} (1 - p_i) \right)$. С другой стороны, найдем $p\left(\overline{H^n}\right) = \prod_{j=1}^{n} (1 - p_j)$. Так как $p\left(H^n\right) + p\left(\overline{H^n}\right) = 1$ [1], то отсюда

$$\sum_{k=1}^{n} \left(p_k \prod_{i=1}^{k-1} (1 - p_i) \right) + \prod_{j=1}^{n} (1 - p_j) = 1 . \qquad (1)$$

Хотя эти рассуждения проведены только для случая, когда $p_i \in [0;1]$, можно показать, что тождество (1) верно и для произвольных действительных (и даже комплексных) чисел. Это легко доказывается при помощи метода математической индукции.

Теперь мы хотим от конечных сумм перейти к рядам. Введем в рассмотрение следующие понятия:

А – последовательность – последовательность $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ действительных чисел, где все $p_i \in [0;1]$.

Рассмотрим последовательность $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ действительных чисел, каждое из которых определяется по правилу $b_k = p_k \prod_{i=1}^{k-1} (1 - p_i) = p_k \prod_{i=1}^{k-1} q_i$, где p_i - элементы А- последовательности. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в равенстве (1) получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(p_k \prod_{i=1}^{k-1} (1 - p_i) \right) = 1 - \prod_{j=1}^{\infty} (1 - p_j), \qquad (2)$$

или, в других обозначениях

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = 1 - \prod_{s=1}^{\infty} q_s .$$

Левую часть этого равенства будем называть *А - рядом А - последовательности*. Из определения сразу следуют:

Предложение 1. Для любой А- последовательности ее А - ряд сходится, и его сумма меньше или равна 1.

Предложение 2. Если хотя бы одно из p_i в А- последовательности равно 1, то сумма А - ряда равна 1.

Менее очевиден следующий факт:

Предложение 3. Если А- последовательность не стремится к нулю, то сумма А - ряда в точности равна 1.

Доказательство. Для доказательства сделаем три замечания:

Замечание первое: Если все p_i в А- последовательности равны между собой, и равны, например p, то ряд (2) превращается в сумму убывающей геометрической прогрессии:

$$p + qp + q^2 p + ... + q^n p + ... = p\left(1 + q + q^2 + ...\right) = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1, \quad p \neq 0 ,$$

и его сумма равна 1.

Замечание второе: Наряду с одним набором автоматов мы рассмотрим другой набор автоматов, обладающих тем свойством, что вероятность нахождения каждого автомата из второго набора в состоянии А меньше соответствующей вероятности для автомата из первой серии под тем же номером. Тогда вероятность наступления события H^n для автоматов первой серии не меньше вероятности наступления события H^n для автоматов второй серии.

Замечание третье: Добавление между двумя автоматами любого конечного числа автоматов с нулевой вероятностью нахождения в состоянии А не влияет на величину вероятности наступления события H, так как это добавление эквивалентно добавлению в сумму (2) соответствующего количества нулей.

Теперь перейдем к доказательству предложения 3. Напомним, что если А- последовательность $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ не стремится к нулю, то существует такое $\varepsilon > 0$, что бесконечное число элементов последовательности будут больше ε (так как все p_i неотрицательны). Наряду с исходным набором автоматов рассмотрим второй набор автоматов, обладающих следующим свойством: вероятность нахождения автомата в состоянии А равна ε, если вероятность соответствующего автомата из первой серии больше, чем ε, и равна нулю, если вероятность соответствующего автомата меньше или равна ε. В этом случае вероятности для автоматов из второго набора меньше или равны соответствующих вероятностей для автоматов первого набора. Мы попадаем в условия второго замечания, и отсюда делаем вывод, что вероятность для наступления события H для первого набора не меньше вероятности события H для второго набора.

Рассмотрим третий набор, отличающийся от второго набора лишь отсутствием автоматов с нулевой вероятностью нахождения в состоянии А. По третьему замечанию вероятность наступления события H для автоматов второго и третьего набора совпадают. По первому замечанию вероятность наступления события H равна единице (все вероятности равны ε). Подводя итог рассуждениям, получим, что с одной стороны вероятность события H для автоматов исходного набора не меньше единицы, а с другой стороны, она не может превосходить единицы (по предложению 1). Отсюда делаем вывод, что сумма ряда (1), которая равна этой вероятности, тоже равна 1. **Предложение 3 доказано.**

Предложение 3 является частным случаем следующей теоремы:

Теорема. Если для А - последовательности $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \infty$, то сумма ее А - ряда равна 1. Если для А-последовательности $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = c < \infty$, то сумма ее А - ряда меньше 1.

Доказательство. Если $\lim_{i\to\infty} p_i$ не равен нулю или не существует, то $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \infty$ (не выполняется необходимое условие сходимости ряда), и по предложению 3 $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = 1$, т.е. в этом случае теорема выполняется.

Теперь рассмотрим случай, когда $\lim_{i\to\infty} p_i = 0$. Обозначим $S_n = 1 - \sum_{i=1}^{n} b_i = \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i)$.Так как $S_n \geq 0$ и $\{S_n\}$ - убывающая последовательность, то существует $\lim_{n\to\infty} S_n$.

Тогда $\ln \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln S_n = \lim_{n\to\infty} \ln \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \ln(1 - p_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \ln(1 - p_i)$.

Так как $\lim_{i\to\infty} p_i = 0$, то $\lim_{i\to\infty} \frac{\ln(1 - p_i)}{-p_i} = 1$. Поэтому ряды $\sum_{i=1}^{\infty} \ln(1 - p_i)$ и $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$ сходятся или расходятся одновременно. Значит, если $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \infty$, то $\sum_{i=1}^{\infty} \ln(1 - p_i) = -\infty$ и, следовательно, $\ln \lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$, то есть $\lim_{n\to\infty} S_n = 0$.

Если же ряд $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$ -сходящийся, то $\sum_{i=1}^{\infty} \ln(1-p_i) = -c > -\infty$, откуда $\lim_{n\to\infty} S_n = e^{-c} \neq 0$. А так как $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = 1 - \lim_{n\to\infty} S_n$, то отсюда и получаем утверждение теоремы. **Теорема доказана.**

В том случае, кода $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = c$, оценку суммы А- ряда можно уточнить. Так как $-p_i \geq \ln(1-p_i)$, то $\sum_{i=1}^{\infty} \ln(1-p_i) \leq -\sum_{i=1}^{\infty} p_i = -c$, и следовательно $\lim_{n\to\infty} S_n \leq e^{-c}$, откуда $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = 1 - \lim_{n\to\infty} S_n \geq 1 - e^{-c}$, то есть в этом случае

$$1 - e^{-c} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(p_k \prod_{i=1}^{k-1} (1-p_i) \right) \leq 1 \qquad (3)$$

Приведем еще несколько фактов, относящихся к А - рядам.

Предложение 4. Если А- последовательность $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ минорируется некоторой другой А-последовательностью $\{d_i\}_{i=1}^{\infty}$ (то есть для всех i выполняется неравенство $1 \geq p_i \geq d_i \geq 0$), и для последовательности $\{d_i\}_{i=1}^{\infty}$ А - ряд сходится к 1, то для последовательности $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ ее А - ряд сходится к 1.

Предложение 4 - следствие второго замечания.

Предложение 5: Если в А - последовательности $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$, для которой сумма ее А - ряда равна S, отбросить первый член (если он не равен единице), и для полученной последовательности снова подсчитать сумму S' ее А- ряда, то эта сумма будет вычисляться по формуле $S' = \frac{S - p_1}{1 - p_1}$. В частности, если $S = 1$, то сумма нового ряда также равна 1.

Доказательство. Обозначим через $G_i\left(\overline{G_i}\right)$ событие, что i -й автомат находится в состоянии А (Б), а через $\widetilde{H}$ - событие, что опыт закончится позже, чем после испытания первого автомата. Тогда сумма нового ряда, полученного из исходного отбрасыванием первого члена, есть вероятность события $\widetilde{H}$. Используя аппарат теории вероятностей, можем записать равенство $p(H) = p(G_1) + p\left(\overline{G_1}\widetilde{H}\right)$. В силу независимости событий $\overline{G_1}$ и $\widetilde{H}$ будем иметь $p(H) = p(G_1) + (1 - p(G_1))p\left(\widetilde{H}\right)$. Подставляя численные значения, получим равенство $S = p_1 + (1 - p_1)S'$, откуда и следует утверждение теоремы.

Следствие. Если для А - последовательности $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ ее А - ряд сходится к единице, то отбрасывание и добавление к этой последовательности конечного числа неединичных элементов не меняет суммы получаемого А - ряда для новой последовательности.

Доказательство состоит в применении к исходному ряду конечное число раз предыдущего предложения, а также того факта, что добавление конечного числа автоматов не уменьшает вероятности события H, и если событие H достоверное, то и итоговая вероятность так же равна 1.

Предложение 6: Пусть задан А - ряд, тогда элементы $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ соответствующей А- последовательности определяются по формуле $p_i = \frac{a_i}{1 - S_{i-1}}$, где $a_i, S_i, i = 1,2,...$ - элементы и частичные суммы А- ряда соответственно.

Доказательство легко проводится при помощи метода математической индукции.

Предложение 7: Если сумма некоторого неотрицательного ряда $\sum_i a_i$ не превосходит 1, то $\sum_i a_i$ - есть сумма А - ряда для некоторой А- последовательности.

Доказательство. Так как ряд неотрицателен и его сумма не превосходит 1, то для всех частичных сумм ряда верно $S_i \le 1, i = 1,2,\ldots$. Учитывая, что $S_i = S_{i-1} + a_i$ получим

$$0 \le S_{i-1} + a_i \le 1 \Rightarrow 1 - S_{i-1} \ge a_i \Rightarrow 0 \le \frac{a_i}{1 - S_{i-1}} \le 1,\ p_i = \frac{a_i}{1 - S_{i-1}},\ p_i \in [0,1].$$

Приведем несколько иллюстрирующих **примеров.**

Начнем с примеров получения тождеств для конечных сумм.

Пример 1. Пусть $p_k = \frac{k}{n}, k = \overline{1,n}$, тогда $q_k = 1 - p_k = \frac{n-k}{n}$, $b_k = p_k \prod_{i=1}^{k-1} q_i = \frac{k}{n} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{n-i}{n} = \frac{k(n-1)!}{(n-k)!\,n^k}$,

$\prod_{k=1}^{n} q_k = \prod_{k=1}^{n} \frac{n-k}{n} = 0$ и по формуле (1) **получаем тождество** $\sum_{k=1}^{n} \frac{k(n-1)!}{(n-k)!\,n^k} = 1$.

Пример 2. Пусть $p_k = \frac{n-k}{n}, k = \overline{1,n}$, тогда $q_k = 1 - p_k = \frac{k}{n}$, $b_k = p_k \prod_{i=1}^{k-1} q_i = \frac{n-k}{n} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{i}{n} = \frac{(n-k)(k-1)!}{n^k}$,

$\prod_{k=1}^{n} q_k = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{(n-1)!}{n^{n-1}}$, и по формуле (1) **получаем тождество** $\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-k)(k-1)!}{n^k} = 1 - \frac{(n-1)!}{n^{n-1}}$.

Пример 3. Пусть $p_k = \frac{k}{k+1}, k = \overline{1,n}$, тогда $q_k = 1 - p_k = \frac{1}{k+1}$, $b_k = p_k \prod_{i=1}^{k-1} q_i = \frac{k}{k+1} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i+1} = \frac{k}{(k+1)!}$,

$\prod_{k=1}^{n} q_k = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{(n+1)!}$, и по формуле (1) **получаем тождество** $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.

Пример 4. Пусть $p_k = k+1$, тогда $q_k = 1 - p_k = -k$, $b_k = p_k \prod_{i=1}^{k-1} q_i = (k+1) \prod_{i=1}^{k-1} (-i) = (-1)^{k-1} \frac{(k+1)!}{k}$,

$\prod_{k=1}^{n} q_k = \prod_{k=1}^{n} (-k) = (-1)^n n!$, и по формуле (1) **получаем тождество** $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{(k+1)!}{k} = 1 - (-1)^n n!$.

Теперь несколько примеров вычисления сумм рядов.

Пример 5. Пусть $p_k = \frac{1}{k+1}$, тогда $q_k = 1 - p_k = \frac{k}{k+1}$, $b_k = p_k \prod_{i=1}^{k-1} q_i = \frac{1}{k+1} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{i}{i+1} = \frac{1}{k(k+1)}$**.** Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ – расходящийся, то по доказанной выше теореме **получим равенство** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

Пример 6. Пусть $p_k = \frac{1}{k+2}$ (эта последовательность отличается от предыдущей отбрасыванием первого члена). Тогда $q_k = 1 - p_k = \frac{k+1}{k+2}$, $b_k = p_k \prod_{i=1}^{k-1} q_i = \frac{1}{k+2} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{i+1}{i+2} = \frac{2}{(k+2)(k+1)}$. Так как А- ряд для примера 6 сходится к единице, то по предложению 5 получаем, что $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(k+2)(k+1)} = 1$.

Пример 7. Пусть $p_k = \frac{1}{(k+1)^2}$, тогда $q_k = 1 - p_k = \frac{k(k+2)}{(k+1)^2}$,

$$b_k = p_k \prod_{i=1}^{k-1} q_i = \frac{1}{(k+1)^2} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{i(i+2)}{(i+1)^2} = \frac{(k-1)!(k+1)!}{((k+1)!)^2 \cdot 2} = \frac{1}{2k(k+1)}.$$

Так как $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \frac{\pi^2}{6} - 1$ [2], то по формуле (3)

$$1 - \exp\left(1 - \frac{\pi^2}{6}\right) \approx 0.4753 \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k(k+1)} = \frac{1}{2} \le 1.$$

Таким образом, взяв различные последовательности, можно получить новые тождества и неравенства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боровков Ф.Ф. Теория вероятностей.–М.: Наука, 1986.
2. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1981.