УДК 539.31:517.968.23

АНАЛІЗ ЗАСТОСУВАННЯ ЧИСЕЛЬНОЇ СХЕМИ РОЗРАХУНКУ НА БАЗІ МЕТОДУ КРАЙОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДО КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ У ДВОМІРНІЙ ПОСТАНОВЦІ ТА ЗАДАЧІ ПРО ТРІЩИНУ

Басова А.В., аспірант, Толок В.О., д.т.н., професор

Запорізький державний університет

Задачі пружнього контакту двох тіл та задачі про тріщину у двомірній постановці мають аналітичний розв'язок лише для окремих випадків при врахуванні скінченності розмірів тіл. У цій статті наводиться алгоритм одного з чисельних методів розв'язання таких задач. Наведені результати розрахунку для деяких конфігурацій, а також порівняння чисельних результатів розрахунків з аналітичними розв'язками, ті що маємо.

Ключові слова: контактна пружня задача, задача про тріщину, напруження, переміщення, метод крайових елементів, ітерація.

Басова А.В., Толок В.А. АНАЛИЗ ПРИМЕНЕНИЯ ЧИСЛЕННОЙ СХЕМЫ РАСЧЕТА НА БАЗЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ В ДВУХМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ И ЗАДАЧЕ О ТРЕЩИНЕ. / Запорожский государственный университет, Украина

Задачи упругого контакта двух тел и задачи о трещине в двухмерной постановке имеют аналитические решения лишь для частных случаев при учете конечности размеров тел. В этой статье представлен алгоритм одного из численных методов решения данных задач. Приведены результаты расчетов для некоторых конфигураций, а также сравнение численных результатов расчетов с имеющимися аналитическими решениями.

Ключевые слова: контактная упругая задача, задача о трещине, напряжения, перемещения, метод граничных элементов, итерация.

Basova A.V., Tolok V.A. ANALYSIS OF APPLICATION OF THE CALCULATION NUMERICAL SCHEME BASED ON THE LIMITING ELEMENTS METHOD FOR THE CONTACT PROBLEM IN TWO-DIMENSIONAL STATEMENT AND PROBLEM ABOUT CRACK / Zaporozhye state university, Ukraine

Elastic contact problems of two bodies and problems about crack in two-dimensional problem statement have analytical solvings only for particular cases taking into account finite dimensions of bodies. In this paper there is the algorithm of one of numerical methods for such problem solving. There are results of calculations for some configurations and comparison of numerical results of calculation with available analytical solutions.

Key words: elastic contact problem, problem about crack, stress, displacement, method of boundary elements, iteration.

Контактні задачі теорії пружності та задачі про тріщину мають важливе значення в аналізі задач механіки твердого тіла, що деформується. Особливо тому, що аналітичні розв'язки таких задач існують лише для окремих випадків при врахуванні скінченності розмірів тіл, або мають складне математичне формулювання та потребують уточнення. В цій статті приведено застосування ітераційного методу[5] на основі чисельних методів для обчислення напружено-деформованого стану на границі контакта та в районі тріщини. За допомогою цього метода можливо створення системи розрахунку на ЕОМ для тіл довільних розмірів.

Для розв'язання лінійної задачі теорії пружності використовується інтегральне рівняння в матричній формі[1]:

$$\frac{1}{2}\mathbf{u}_i + \int_\Gamma \mathbf{p}^* \mathbf{u}\, d\Gamma = \int_\Gamma \mathbf{u}^* \mathbf{p}\, d\Gamma$$

де

$$u^*_{lk} = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)}\left((3-4\nu)\ln\left(\frac{1}{r}\right)\delta_{lk} + \frac{\partial r}{\partial x_l}\frac{\partial r}{\partial x_k} \right)$$

$$p^*_{lk} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r}\left[\frac{\partial r}{\partial n}\left((1-2\nu)\delta_{lk} + 2\frac{\partial r}{\partial x_l}\frac{\partial r}{\partial x_k} \right) + (1-2\nu)\left(\frac{\partial r}{\partial x_l}n_k - \frac{\partial r}{\partial x_k}n_l \right) \right], \quad l,k = 1,2$$

Застосовуючи метод крайових елементів, вважаємо, що значення шуканих зусиль і переміщень постійні на кожному елементі. На границі контакту АВ, що містить N елементів, для І-ої області задаємо

переміщення $u_{1(i)}^{(0)}, u_{2(i)}^{(0)}$, $i = 1,2...N$ (верхній індекс позначає номер ітерації). Після розв'язання задачі для І-го тіла знаходимо значення зусиль на границі контакту: $p_{1(i)}^{(1)}$, $p_{2(i)}^{(1)}$.

У випадку зчеплення тіл, що контактують, другому тілу нормальні зусилля передаються з протилежним знаком, дотичні – з тим же самим. Якщо осі вибрані таким чином, як показано на рис.1, то:

$$p_{1(i)}^{(1)}\Big|_I = p_{1(i)}^{(1)}\Big|_{II},\ p_{2(i)}^{(1)}\Big|_I = -p_{2(i)}^{(1)}\Big|_{II}$$

У випадку відсутності тертя в області контакту:

$$p_{1(i)}^{(1)}\Big|_I = 0,\ p_{2(i)}^{(1)}\Big|_{II} = -p_{2(i)}^{(1)}\Big|_{II}.$$

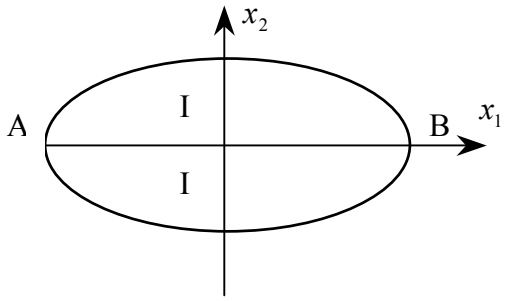


Рис.1. Загальна постановка задачі

Потім, розв'язуючи систему рівнянь для другої області, знаходимо зміщення: $u_{1(i)}^{(1)}, u_{2(i)}^{(1)}$
Алгоритм обчислення можна записати так:

k-а ітерація для І-ої області:

$$\frac{1}{2}\mathbf{u}_i + \int_{AB}\mathbf{p}^*\mathbf{u}^{(k-1)}d\Gamma + \int_{\Gamma_I/AB}\mathbf{p}^*\mathbf{u}d\Gamma = \int_{AB}\mathbf{u}^*\mathbf{p}^{(k)}d\Gamma + \int_{\Gamma_I/AB}\mathbf{u}^*\mathbf{p}d\Gamma$$

де $\mathbf{u}^{(k-1)}$ - відомі величини у вузлових точках границі АВ;

k-а ітерація для ІІ-ої області:

$$\frac{1}{2}\mathbf{u}_i + \int_{AB}\mathbf{p}^*\mathbf{u}^{(k)}d\Gamma + \int_{\Gamma_{II}/AB}\mathbf{p}^*\mathbf{u}d\Gamma = \int_{AB}\mathbf{u}^*\mathbf{p}^{(k)}d\Gamma + \int_{\Gamma_{II}/AB}\mathbf{u}^*\mathbf{p}d\Gamma$$

де $\mathbf{p}^{(k)}$ - відомі величини у вузлових точках границі АВ. Нижче наведені результати розрахунків контактних напружень при вдавлюванні напівкруглого та прямокутного тіла зі збільшенням радіуса другого тіла при умові зчеплення двох тіл. При таких значеннях параметрів: $AB = 1$ *см* $OD = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$ *см*

$$P0 = 2000\ H/см\ \ E_I = 2\cdot 10^6\ H/см^2\ E_{II} = 4\cdot 10^6\ H/см^2$$

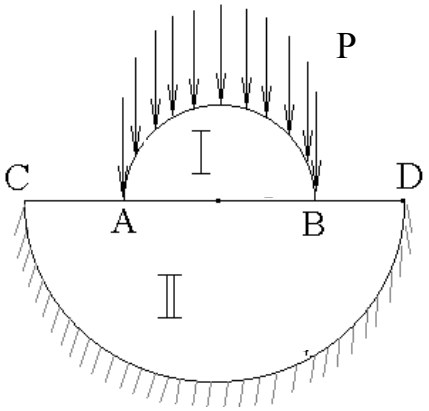


Рис.2. Задача про вдавлювання напівкруглого тіла

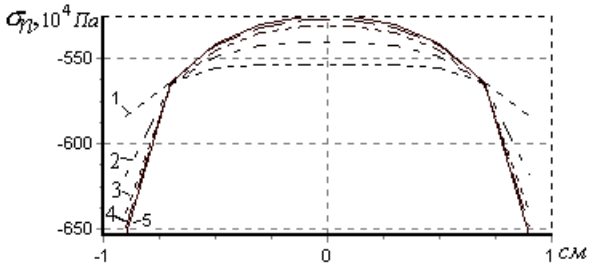


Рис.3.Розподіл нормальних напружень на границі контакта для різних радіусів II-го тіла

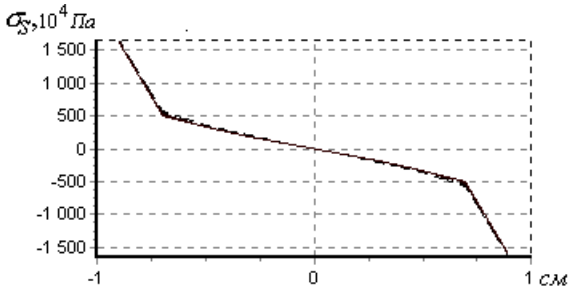


Рис.4. Розподіл дотичних напружень на границі контакта для різних радіусів II-го тіла

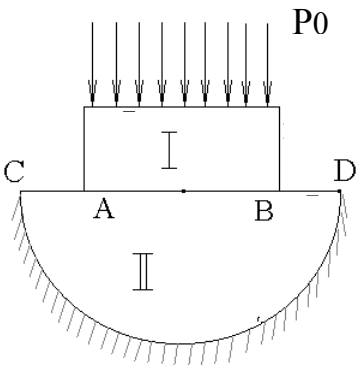


Рис.5 Задача про вдавлювання прямокутого тіла

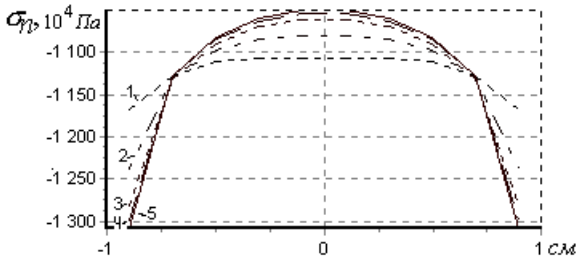


Рис.6. Розподіл нормальних напружень для різних радіусів II-го тіла.

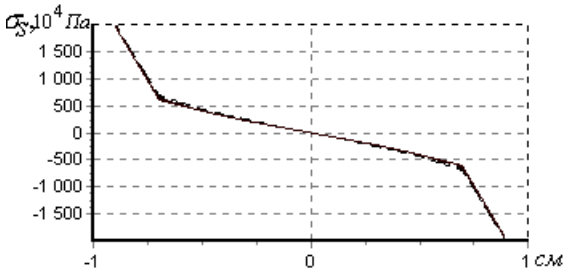


Рис.7. Розподіл дотичних напружень для різних радіусів II-го тіла.

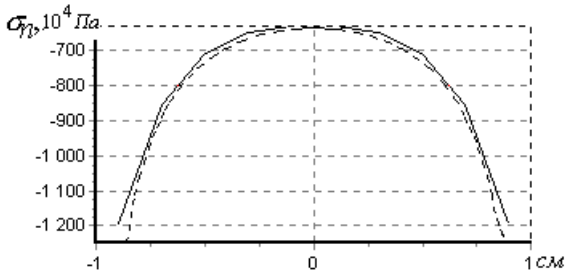


Рис.8. Порівняння чисельного (суцільна крива) та аналітичного розв'язків (пунктирна крива).

З розглянутих задач можна зробити висновок, що існує таке значення радіуса другого тіла, що при подальшому збільшенні цього радіуса контактні напруження і переміщення суттєво змінюватися не будуть. Тобто, якщо діаметр основи перевищує розмір області контакту більше, ніж у 5 разів, то можна моделювати задачу про штамп, який лежить на пружній півплощині. Нижче наведені результати порівняння чисельного розв'язку з точним про вдавлювання штампа у пружну півплощину ($E_I >> E_{II}$) при відсутності сил тертя[2]:

$$\sigma_n(x) = \frac{P}{\pi\sqrt{1-x^2}}$$

Розглянутий ітераційний метод можна застосовувати для розрахунку напружено-деформованого стану в тілі з тріщиною.

Нехай є двомірна задача, яка представлена на рис.9. АО - тріщина, ВО – уявна лінія продовження тріщини.

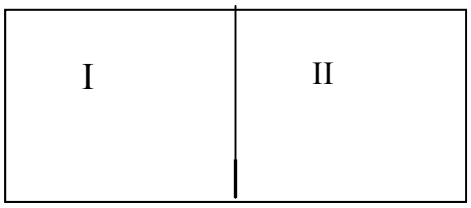


Рис.9. Задача про тріщину

Далі дана задача розбивається на дві: I и II, кожна з яких буде розв'язуватися окремо, а потім знайдені граничні умови на лінії продовження тріщини АО передаються іншій задачі. На берегах тріщини напруження вважаються нульовими.

Для означення напружено-деформованого стану в районі тріщини використовується асимптотичне представлення розв'язку поблизу іррегулярних точок та обчислення перших членів асимптотики [3]:

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$U = 2(1+\nu)\frac{K_I}{E}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-2\nu+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$V = 2(1+\nu)\frac{K_I}{E}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}\left(2-2\nu+\cos^2\frac{\theta}{2}\right)$$

де r – відстань від вершини тріщини до деякої точки тіла

θ – кут між r і та тріщиною

K_I – коефіцієнт інтенсивності, що враховує характер розтягнення та скінченність розмірів.

Нижче наведені приклади розрахунку напружено-деформованого стану для тіл скінченних розмірів і приведені порівняння з асимптотичними розв'язками в районі тріщини[3].

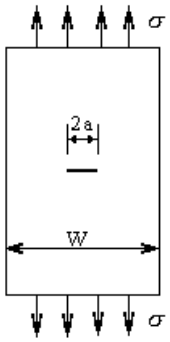
Всі розрахунки проводились при таких значеннях параметрів:

$W = 1\ см$

$a = 0.05;\ 0.1;\ 0.15;\ 0.2;\ 0.25;\ 0.3\ см$

$\sigma = 2000\ Н/см^2$

$E = 2\cdot 10^6\ Н/см^2$



$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}\sec^{1/2}\frac{\pi a}{W}$$

Рис.10. Задача про тріщину. Приклад 1.

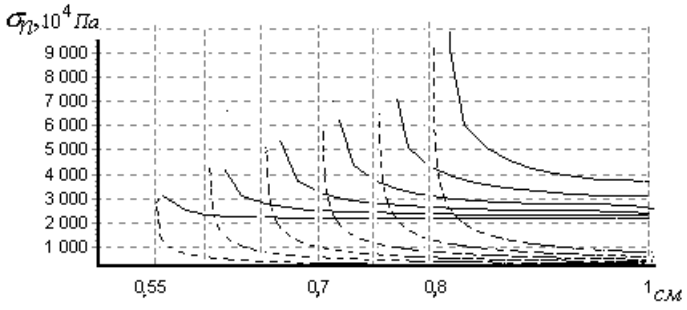


Рис.11. Розподіл нормальних напружень на лінії продовження тріщини (суцільна крива – чисельний розв'язок, пунктирна - аналітичний)

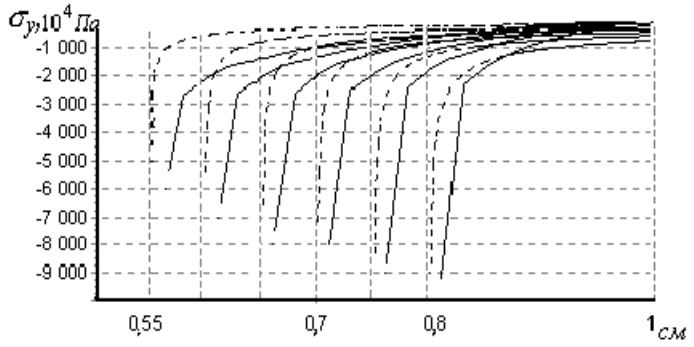
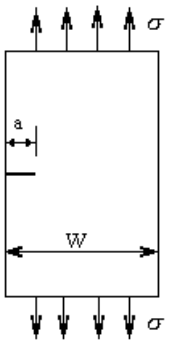


Рис.12. Розподіл напружень σ_y на лінії продовження тріщини (суцільна крива – чисельний розв'язок, пунктирна - аналітичний)



$$K_I = Y\sigma\sqrt{a}$$

де $Y = 1{,}99 - 0{,}41\frac{a}{W} + 18{,}7\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 38{,}48\left(\frac{a}{W}\right)^3 + 53{,}85\left(\frac{a}{W}\right)^4$

Рис.13. Задача про тріщину. Приклад 2.

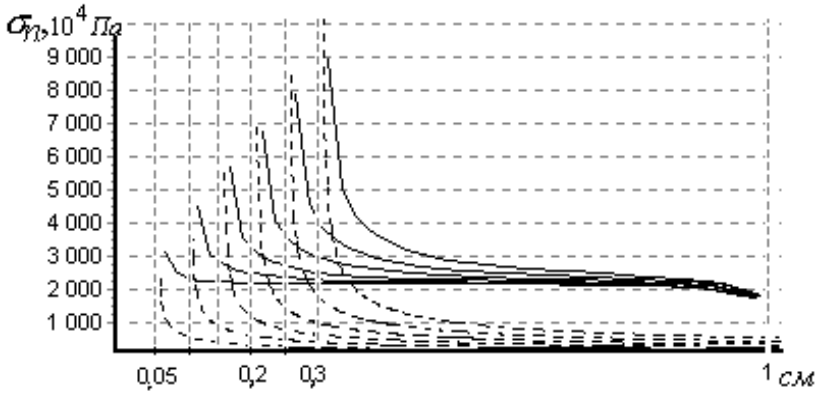


Рис.14. Розподіл нормальних напружень на лінії продовження тріщини (суцільна крива – чисельний розв'язок, пунктирна - аналітичний)

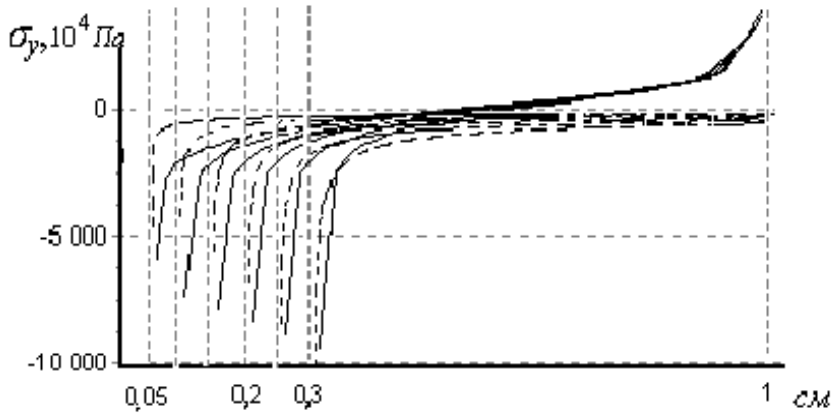
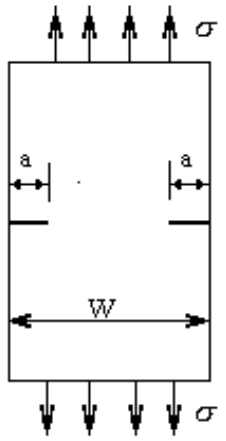


Рис.15. Розподіл напружень σ_y на лінії продовження тріщини (суцільна крива – чисельний розв'язок, пунктирна - аналітичний)



$$K_I = Y\sigma\sqrt{a}$$

де $Y = 1{,}99 + 0{,}76\frac{a}{W} - 8{,}48\left(\frac{a}{W}\right)^2 + 27{,}36\left(\frac{a}{W}\right)^3$

Рис.16. Задача про тріщину. Приклад 3.

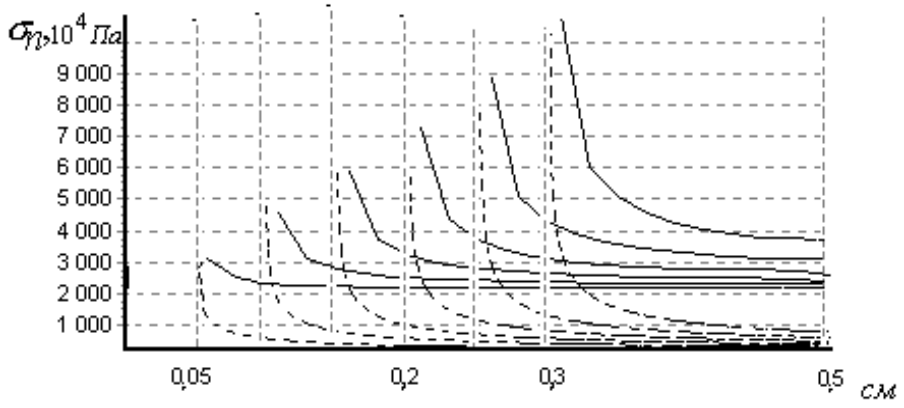


Рис.17. Розподіл нормальних напружень на лінії продовження тріщини (суцільна крива – чисельний розв'язок, пунктирна - аналітичний)

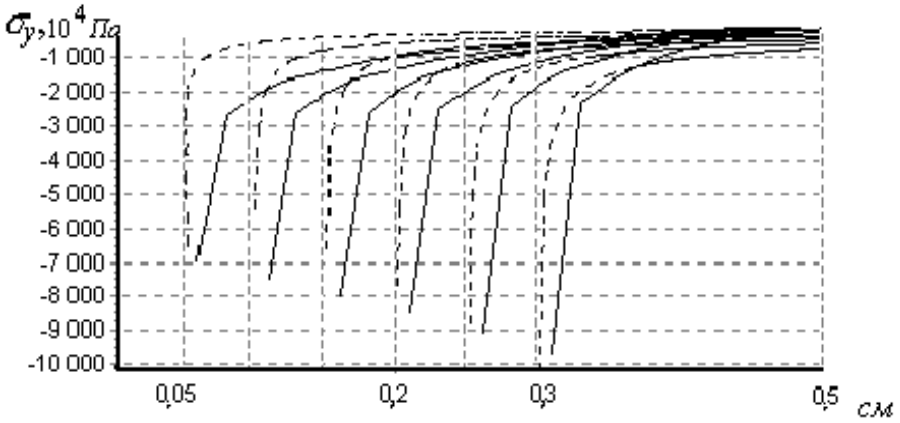


Рис.18. Розподіл напружень σ_y на лінії продовження тріщини (суцільна крива – чисельний розв'язок, пунктирна - аналітичний)

Як можна побачити з наведених прикладів, чисельний розв'язок наближається до аналітичного в районі тріщини. Розподіл нормальних напружень при віддаленні від вершини тріщини значно відрізняється від аналітичного розв'язку, що пояснюється тим, що воно отримане з асимптотичного розкладення, яке вірно лише на малих відстанях від точки розкладення. Також отримані результати чисельної схеми розрахунку узгоджуються з фізичною картиною одноосьового розтягнення, тобто, нормальні напруження на продовженні тріщини прямують до значення прикладених напружень, а не до нуля. Чисельні графіки переміщень, наведені у прикладі 2, мають аналогічний вигляд для всіх розглянутих випадків, також узгоджуються з міркуваннями симетричності поставлених задач.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бреббия К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике. – М.: Мир, 1982. – 248 с.
2. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 304с.
3. Броек Д. Основы механики разрушений. – М.: Высшая школа, 1980. – 368 с.
4. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. – М.: Мир, 1987.– 328 с.
5. Саликіна Н.В., Толок В.О. Застосування методу крайових елементів до розв'язку задачі розрахунку напружено-деформованого стану в районі тріщини // Вісник Запорізького держуніверситету. - 1999.- № 1.-С.97-103.