УДК 62-26:517.95

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ КОЛЕБАНИЙ СТУПЕНЧАТОГО СТЕРЖНЯ С ПОВРЕЖДЕНИЕМ.

Александрова Н.Б., ассистент, Приданцева Е.В., магистр

Запорожский государственный университет

Работа посвящена решению задачи о продольных колебаниях ступенчатого стержня методом Фурье, определению параметров колебания исследуемого стержня, построению диагностической функции, позволяющей определить размер трещины.

Ключевые слова: трещина, частота и период колебаний.

Александрова Н.Б., Приданцева Є.В. ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ КОЛИВАНЬ СХІДЧАСТОГО СТРИЖНЯ З УШКОДЖЕННЯМ / Запорізький державний університет, Україна

Робота присвячена вирішенню задачі про подовжні коливання східчастого стрижня методом Фур'є, визначенню параметрів коливання досліджуваного стрижня, побудові діагностичної функції, що дозволяє визначити розмір тріщини.

Ключові слов: тріщина, частота і період коливань.

Aleksandrova N.B., Pridantseva E.V. DEFINITION OF PARAMETERS OF FLUCTUATIONS OF A STEP CORE WITH DAMAGE / Zporozhye state university, Ukraine

The work is devoted to the decision of a task on longitudinal fluctuations of a step core by a method of parameters of fluctuation of a researched core, construction of diagnostic function allowing to define (determine) the size of a crack.

Key words: crack, frequency and amplitude of vibrations.

Ранее в работах [1, 2, 3] были рассмотрены продольные колебания консольного стержня с повреждением типа трещины. Предполагалось, что наличие повреждения сказывается на упругих свойствах стрежней. При растяжении стержня трещина закрывается, упругие свойства стержня остаются такими же, как и у неповрежденного стержня. При растяжении трещина открывается, и в области влияния трещины изменяются упругие свойства стержня. Таким образом, колебания стержня с повреждением могут быть рассмотрены, как колебания системы с кусочно-постоянными параметрами.

Основываясь на этих предположениях в статье [1] были найдены параметры колебаний простого стрежня с повреждением, в статье [2] – стержня в виде усеченного клина с повреждением. В работе [3] колебания простого стержня с повреждением описываются следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} U_{tt} = a^2 U_{xx}, \\ U_{tt} = a'^2 U_{xx}, \end{cases} \qquad (1)$$

где $a' = a\sqrt{S'/S}$, S – площадь поперечного сечения стержня, S' – площадь неповрежденной части стержня.

Первое уравнение описывает колебания при закрытой трещине, а второе при открытой трещине.

Эта же система уравнений будет описывать колебания ступенчатого стержня (рис. 1), но дополнительно необходимо задать соответствующие начальные и граничные условия.

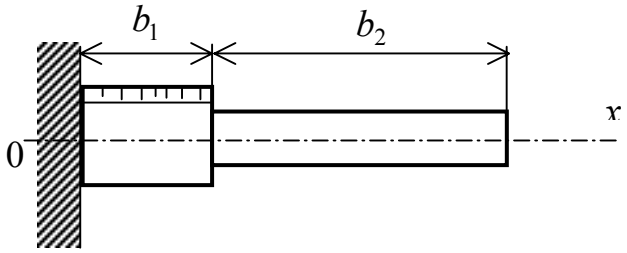

Рис. 1. Ступенчатый стержень с повреждением

Пусть имеется стержень, состоящий из двух участков. Первый участок длиной b_1, имеет площадь поперечного сечения S_1, второй, длиной b_2 имеет площадь поперечного сечения S_2. На первом участке имеется повреждение в виде трещины или группы трещин. Будем считать, что влияние трещины или группы трещин распространяется на весь первый участок. В случае одной трещины это имеет место, если его длина b_1 невелика.

Запишем граничные условия в виде:

$$U(-b_1,t)=U_x(b_2,t)=0. \tag{2}$$

Начальные условия зададим как начальный удар по стержню:

$$U(x,0)=r(x+b_1),\quad U_t(x,0)=0. \tag{3}$$

Рассмотрим решение первого уравнения системы (1) с граничными и начальными условиями (2) и (3). Оно соответствует колебаниям стержня без трещины и имеет вид:

$$U(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos\left(q_n\frac{a_1}{b_1}t\right)\cdot X_n(x), \tag{4}$$

где

$$A_n=\frac{r}{\|x_n\|^2}\frac{b_1^2}{q_n}\left[\cos q_n\frac{b_2a_1}{b_1a_2}\left(\frac{\sin q_n}{q_n}-\cos q_n\right)+\right.$$

$$\left.+\sin q_n\left(\frac{a_2}{a_1}\sin q_n\frac{b_2a_1}{b_1a_2}+\frac{1}{q_n}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2\left(1-\cos q_n\frac{b_2a_1}{b_1a_2}\right)\right)\right],$$

$$\|x\|^2=\frac{1}{2}\left[b_1\cos^2 q_n\frac{b_2a_1}{b_1a_2}+b_2\sin^2 q_n+\right.$$

$$\left.+\frac{b_1}{2q_n}\left(\frac{a_2}{a_1}\sin^2 q_n\sin\frac{2q_na_1b_2}{b_1a_2}-\sin 2q_n\cos^2 q_n\frac{b_2a_1}{b_1a_2}\right)\right],$$

$$X_n(x)=\frac{1}{\sin q_n\cos q_n\dfrac{b_2a_1}{b_1a_2}}\cdot\begin{cases}\cos q_n\dfrac{b_2a_1}{b_1a_2}\sin\dfrac{q_n}{b_1}(b_1+x),\ x\in(-b_1,0),\\ \cos q_n\dfrac{b_2a_1}{b_1a_2}(b_2-x)\sin q_n,\ x\in(0,b_2).\end{cases}$$

Собственные значения определяются из уравнения:

$$S_2 a_1 tg\, q = S_1 a_2 ctg\, q \frac{b_2 a_1}{b_1 a_2}.$$

Решение при открытой трещине имеет аналогичный вид, но изменяется скорость распространения волны на первом участке a_1', площадь поперечного сечения этого участка S' и собственные значения q_n'. Собственные значения будут определяться из уравнения:

$$S_2 a_1' tg\, q' = S_1' a_2 ctg\, q' \frac{b_2 a_1'}{b_1 a_2}.$$

Общее решение задачи примет вид:

$$U(x,t) = \begin{cases} U(x,t,a_1,a_2,S_1,S_2,q_n), & -\dfrac{\pi b_1}{2q_0 a_1} < t < \dfrac{\pi b_1}{2q_0 a_1}, \\ U(x,t,a_1',a_2,S_1',S_2,q_n'), & \dfrac{\pi b_1}{2q_0 a_1} < t < \dfrac{3\pi b_1}{2q_0' a_1'}. \end{cases} \tag{5}$$

Разложим полученное решение в ряд Фурье, на периоде $T = \dfrac{\pi b_1}{2q_0 a_1} + \dfrac{3\pi b_1}{2q_0' a_1'}$, по частоте $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{4\omega_0 \omega_0'}{3\omega_0 + \omega_0'}$, где $\omega_0 = \lambda_0$, $\omega_0' = \lambda_0'$. Коэффициенты этого разложения определим с помощью формул:

$$h_k = \frac{2}{T} \int_{-\pi/2\omega_0}^{3\pi/2\omega_0'} U(x,t) \cos k\omega t dt, \quad f_k = \frac{2}{T} \int_{-\pi/2\omega_0}^{3\pi/2\omega_0'} U(x,t) \sin k\omega t dt.$$

Получим:

$$h_k = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left[X_n(x,a_1,q_1) \left(\frac{2\sin(\lambda_n - k\omega)\frac{\pi}{2\omega_0}}{\lambda_n - k\omega} + \frac{2\sin(\lambda_n + k\omega)\frac{\pi}{2\omega_0}}{\lambda_n + k\omega} \right) + \right.$$

$$+ X_n(x,a_1',q_1') \left(\frac{\sin(\lambda_n' - k\omega)\frac{3\pi}{2\omega_0'} - \sin(\lambda_n' - k\omega)\frac{\pi}{2\omega_0}}{\lambda_n' - k\omega} + \right. \tag{6}$$

$$\left. \left. + \frac{\sin(\lambda_n' + k\omega)\frac{3\pi}{2\omega_0'} - \sin(\lambda_n' + k\omega)\frac{\pi}{2\omega_0}}{\lambda_n' + k\omega} \right) \right],$$

$$f_k = -\frac{1}{T}\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left[X_n(x, a_1, q_1) \left(\frac{\cos(\lambda'_n + k\omega)\frac{3\pi}{2\omega'_0} - \cos(\lambda'_n + k\omega)\frac{\pi}{2\omega_0}}{\lambda'_n + k\omega} \right) + \right.$$

$$\left. + X_n(x, a'_1, q'_1) \left(\frac{\cos(-\lambda'_n + k\omega)\frac{3\pi}{2\omega'_0} - \cos(\lambda'_n + k\omega)\frac{\pi}{2\omega_0}}{\lambda'_n + k\omega} \right) \right]. \quad (7)$$

Таким образом, получено решение задачи о продольных колебаниях ступенчатого стержня с повреждением в виде ряда Фурье. Исследуем параметры этого ряда.

На рис. 2 представлен сравнительный график колебания по первой гармонике для системы без повреждения и при наличии повреждения.

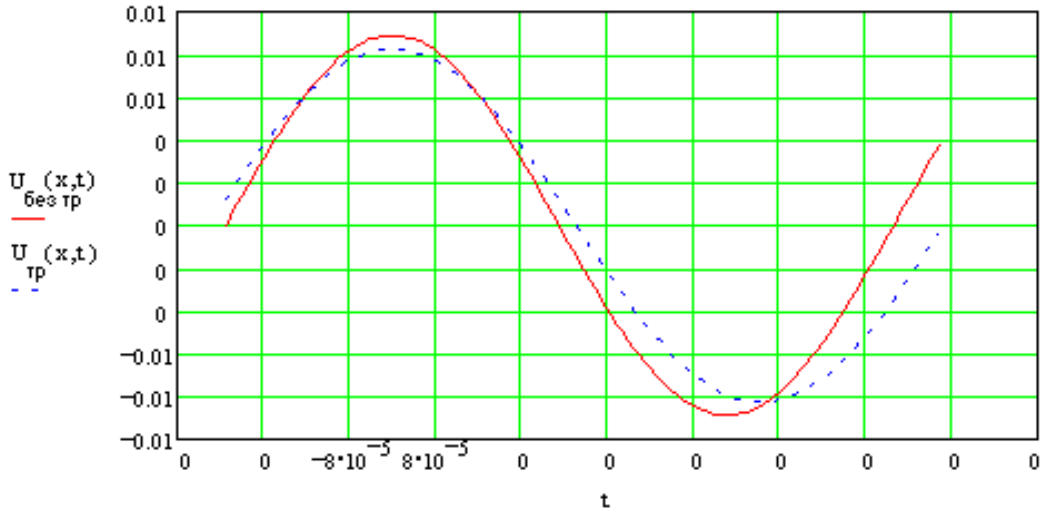

Рис. 2. Сравнительный график колебаний стержня с повреждением и без повреждения

Для исследования влияния высших гармоник на амплитуду колебаний первой гармоники рассмотрим следующую диагностическую функцию:

$$Z_d = \frac{\sqrt{h_d^2 + f_d^2}}{\sqrt{h_1^2 + f_1^2}} \quad (8)$$

На рис. 3 представлено изменение функции влияния амплитуды второй гармоники на амплитуду первой гармоники в зависимости от величины повреждения первой части стержня. Как видно из графика значение функции растет с ростом повреждения стержня.

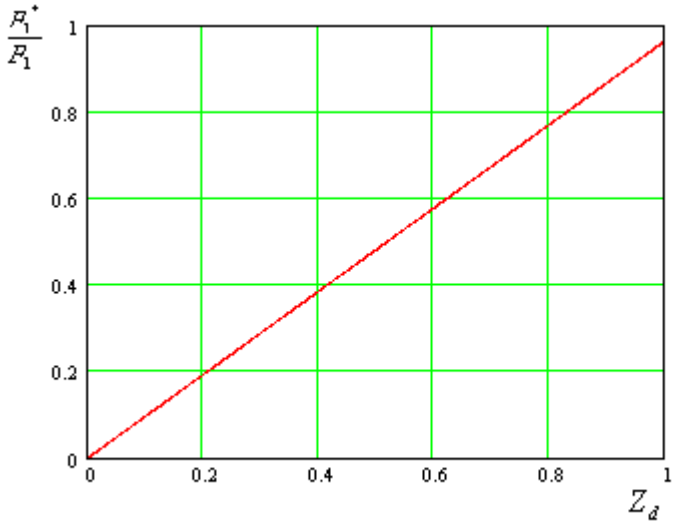

Рис. 3. Влияния амплитуды второй гармоники на амплитуду первой гармоники в зависимости от величины повреждения.

Выводы. Решена задача о продольных колебаниях ступенчатого стержня с повреждением. Решение получено в виде рядов Фурье. Исследована зависимость влияния амплитуды второй гармоники на амплитуду первой гармоники от величины повреждения. Это влияние будет расти с увеличением глубины повреждения первой части стержня. Построен график такой зависимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ройтман А. Б. Продольные колебания упругого тела с трещиной // Доповіді Національної академії наук України. – 1999. – № 8. – С. 65-68.
2. Ройтман А.Б., Александрова Н.Б., Морозюк В.А. Подовжні коливання консольного стрижня, який має форму чотиригранної піраміди, з поперечною тріщиною, що “дихає” // Вісник Запорізького державного університету. – 2000. – № 1. – С. 133-141.
3. Ройтман А. Б., Александрова Н. Б. Аналитическая оценка асимметрии цикла при продольных колебаниях упругого стержня с поперечной трещиной // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 1999. – № 1. – С. 95-97.