УДК 620.1

ВПЛИВ УШКОДЖЕНЬ ТИПУ ТРІЩИН НА ПОДОВЖНІ КОЛИВАННЯ СТРИЖНЯ

Александрова Н.Б., асистент

Запорізький державний університет

У статті розглянуті подовжні коливання стрижня із довільно розташованим ушкодженням типу тріщини. Наявність тріщини ослабляє пружні властивості стрижня в певному його об'ємі. Це позначається при проходженні хвилі деформації в стрижні і змінює частоту й амплітуду коливань. Знайдено вираз які описує рух перетинів стрижня на різних частинах періоду коливань. Отримано розв'язок поставленої задачі у вигляді ряду Фур'є. По знайденому розв'язку побудований графік зміни частоти коливань залежно від розміру тріщини. Зроблено порівняння отриманих результатів з опублікованими в літературі.

Ключові слова тріщина, швідкісить проходження хвилі, частота і період коливань.

Александрова Н.Б ВЛИЯНИЕ ПОВРЕЖДЕНИЙ ТИПА ТРЕЩИН НА ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ / Запорожский государственный университет

В статье рассмотрены продольные колебания стержня с произвольно расположенным повреждением типа трещины. Наличие трещины ослабляет упругие свойства стержня в некотором его объеме. Это сказывается при прохождении волны деформации в стержне и изменяет частоту и амплитуду колебаний. Найдены выражения описывающие движение сечений стержня на различных частях периода. Получено решение поставленной задачи в виде ряда Фурье. По найденному решению построен график изменения частоты колебаний в зависимости от величины трещины. Произведено сравнение полученных результатов с опубликованными в литературе.

Ключевые слова: трещина, скорость прохождения волны, частота и период колебаний.

Alexandrova N.B "EFFECT OF CRACK-TYPE DEFECTS ON LONGITUDINAL CORE VIBRATIONS" / Zaporozhye state university

Longitudinal core vibrations with arbitrary located crack-type defects are considered in the article. The crack reduces the elastic properties of the core in some of its volume. It tells on the passage of the deformation wave in the core and changes the frequency and the amplitude of vibrations. Their expressions have been discovered which describe the movement of core section at different parts of the period. The solutions of the problem have been received in the form of Fourier series. Based on the found decision the graph of the change of vibration frequency depending on the size of the crack has been plotted. The received results have been compared to those published in the literature.

Key words: crack, velosityof passage of a wave, frequency and amplitude of vibrations.

1. ВСТУП

Раніше в роботах [1, 2] розглянуті подовжні коливання стрижня із тріщиною, що "дихає", у защемленні. На основі результатів отриманих у цих статтях розглянемо подовжні коливання стрижня із довільно розташованим ушкодженням типу тріщини. Будемо при цьому припускати, що при розтяганні стрижня, наявність ушкодження послабить його пружні властивості в деякому об'ємі. Це вплине на частоту і амплітуду коливань.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ І ЇЇ РОЗВ'ЯЗОК

Розглянемо стрижень із тріщиною. Вплив тріщини на пружні властивості стрижня, як показано на рис. 1, буде обмежено прямокутником із сторонами Δ і Δ_1. Таким чином, стрижень із тріщиною, на розтягання, можна представити як складений стрижень, область із тріщиною буде замінена ділянкою стрижня меншого поперечного перетину. До того ж, якщо площа квадратного перетину стрижня $S = a^2$, тоді площа ділянки стрижня $S' = a(a - \Delta_1)$. Величина Δ_1, відповідно до статті [3], визначається за формулою $\Delta_1 = 4/3h_1$. Для стрижня довільного перетину розраховується площа S, з урахуванням глибини впливу тріщини. Розмір ділянки стрижня Δ залежить від глибини тріщини і вибирається відповідно до формул, наведених у статті [3], а саме $\Delta = 2{,}5d$. При стиску стрижня тріщина закрита, і стрижень поводиться як не ушкоджений. Таким чином, стрижень із тріщиною, на розтягання, заміняється системою, поданою на рис. 2.

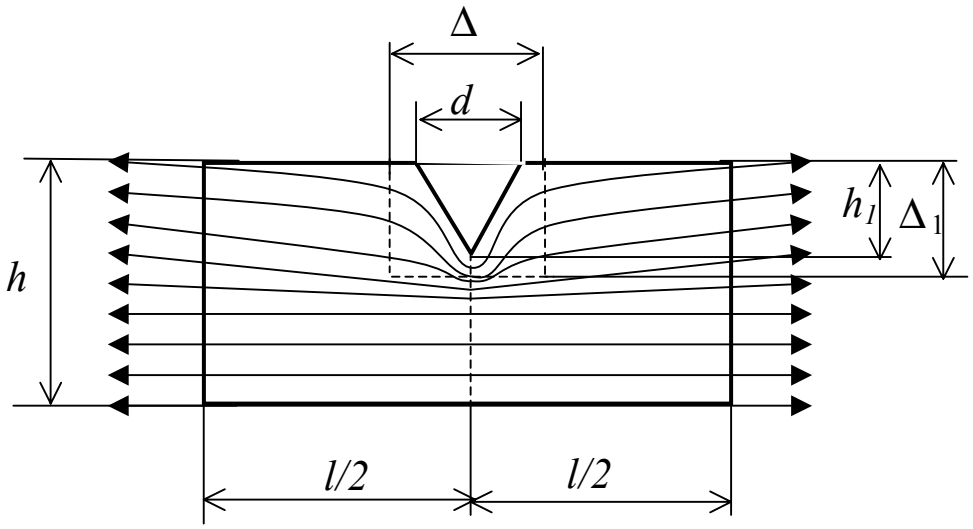

Рис. 1. . Моделювання зони впливу розкриття при розтягненні балки.

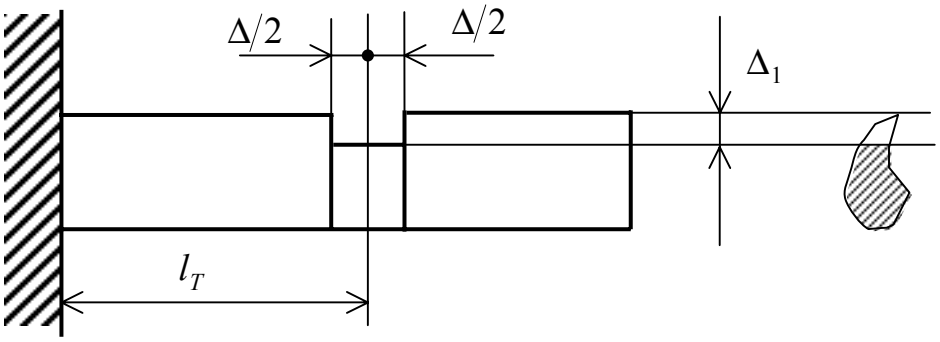

Рис. 2. Моделювання стрижня з довільно розташованою тріщиною.

Рух перетинів такого стрижня буде описуватися системою рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{S'}{S} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \end{cases} \tag{1}$$

Перше рівняння описує стиск стрижня і розтягання ділянок, на які тріщина не впливає. Друге рівняння описує ділянку із тріщиною при розтяганні.

Для спрощення припустимо, що граничні умови однакові для обох рівнянь і мають вигляд:

$$U(0,t) = 0, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=l} = 0. \tag{2}$$

Тоді, після застосування методу відокремлення змінних, розв’язок можна шукати у вигляді:

$$\begin{cases} U(x,t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}A_k\cos\left(\dfrac{2k+1}{2l}\pi at+\alpha_k\right)\sin\dfrac{2k+1}{2l}\pi x, \\ U(x,t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}A'_k\cos\left(\dfrac{2k+1}{2l}\pi a't+\alpha'_k\right)\sin\dfrac{2k+1}{2l}\pi x. \end{cases} \tag{3}$$

Для знаходження невідомих необхідно задати початкові умови. Вони будуть різними для різних ділянок стрижня.

Нехай загальна початкова умова:

$$U(x,0)=rx,\quad \left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0}=0. \tag{4}$$

Розглянемо, у яких випадках рух системи буде визначатися першим рівнянням системи (3), а в яких другим.

Спочатку розтягнутий стрижень має відкриту тріщину. Розглянувши рух хвилі по стрижню, отримаємо наступні ділянки руху перетинів:

1. $\left[0;\dfrac{2l-2l_T-\Delta}{2a}\right]$
2. $\left[\dfrac{2l-2l_T-\Delta}{2a};\dfrac{2l-2l_T-\Delta}{2a}+\dfrac{\Delta}{a'}\right]$
3. $\left[\dfrac{2l-2l_T-\Delta}{2a}+\dfrac{\Delta}{a'};\dfrac{l-\Delta}{a}+\dfrac{\Delta}{a'}\right]$
4. $\left[\dfrac{l-\Delta}{a}+\dfrac{\Delta}{a'};\dfrac{2l-\Delta}{a}+\dfrac{\Delta}{a'}\right]$ (5)
5. $\left[\dfrac{2l-\Delta}{a}+\dfrac{\Delta}{a'};\dfrac{3l-\Delta}{a}+\dfrac{\Delta}{a'}\right]$
6. $\left[\dfrac{3l-\Delta}{a}+\dfrac{\Delta}{a'};\dfrac{6l+2l_T-3\Delta}{2a}+\dfrac{\Delta}{a'}\right]$
7. $\left[\dfrac{6l+2l_T-3\Delta}{2a}+\dfrac{\Delta}{a'};\dfrac{6l+2l_T-3\Delta}{2a}+\dfrac{2\Delta}{a'}\right]$
8. $\left[\dfrac{6l+2l_T-3\Delta}{2a}+\dfrac{2\Delta}{a'};\dfrac{4l-2\Delta}{a}+\dfrac{2\Delta}{a'}\right]$

На ділянках 1,3,4,5,6,8, рух описується першим рівнянням системи (3) і, оскільки ділянки 3,4,5,6 йдуть підряд, їх можна об'єднати в одну ділянку, а на ділянках 2,7 рух описується другим рівнянням.

Період коливань $T=\dfrac{4l-2\Delta}{a}+\dfrac{2\Delta}{a'}$, тоді основна частота визначається виразом:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi aa'}{a\Delta+(2l-\Delta)a'}. \tag{6}$$

Почнемо розв'язання з першої ділянки. Підставимо в перше рівняння системи (3) початкові умови (4), отримаємо вираження руху перетинів на першій ділянці періоду:

$$U_1(x,t)=\frac{8rl}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2l}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}. \tag{7}$$

Подальше розв'язання ведеться методом припасування, тобто умови на кінці попередньої ділянки є початковими для наступної ділянки. Таким чином, отримані ще чотири вираження, які відповідають руху перетинів стрижня на різних ділянках періоду.

$$U_2(x,t)=\frac{8rl}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}B_2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi a' t}{2l}+\alpha_2\right)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\ , \tag{8}$$

$$B_2=\sqrt{\cos^2\frac{(2k+1)\pi(2l-2l_T-\Delta)}{4l}+\frac{a^2}{a'^2}\sin^2\frac{(2k+1)\pi(2l-2l_T-\Delta)}{4l}},$$

$$\alpha_2=arctg\left(\frac{a}{a'}tg\frac{(2k+1)\pi(2l-2l_T-\Delta)}{4l}\right)-\frac{(2k+1)\pi a'(2l-2l_T-\Delta)}{4al}.$$

$$U_3(x,t)=\frac{8rl}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}B_2B_3\cos\left(\frac{(2k+1)\pi a t}{2l}+\alpha_3\right)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\ , \tag{9}$$

$$B_3=\sqrt{\cos^2\beta_3+\frac{a'^2}{a^2}\sin^2\beta_3}\ ,\ \alpha_3=arctg\left(\frac{a'}{a}tg\beta_3\right)-\frac{(2k+1)\pi a}{2l}\left(\frac{\Delta}{a'}+\frac{2l-2l_T-\Delta}{2l}\right),$$

$$\beta_3=\frac{(2k+1)\pi a'}{4l}\left(\frac{\Delta}{a'}+\frac{2l-2l_T-\Delta}{2l}\right)+\alpha_2.$$

$$U_4(x,t)=\frac{8rl}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}B_2B_3B_4\cos\left(\frac{(2k+1)\pi a' t}{2l}+\alpha_4\right)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\ , \tag{10}$$

$$B_4=\sqrt{\cos^2\beta_4+\frac{a^2}{a'^2}\sin^2\beta_4}\ ,\ \alpha_4=arctg\left(\frac{a}{a'}tg\beta_4\right)-\frac{(2k+1)\pi a'}{2l}\left(\frac{\Delta}{a'}+\frac{6l+2l_T-3\Delta}{2l}\right),$$

$$\beta_4=\frac{(2k+1)\pi a}{4l}\left(\frac{\Delta}{a'}+\frac{6l+2l_T-3\Delta}{2l}\right)+\alpha_3.$$

$$U_5(x,t)=\frac{8rl}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}B_2B_3B_4B_5\cos\left(\frac{(2k+1)\pi a' t}{2l}+\alpha_5\right)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\ , \tag{11}$$

$$B_5=\sqrt{\cos^2\beta_5+\frac{a'^2}{a^2}\sin^2\beta_5}\ ,\ \alpha_5=arctg\left(\frac{a'}{a}tg\beta_5\right)-\frac{(2k+1)\pi a}{2l}\left(\frac{2\Delta}{a'}+\frac{6l+2l_T-3\Delta}{2l}\right),$$

$$\beta_5=\frac{(2k+1)\pi a'}{4l}\left(\frac{2\Delta}{a'}+\frac{6l+2l_T-3\Delta}{2l}\right)+\alpha_4.$$

Щоб оцінити отриманий розв'язок, розкладемо його в ряд Фур'є за частотою (6). Коефіцієнти цього розкладання знайдені точно, і подані в наступному вигляді:

$$a_n=\frac{2l}{T}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{A_1\left[\frac{1}{(2k+1)\pi a-2n\omega l}\sin\left(\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}-n\omega\right)\frac{2l-2l_T-\Delta}{2a}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{(2k+1)\pi a+2n\omega l}\sin\left(\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}+n\omega\right)\frac{2l-2l_T-\Delta}{2a}\right)\right]+\right.$$

$$+A_2\left[\frac{1}{(2k+1)\pi a'-2n\omega l}\times\right.$$
$$\times\cos\left(\left(\frac{(2k+1)\pi a'}{2l}-n\omega\right)\left(\frac{\Delta}{2a'}+\frac{2l-2l_T-\Delta}{2a}\right)+\alpha_2\right)\sin\left(\left(\frac{(2k+1)\pi a'}{2l}-n\omega\right)\frac{\Delta}{2a'}\right)+$$
$$+\frac{1}{(2k+1)\pi a'+2n\omega l}\times$$
$$\left.\times\cos\left(\left(\frac{(2k+1)\pi a'}{2l}+n\omega\right)\left(\frac{\Delta}{2a'}+\frac{2l-2l_T-\Delta}{2a}\right)+\alpha_2\right)\sin\left(\left(\frac{(2k+1)\pi a'}{2l}+n\omega\right)\frac{\Delta}{2a'}\right)\right]+$$

$$+A_3\left[\frac{1}{(2k+1)\pi a-2n\omega l}\times\right.$$
$$\times\cos\left(\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}-n\omega\right)\left(\frac{\Delta}{a'}+\frac{2l-\Delta}{a}\right)+\alpha_3\right)\sin\left(\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}-n\omega\right)\frac{2l+2l_T-\Delta}{2a}\right)+$$
$$+\frac{1}{(2k+1)\pi a+2n\omega l}\times$$
$$\left.\times\cos\left(\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}+n\omega\right)\left(\frac{\Delta}{2a'}+\frac{2l-\Delta}{2a}\right)+\alpha_3\right)\sin\left(\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}+n\omega\right)\frac{2l+2l_T-\Delta}{2a}\right)\right]+$$

$$+A_4\left[\frac{1}{(2k+1)\pi a'-2n\omega l}\times\right.$$
$$\times\cos\left(\left(\frac{(2k+1)\pi a'}{2l}-n\omega\right)\left(\frac{3\Delta}{2a'}+\frac{6l+2l_T-3\Delta}{2a}\right)+\alpha_4\right)\sin\left(\left(\frac{(2k+1)\pi a'}{2l}-n\omega\right)\frac{\Delta}{2a'}\right)+$$
$$+\frac{1}{(2k+1)\pi a'+2n\omega l}\times$$
$$\left.\times\cos\left(\left(\frac{(2k+1)\pi a'}{2l}+n\omega\right)\left(\frac{3\Delta}{2a'}+\frac{6l+2l_T-3\Delta}{2a}\right)+\alpha_4\right)\sin\left(\left(\frac{(2k+1)\pi a'}{2l}+n\omega\right)\frac{\Delta}{2a'}\right)\right]+$$

$$+A_5\left[\frac{1}{(2k+1)\pi a-2n\omega l}\times\right.$$
$$\times\cos\left(\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}-n\omega\right)\left(\frac{2\Delta}{a'}+\frac{14l+2l_T-7\Delta}{4a}\right)+\alpha_5\right)\sin\left(\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}-n\omega\right)\frac{2l-2l_T-\Delta}{4a}\right)+$$
$$+\frac{1}{(2k+1)\pi a+2n\omega l}\times$$
$$\left.\left.\times\cos\left(\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}+n\omega\right)\left(\frac{2\Delta}{a'}+\frac{14l+2l_T-7\Delta}{4a}\right)+\alpha_5\right)\sin\left(\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}+n\omega\right)\frac{2l-2l_T-\Delta}{4a}\right)\right]\right\},$$

$$b_n=\frac{2l}{T}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{A_1\left[\frac{1}{(2k+1)\pi a-2n\omega l}\left(\cos\left(\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}-n\omega\right)\frac{2l-2l_T-\Delta}{2a}\right)-1\right)+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(2k+1)\pi a+2n\omega l}\left(\cos\left(\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}+n\omega\right)\frac{2l-2l_T-\Delta}{2a}\right)-1\right)\right]+$$

$$+A_2\left[\frac{1}{(2k+1)\pi a'-2n\omega l}\times\right.$$
$$\times\sin\left(\left(\frac{(2k+1)\pi a'}{2l}-n\omega\right)\left(\frac{\Delta}{2a'}+\frac{2l-2l_T-\Delta}{2a}\right)+\alpha_2\right)\sin\left(\left(\frac{(2k+1)\pi a'}{2l}-n\omega\right)\frac{\Delta}{2a'}\right)+$$
$$+\frac{1}{(2k+1)\pi a'+2n\omega l}\times$$
$$\left.\times\sin\left(\left(\frac{(2k+1)\pi a'}{2l}+n\omega\right)\left(\frac{\Delta}{2a'}+\frac{2l-2l_T-\Delta}{2a}\right)+\alpha_2\right)\sin\left(\left(\frac{(2k+1)\pi a'}{2l}+n\omega\right)\frac{\Delta}{2a'}\right)\right]+$$

$$+A_3\left[\frac{-1}{(2k+1)\pi a-2n\omega l}\times\right.$$
$$\times\sin\left(\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}-n\omega\right)\left(\frac{\Delta}{a'}+\frac{2l-\Delta}{a}\right)+\alpha_3\right)\sin\left(\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}-n\omega\right)\frac{2l+2l_T-\Delta}{2a}\right)+$$
$$+\frac{1}{(2k+1)\pi a+2n\omega l}\times$$
$$\left.\times\sin\left(\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}+n\omega\right)\left(\frac{\Delta}{2a'}+\frac{2l-\Delta}{2a}\right)+\alpha_3\right)\sin\left(\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}+n\omega\right)\frac{2l+2l_T-\Delta}{2a}\right)\right]+$$

$$+A_4\left[\frac{-1}{(2k+1)\pi a'-2n\omega l}\times\right.$$
$$\times\sin\left(\left(\frac{(2k+1)\pi a'}{2l}-n\omega\right)\left(\frac{3\Delta}{2a'}+\frac{6l+2l_T-3\Delta}{2a}\right)+\alpha_4\right)\sin\left(\left(\frac{(2k+1)\pi a'}{2l}-n\omega\right)\frac{\Delta}{2a'}\right)+$$
$$+\frac{1}{(2k+1)\pi a'+2n\omega l}\times$$
$$\left.\times\sin\left(\left(\frac{(2k+1)\pi a'}{2l}+n\omega\right)\left(\frac{3\Delta}{2a'}+\frac{6l+2l_T-3\Delta}{2a}\right)+\alpha_4\right)\sin\left(\left(\frac{(2k+1)\pi a'}{2l}+n\omega\right)\frac{\Delta}{2a'}\right)\right]+$$

$$+A_5\left[\frac{-1}{(2k+1)\pi a-2n\omega l}\times\right.$$
$$\times\sin\left(\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}-n\omega\right)\left(\frac{2\Delta}{a'}+\frac{14l+2l_T-7\Delta}{4a}\right)+\alpha_5\right)\sin\left(\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}-n\omega\right)\frac{2l-2l_T-\Delta}{4a}\right)+$$
$$+\frac{1}{(2k+1)\pi a+2n\omega l}\times$$
$$\left.\left.\times\sin\left(\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}+n\omega\right)\left(\frac{2\Delta}{a'}+\frac{14l+2l_T-7\Delta}{4a}\right)+\alpha_5\right)\sin\left(\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}+n\omega\right)\frac{2l-2l_T-\Delta}{4a}\right)\right]\right\}.$$

3. Аналіз результатів. Розглянемо вплив зміни частоти коливань залежно від розміру тріщини. Для цього уведемо функцію:

$$d=\frac{\omega 1-\omega}{\omega 1}, \tag{12}$$

де $\omega 1 = \frac{\pi a}{2l}$ і є частотою коливань стрижня без тріщини.

На рис. 3 подана зміна частоти коливань залежно від розміру тріщини.

Функція d, як видно з графіка, зростає із зростанням тріщини.

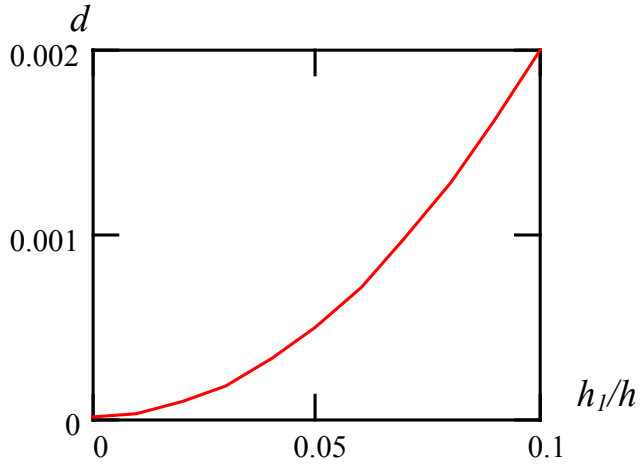

Рис. 3. Зміна частоти коливань залежно від розміру тріщини.

Порівняємо отримані результати з даними, отриманими у статті [4]. У цій статті задача про коливання балки із тріщиною, розв'язана за допомогою методу кінцевих елементів. Для балки довжиною $L = 10\,м$, площею $S = 1м^2$, з основними характеристиками $E = 210GПа, \rho = 7850\,кг/м^3$, отримані частоти ω_C подовжніх коливань балки із закритою і відкритою тріщиною. Порівняння цих даних із частотами, отриманими по формулі (6), наведено в таблиці:

a/h	ω_C	ω по формулі (6)	%
0	809,41	812,44	0,3
0.5	745,88	785,33	5,29

Таким чином, похибка при визначенні частоти за допомогою формули (6) навіть для тріщини в 50% складає 5,29%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ройтман А. Б., Александрова Н. Б. Аналитическая оценка асимметрии цикла при продольных колебаниях упругого стержня с поперечной трещиной // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 1999. – № 1. – С. 95-97.
2. Ройтман А. Б., Александрова Н.Б., Христенко Т.А. Вибрационная диагностика «дышащих» трещин в изделиях // Техническая диагностика и неразрушающий контроль. – 2000. – № 1. – С. 58-66.
3. Ройтман А.Б., Титова О.А. Обоснование аналитических моделей диагностирования «дышащих» трещин в элементах конструкций // Техн. диагностика и неразрушающий контроль. – 2000.– № 3. – С. 27-33.
4. M. Chati, R. Rand and S. Mukherjee Modal analysis of cracked beam // Journal of Sound and Vibration 1997, 207(2) – P. 249-270.