УДК 517.95 + 517.518

НОВЫЕ ПОДХОДЫ К ПОСТРОЕНИЮ УРАВНЕНИЙ ТРЕХМЕРНЫХ ЛОКУСОВ С ПОМОЩЬЮ R-ФУНКЦИЙ

Рвачев В.Л., академик НАН Украины, д. ф.-м.н.,*Толок А.В., к.т.н., доцент,
Уваров Р.А., аспирант, Шейко Т.И., д.т.н., профессор

Институт проблем машиностроения НАН Украины

**Запорожский государственный университет*

Рассмотрены методы построения уравнений локусов в 3D по информации из 2D с помощью теории R-функций и интерлокационных формул. Рассмотрены случаи, когда локусы геометрически подобны и присутствует закон закручивания. Получено нормализованное уравнение закрученной боковой поверхности. В качестве примеров приложений построены уравнения профилей лопаток, в том числе с теплоотводящими каналами. Средством визуализации результатов предлагается использовать систему РАНОК (рекурсивный анализ образных компонентов), основанную на принципах итерационного уточнения исследуемого пространства.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] изложены некоторые подходы к построению уравнений локусов в 3D, в частности, поверхностей тел вращения, призматических и конических тел, спиралей и др. До настоящего времени RFM применялся, в основном, для расчетов физико-механических полей в 2D, а в 3D – лишь для тел вращения (задача сводилась к решению в 2D) и цилиндрических тел конечной длины с направляющей сложной геометрии (применялись интегральные преобразования). Это обусловлено несовершенством используемой большинством авторов системы ПОЛЕ, ориентированной на решение плоских задач, а иногда и отсутствием математических моделей в 3D. Работы [2, 3, 4, 5], посвященные решениям задач механики деформируемого твердого тела в 3D, носили частный характер, т.к. их программная реализация не предусматривала работу с буквенными параметрами и не была автоматизирована для оперативной смены геометрической и физической информации. Таким образом, практический опыт построения уравнений локусов в 3D, а особенно тел, имеющих такую сложную геометрию, как, например, лопатки турбин со всем их многообразием, мал. Ниже предлагаются некоторые новые подходы к построению уравнений локусов в 3D, а известные [1], но еще не применявшиеся на практике, – для наглядности иллюстрируются примерами.



Рис.1. Отображение поверхности R-функции с эффектом квазипрозрачности

2. ПРИНЦИПЫ ВИЗУАЛЬНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ 3D-ПРОСТРАНСТВА В СИСТЕМЕ ОБРАЗНОГО АНАЛИЗА РАНОК

В отличие от существующих систем отображения реалистичного образа, система РАНОК (рекурсивный анализ образных компонентов) ориентирована на исследовательские процедуры в математических построениях для многомерных пространств. Отсюда и выбор метода рекурсивного уточнения как дифференцирующей основы определения пространственной информации о поведении исследуемой функции вида $F(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$, где n - размерность пространства функции F [16].

Иллюстративный материал 4D-функций в предлагаемой работе реализован в системе РАНОК и основан на графическом отображении элементов 3D-матрицы, содержащей количественные данные образной информации математической зависимости, описывающей исследуемый объект [17].

В общем случае объект T^n в виде своего математического описания помещается в ограниченное ортогональное пространство S^{n-1}, называемое *сценой,* и в дальнейшем рассматривается как

функциональный закон $F(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ *поведения метрических отношений в пространстве* сцены S^{n-1}. Сцена рассматривается как единое исследуемое тело с функциональной пространственной зависимостью $F(S)$, где $S = x_1 \times x_2 \times ... \times x_{n-1}$.

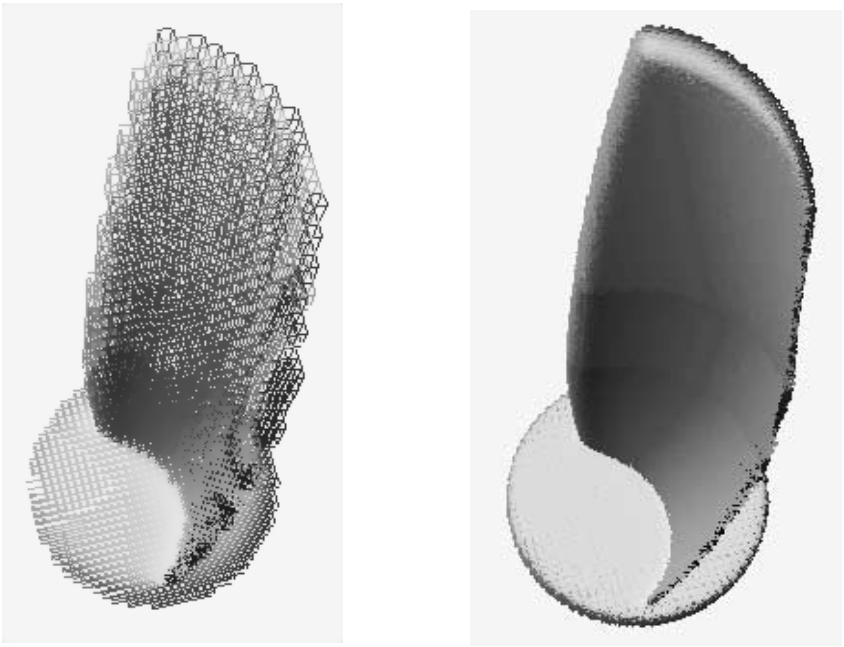
Выделение множества качественных характеристик значений функции $A(F) = \{a_1(F), a_2(F), ...\}$ позволяет отображать интересующие области рассматриваемой сцены S. Например, разбиение функции на положительные и отрицательные значения $a_i(F) = Sign(F)$ позволяет отделить непосредственно облик положительного тела $T^n(a_i(F))$ рассматриваемой функциональной зависимости $F(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ от её отрицательного окружения. Элементы 3D-матрицы, формирующие границу исследуемого объекта $F(x_1, ..., x_{n-1}) = 0$, позволяют рассматривать поверхность тела P, воспринимая его как отдельное "качество" функциональных значений, принадлежащее множеству $A(F)$ (рис.1).

Графический облик *элемента матрицы* пропорционально сохраняет конфигурацию сцены в ходе итерационного разбиения и отображается его каркасом. Такой подход позволяет формировать интересующие области сцены в решётчатом виде, сохраняя при этом относительную прозрачность в пространстве всей сцены, увеличивая тем самым наглядность отображаемой области (рис.2а). При этом цвет графического представления элемента позволяет отразить поведение выбранной функциональной характеристики. Например, пространственная ориентация элемента по отношению к выбранному направлению светового луча позволяет приблизить образ к реалистичному восприятию при повышенных итерациях уточнения (рис. 2б).

Такой подход позволяет производить оценку построения ещё на ранних стадиях уточнения, при этом интерес представляет не только конечный результат, но и промежуточный процесс блочного заполнения от дальних элементов к ближним. При этом открываются для наблюдения промежуточные этапы заполнения элементов исследуемого тела.

Недостатком отображения является погрешность при отображении тонких слоёв на малых итерациях уточнения. Учитывая оперативность восприятия объекта в целом, данным недостатком можно пренебречь.

Далее по тексту приведены иллюстрации примеров отображения локусов в 3D-сценах, построенные в системе РАНОК. 2D-объекты получены в системе ПОЛЕ с использованием традиционных принципов отображения путём распределения цветовой градации по шкале функциональных значений.



а б

Рис.2 Пример отображения лопатки, построенной с помощью R-функции при разных итерациях уточнения сцены: а) пять итераций, б) восемь итераций.

3. ПОСТРОЕНИЕ ЛОКУСОВ В 3D ПО ИНФОРМАЦИИ ИЗ 2D

Один из полезных подходов к построению локусов в 3D из 2D, данных в [1], заключается в том, что если в плоскости xOy граница $\partial\Omega_0$ локуса Ω_0 описывается уравнением

$$\partial\Omega_0 = (\omega_0(x, y, c_1, ..., c_m) = 0), \quad (1)$$

где c_i - геометрические параметры, определяющие форму и размеры локуса Ω_0 и его элементов, то, вводя функции $c_i(z)$ $(i = 1, ..., m)$, при условии $c_i(0) = c_i$, получаем уравнение поверхности вида

$$\partial\Omega = (\omega(x, y, c_1(z), ..., c_m(z)) = 0), \quad (2)$$

которому в сечениях $z = h = const$ будут соответствовать локусы из семейства (1).

Пример 1. *Если известно, что при* $z = 0$ *граница* $\partial\Omega_0$ *локуса* Ω_0 *имеет вид прямоугольника со сторонами* $x = \pm a;\ y = \pm b$ *и описывается уравнением*

$$\partial\Omega_0 = ((a^2 - x^2) \wedge_0 (b^2 - y^2) = 0), \quad (3)$$

а при $z = H$ *граница* $\partial\Omega_H$ *локуса* Ω_H, *также прямоугольник со сторонами* $x = \pm c;\ y = \pm d$

$$\partial\Omega_H = ((c^2 - x^2) \wedge_0 (d^2 - y^2) = 0),$$

то, следуя вышеизложенному, можно записать уравнение боковой поверхности с линейной зависимостью по z, *соединяющей* $\partial\Omega_0$ *и* $\partial\Omega_H$, *в виде:*

$$\partial\Omega = \left(\left(\left[a\left(1 - \frac{z}{H}\right) + c\frac{z}{H}\right]^2 - x^2\right) \wedge_0 \left(\left[b\left(1 - \frac{z}{H}\right) + d\frac{z}{H}\right]^2 - y^2\right) = 0\right).$$

Заметим, что коэффициенты, заключенные в квадратные скобки, построены с помощью интерполяционной формулы Лагранжа.

Если в более общем случае известно, что в плоскости xOy граница $\partial\Omega_0$ локуса Ω_0 описывается уравнением

$$\partial\Omega_0 = (\omega_0(x, y) = 0), \quad (4)$$

а при $z = H$ граница $\partial\Omega_H$ локуса Ω_H -уравнением

$$\partial\Omega_H = (\omega_H(x, y) = 0),$$

то, применяя интерлокационную формулу Лагранжа [1,6,7,8], получим:

$$\partial\Omega = \left(\frac{\omega_0(x, y)(H - z) + \omega_H(x, y)z}{H} + \frac{z(H - z)}{H}\Phi\right.$$

,

где $\Phi(x, y, z)$ - неопределенная компонента, корректирующая боковую поверхность, например, для линейной зависимости по z, $\Phi(x, y, z)$ может определяться из соображений минимизации кривизны этой боковой поверхности.

Пример 2. *Применяя к условию Примера 1 формулу (5), приходим к*

$$\partial\Omega = \left(\frac{((a^2 - x^2) \wedge_0 (b^2 - y^2))(H - z)}{H} + \right.$$



Рис.3. Отображения поверхности примера 3 для $a = 3, b = 2, R = 1.5, H = 5$

$$+\frac{((c^2-x^2)\wedge_0(d^2-y^2))z}{H}+\frac{z(H-z)}{H}\Phi(x,y,z)=0\Bigg).$$

Здесь следует отметить, что формула (5) является более общей по сравнению с (2), т.к. позволяет соединять разноплановые с точки зрения числа параметров области, например, окружность и прямоугольник.

Пример 3. *Пусть при* $z=0$ *граница* $\partial\Omega_0$ *локуса* Ω_0 *описывается уравнением (3), а при* $z=H$ *границей* $\partial\Omega_H$ *локуса* Ω_H *является окружность, уравнение которой* $\partial\Omega_H=(R^2-x^2-y^2=0)$*(рис.3). Применяя формулу (5), можно записать уравнение боковой поверхности, соединяющей* $\partial\Omega_0$ *и* $\partial\Omega_H$*, в виде:*

$$\partial\Omega=\Bigg(\frac{((a^2-x^2)\wedge_0(b^2-y^2))(H-z)}{H}+$$

$$+\frac{(R^2-x^2-y^2)z}{H}+\frac{z(H-z)}{H}\Phi(x,y,z)=0\Bigg).$$

Замечание 1. Следует отметить, что применить формулу (2) в *Примере 3* затруднительно, так как интерлоцируемые локусы – прямоугольник и окружность - содержат разное количество геометрических параметров c_i и принадлежат разным семействам.

Использовать формулу (5) в случае, когда интерлоцируется более двух локусов, можно лишь беря внутренние сечения $|H_i-z|$ или $(H_i-z)^{2k}$. При этом, когда интерлоцируются более двух локусов и нет никакой дополнительной информации о порядке гладкости боковой поверхности, можно также воспользоваться интерлокацией вида:

$\omega(x,y,z)=\sum_{i=1}^{N}\omega_i(x,y)h_i(z,z_{i-1},z_i,z_{i+1})+\prod_{i=1}^{N}(z-z_i)P(x,y,z)$ где

$h_i(z,z_{i-1},z_i,z_{i+1})=\left(\left[\frac{z-z_{i-1}}{z_i-z_{i-1}}\right]\wedge_1\left[\frac{z-z_{i+1}}{z_i-z_{i+1}}\right]\right)\vee_1 0$ –финитный линейный сплайн (рис. 4).

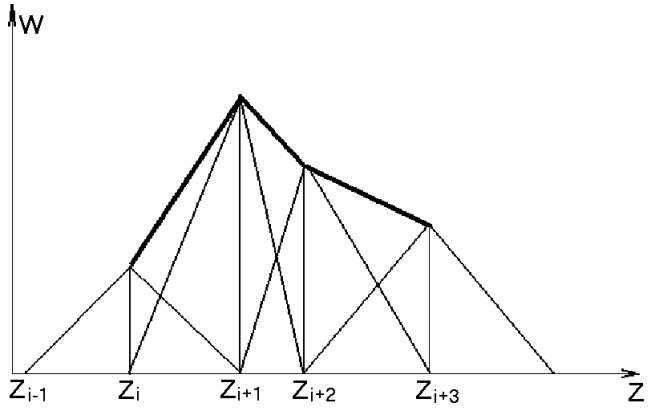


Рис.4. Финитный линейный сплайн

Необходимо ещё обратить внимание на тот случай, когда в нижнем, верхнем и всех промежуточных сечениях расположены локусы, обладающие свойством геометрического подобия. Если известно построенное с помощью R-функций уравнение границы локуса в плоскости xOy - $\omega(x,y)=0$, то уравнение подобной фигуры имеет вид: $\frac{1}{k}\omega(kx,ky)=0$, где k - коэффициент подобия. Тогда, задавая $k=k(z)$, при условии $k(0)=1$, получим уравнение поверхности вида

$$\partial\Omega=\left(\frac{1}{k(z)}\omega(k(z)x,k(z)y)=0\right),$$

которому в сечениях $z=h=\text{const}$ будут соответствовать подобные локусы.

Теперь рассмотрим вопрос о построении уравнения локуса, закрученного вдоль оси z по некоторому закону. Если в плоскости xOy граница $\partial\Omega_0$ локуса Ω_0 описывается уравнением (4), то уравнение

$$\omega(x\cos\varphi(z)+y\sin\varphi(z)+c_x(z),\\ y\cos\varphi(z)-x\sin\varphi(z)+c_y(z))=0$$

определяет в 3D такой локус Ω, что его сечения плоскостями $z=h=\text{const}$ получаются из локуса Ω_0 путем его вращения вокруг оси Oz и смещения всех его точек в плоскости $z=h$ на вектор $\vec{C}(c_x(z),c_y(z))$. Если $\varphi(z)$ есть линейная функция вида $\varphi(z)=kz$, а $c_x\equiv c_y\equiv 0$, то локус Ω будет получаться из локуса Ω_0 путем движения Ω_0 вдоль винтовой линии с осью Oz, а именно путем вращения вокруг оси Oz и равномерного поступательного движения вдоль неё.

Пример 4. *Пусть при* $z=0$ *граница* $\partial\Omega_0$ *локуса* Ω_0 *описывается уравнением (3). Построить уравнение локуса, который получается из* Ω_0 *путем закручивания* Ω_0 *по закону, указанному на рис.5.*

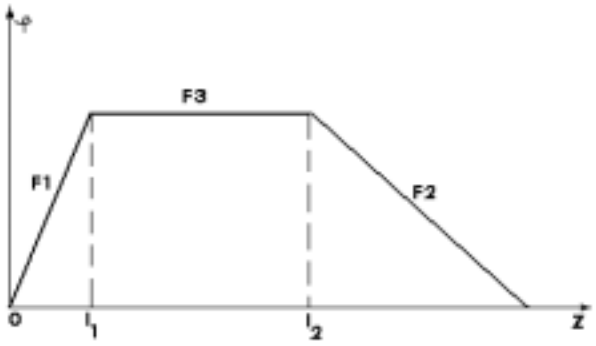


Рис.5. Закон закручивания

Если функцию $\varphi(z)$ представить в виде: $\varphi(z)=(F_1\wedge_1 F_2)\wedge_1 F_3=\left(\frac{n\pi z}{l_1}\wedge_1 n\pi\left(1-\frac{z-l_2}{l-l_2}\right)\right)\wedge_1 n\pi$, то

искомое уравнение запишется как

$$\omega(x,y,z)\equiv\left(a^2-(x\cos\varphi(z)+y\sin\varphi(z))^2\right)\wedge_0\left(b^2-(y\cos\varphi(z)-x\sin\varphi(z))^2\right)=0,$$

а локус будет представлять собой сложную винтовую поверхность, образующей которой является прямоугольник $\partial\Omega_0$, а направляющими спирали-закрученные по часовой стрелке на угол $n\pi$ на интервале $(0,l_1)$, против часовой стрелки до исходной ориентации прямоугольника $\partial\Omega_0$ на интервале (l_2,l), а на интервале (l_1,l_2) направляющими будут параллельные прямые, ортогональные плоскости xOy, и центральная часть поверхности локуса будет поверхностью прямоугольного параллелепипеда (рис.6).



Рис.6. Локус, описанный в примере 4 по закону винтового вращения

Замечание 2. Нормализацию полученных уравнений можно проводить как согласно общей методике, описанной в [1,6], по формуле

$$\omega_n(x,y,z)=\frac{\omega(x,y,z)}{\sqrt{(\nabla\omega(x,y,z))^2+\omega^2(x,y,z)}}$$

так и в случае, если $\vec{c}(c_1,c_2)$, где c_1,c_2 - константы, а $\varphi(z)=kz$, то

$$\omega_n(x,y,z)=$$

$$= \frac{\omega(x\cos kz + y\sin kz,\ y\cos kz - x\sin kz)}{\sqrt{(\nabla\omega(x\cos kz + y\sin kz,\ y\cos kz - x\sin kz))^2}} =$$

$$= \frac{\omega(\bar{x},\bar{y})}{\sqrt{(\nabla\omega(\bar{x},\bar{y}))^2}} = \frac{\omega(\bar{x},\bar{y})}{\sqrt{1+k^2\left\{\bar{y}\dfrac{\partial\omega(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{x}} - \bar{x}\dfrac{\partial\omega(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{y}}\right\}^2}}. \qquad (6)$$

Рассмотрим вывод формулы (6).

Пусть уравнение образующей в плоскости xOy имеет вид: $\omega(x,y)=0$, и, кроме того, известно, что функция $\omega(x,y)$ нормализована до первого порядка, то есть

$$\frac{\partial\omega(x,y)}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega_0} \equiv (\nabla\omega(x,y))^2\bigg|_{\partial\Omega_0} \equiv \left(\left(\frac{\partial\omega(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega(x,y)}{\partial y}\right)^2\right)\bigg|_{\partial\Omega_0} = 1.$$

После подстановки $\begin{cases}\bar{x}\Rightarrow x\cos kz + y\sin kz + c_1\\ \bar{y}\Rightarrow y\cos kz - x\sin kz + c_2\end{cases}$ в $\omega(x,y)$ получаем $\omega(\bar{x},\bar{y}) = \omega(x,y,z)$.

Вычислим

$$\frac{\partial\omega(x,y,z)}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega} \equiv (\nabla\omega(x,y,z))^2\bigg|_{\partial\Omega} \equiv \left(\left(\frac{\partial\omega(\hat{x},\hat{y})}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega(\hat{x},\hat{y})}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega(\hat{x},\hat{y})}{\partial z}\right)^2\right)\bigg|_{\partial\Omega} =$$

$$= \left(\frac{\partial\omega(\hat{x},\hat{y})}{\partial\hat{x}}\right)^2 cos^2\,kz + \left(\frac{\partial\omega(\hat{x},\hat{y})}{\partial\hat{y}}\right)^2 sin^2\,kz - 2\frac{\partial\omega(\hat{x},\hat{y})}{\partial\hat{x}}\frac{\partial\omega(\hat{x},\hat{y})}{\partial\hat{y}} sin\,zk\ cos\,kz + \left(\frac{\partial\omega(\hat{x},\hat{y})}{\partial\hat{x}}\right)^2 sin^2\,kz +$$

$$+ \left(\frac{\partial\omega(\hat{x},\hat{y})}{\partial\hat{y}}\right)^2 cos^2\,kz + 2\frac{\partial\omega(\hat{x},\hat{y})}{\partial\hat{x}}\frac{\partial\omega(\hat{x},\hat{y})}{\partial\hat{y}} sin\,zk\ cos\,kz + \left(\frac{\partial\omega(\hat{x},\hat{y})}{\partial\hat{x}}\right)^2 [kx\ sin\,kz - ky\ cos\,kz]^2 +$$

$$+ \left(\frac{\partial\omega(\hat{x},\hat{y})}{\partial\hat{y}}\right)^2 [ky\ sin\,kz + kx\ cos\,kz]^2 + 2\frac{\partial\omega(\hat{x},\hat{y})}{\partial\hat{x}}\frac{\partial\omega(\hat{x},\hat{y})}{\partial\hat{y}} \times [kx\ sin\,kz - ky\ cos\,kz]\ [ky\ sin\,kz + kx\ cos\,kz] =$$

$$= \left(\frac{\partial\omega(\hat{x},\hat{y})}{\partial\hat{x}}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega(\hat{x},\hat{y})}{\partial\hat{y}}\right)^2 + \left(k\hat{y}\frac{\partial\omega(\hat{x},\hat{y})}{\partial\hat{x}}\right)^2 + \left(k\hat{x}\frac{\partial\omega(\hat{x},\hat{y})}{\partial\hat{y}}\right)^2 - 2k^2\hat{x}\hat{y}\frac{\partial\omega(\hat{x},\hat{y})}{\partial\hat{x}}\frac{\partial\omega(\hat{x},\hat{y})}{\partial\hat{y}} =$$

$$= 1 + k^2\left\{\bar{y}\frac{\partial\omega(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{x}} - \bar{x}\frac{\partial\omega(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{y}}\right\}^2.$$

Окончательно получаем нормализованную функцию закрученной боковой поверхности в предположении, что $\varphi(z) = kz$, а $\vec{c}(c_1,c_2)$, где c_1, c_2 - константы.

$$\omega_n(x,y,z) = \frac{\omega(\hat{x},\hat{y})}{\sqrt{(\nabla\omega(\hat{x},\hat{y}))^2}} = \frac{\omega(\hat{x},\hat{y})}{\sqrt{1+k^2\left\{\hat{y}\dfrac{\partial\omega(\hat{x},\hat{y})}{\partial\hat{x}} - \hat{x}\dfrac{\partial\omega(\hat{x},\hat{y})}{\partial\hat{y}}\right\}^2}}.$$

4. ПОСТРОЕНИЕ В 3D УРАВНЕНИЙ ЛОПАТОК ТУРБИН С ПОМОЩЬЮ R-ФУНКЦИЙ

Проектирование лопаточных аппаратов и особенно последних ступеней паровых турбин большой мощности представляет собой актуальную, сложную научно-исследовательскую и проектно-конструкторскую проблему, требующую комплексного изучения и решения задач газовой динамики, технологии, конструирования, прочности и вибрации.

Несмотря на особую важность, задача создания методики проектирования сопловых и рабочих лопаток турбомашин ещё далека до завершения. Основная причина такого положения заключается в отсутствии

строгих методов в построении решетки профилей, хотя этому вопросу в литературе посвящено большое количество работ.

Представляется, что полная комплексная методика проектирования решеток профилей турбомашин должна включать следующие задачи: построение решетки профилей (обратная задача); расчет характеристик решеток профилей (прямая задача); оптимизация решетки профилей. Так как профиль является элементом лопатки, методика проектирования решеток профилей должна учитывать также возможность достижения оптимальных характеристик лопатки в целом [9].

Все существующие в настоящее время методы построения решеток профилей можно разделить условно на два направления: геометрические, связанные с вычерчиванием профиля, и численные (так называемые методы обратной задачи).

В работе [9] представлено развитие третьего направления: аналитические методы построения. В этих методах профиль описывается системой аналитических выражений определенного семейства, зависящих от исходных данных Д и одного или нескольких параметров П :

$$y = f(x, Д, П) .$$

Поперечные сечения лопаток современных турбомашин имеют достаточно сложную форму. Обычно на рабочих чертежах форма поперечных сечений лопаток задается координатами точек, которые лежат на контуре сечения. Контуры сечений лопаток паровых турбин задаются в виде дуг окружностей и отрезков прямых [10].

В работах [11-13] проводились исследования RFM температурных, деформационных, термонапряженных и др. физико-механических полей для лопаток турбин (рис.7), в том числе и с каналами для теплоотводящих сред. Однако, расчеты проводились для лопаток в некоторых сечениях, т.е. в 2D, где профиль лопатки, составленный из дуг окружностей, эллипсов, парабол, участков прямых, строился с помощью R-функций.

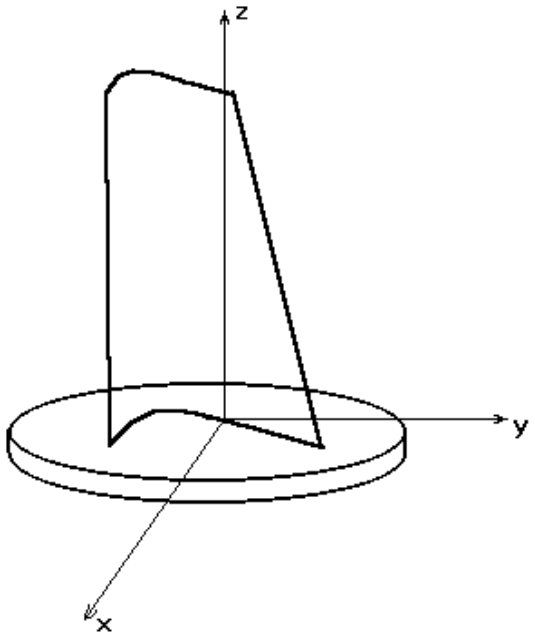


Рис.7. Схема пространственной ориентации лопатки

Например [11], пусть

$$f_1 = \frac{b_0 + b_1(x + c_0) - y + b_2(x + c_0)^2}{\sqrt{(2b_2(x + c_0) + b_1)^2 + 1}}; f_2 = \frac{(x - c + c_0)^2 + (y - d)^2 - r_1^2}{2r_1};$$

$$f_3 = \frac{r_{m1}^2 - (x + c_0)^2 - \left(y - b^2\right)}{2r_{m1}}; f_4 = -\frac{(x - x_3 + c_0)/(x_3 - x_4) + (y - y_3)/(y_3 - y_4)}{\sqrt{1/(x_3 - x_4)^2 + 1/(y_3 - y_4)^2}};$$

$$f_5 = \frac{(x - 27 + c_0)^2 + (y - 36)^2 - r_3^2}{2r_3},$$

где $c = 15{,}5142$; $b = 27{,}015$; $d = -40{,}1889$;

$r_1 = 67{,}3514$; $r_{m1} = 1{,}62$; $r_3 = 7$; $r_4 = 3$;

$b_0 = 29{,}638418$; $b_1 = 1{,}2480253$; $b_2 = -0.0228603$;

$x_3 = -1{,}29$; $x_4 = 0{,}3644$;

$y_3 = 27{,}994949$; $y_4 = 25{,}436515$.

Тогда уравнение границы лопатки турбины в нижнем ее сечении (рис.8) будет:

$$\omega(x, y) \equiv (f_1 \wedge_\alpha f_2 \wedge_\alpha (f_3 \vee_\alpha f_4) \wedge_\alpha y) \wedge_\alpha f_5 = 0. \qquad (7)$$

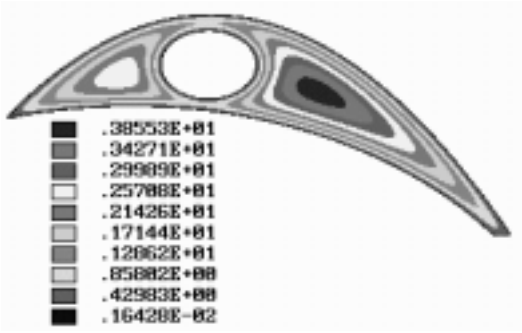


Рис.8. Образующая лопатки (нижнее основание)

Если теперь, согласно изложенному выше, построить в 3D, исходя из этой образующей, закрученную по некоторому закону лопатку, сечения $z = \text{const}$ которой будут подобны нижнему основанию, то для этого надо в уравнение (7) подставить

$$\begin{cases} x \Rightarrow x\cos\varphi(z) + y\sin\varphi(z) \\ y \Rightarrow y\cos\varphi(z) - x\sin\varphi(z) \end{cases}. \qquad (8)$$

В результате получим закрученную по заданному закону $\varphi(z)$ лопатку, т.е. винтовую поверхность с образующей, показанной на рис.5. Если при этом выполнить преобразование подобия, т.е. сделать подстановку

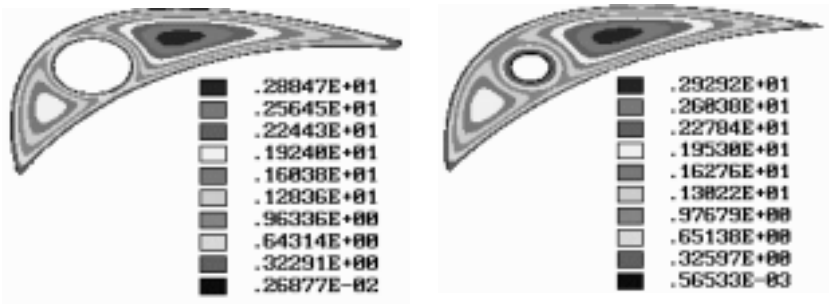
$$\begin{cases} x \Rightarrow kk * x\cos\varphi(z) + kk * y\sin\varphi(z) \\ y \Rightarrow kk * y\cos\varphi(z) - kk * x\sin\varphi(z) \end{cases}, \qquad (9)$$

$$\frac{1}{kk}\omega(kk * x\cos\varphi(z) + kk * y\sin\varphi(z),$$

$$kk * y\cos\varphi(z) - kk * x\sin\varphi(z)) = 0,$$

где $kk = z/3+1$, то получим закрученную лопатку, где в каждом сечении – подобные локусы, а верхнее сечение изображено на рис.9а. Если же от каждой опорной функции f_i, участвующей в построении нижнего основания лопатки отнять величину $kk = 3z$ и применить преобразование (8), то получим закрученную лопатку с верхним сечением, изображенным на рис.9б.

Описанный подход, базирующийся на построении основания (направляющей лопатки) из примитивов, в некоторых случаях может дать неоправданные физические явления из-за разрывных значений кривизн вдоль контура, а иногда и кромок, вследствие недостаточно точных конструктивных сопряжений.



а). Преобразование подобия б). Уменьшение по линейному закону

Рис.9. Верхнее сечение закрученной лопатки

В настоящее время для конструирования решеток профилей теорией [14] и практикой [15] выработан ряд рекомендаций:

- канал решетки профилей должен быть конфузорным;
- обводы профиля должны иметь плавно изменяющуюся кривизну от входа к выходу;
- кривизна обвода профилей должна быть без разрывов;
- угол между касательными к наружной и внутренней поверхностям на выходной кромке должен быть $2-4^\circ$;
- угол между касательными к наружной поверхности в горле и на выходной кромке должен быть $6-8^\circ$.

Ниже предлагается еще один подход к построению достаточно гладкого профиля (образующей или сечения) лопатки.

Рассмотрим каркас в виде дуги окружности, построенной с помощью формулы «отсечки» [1], позволяющей получать уравнение участка кривой, нормализованное в обобщенном смысле.

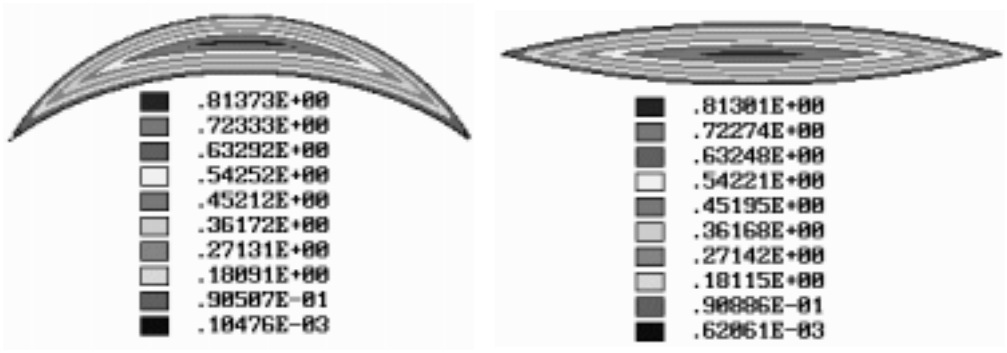
$$\omega_i \equiv \sqrt{\left[\frac{\sqrt{\omega^4+\sigma_i{}^2}-\sigma_i}{2}\right]^2+\omega^2}=0,$$

где $\omega=0$ - нормализованное уравнение локуса $\partial\Omega$, $\Sigma_i=(\sigma_i\ge 0)$ - некоторая область, выделяющая искомый i-тый участок границы, причем такая, что $\sigma_i=0$ - нормализованное уравнение $\partial\Sigma_i$, а $(\nabla\omega,\nabla\sigma_i)=0$ в точках $\partial\Omega\cap\partial\Sigma_i$. Таким образом, выделить дугу окружности можно либо окружностью, ортогональной к данной в точках концов дуги, либо двумя прямыми, проходящими через центр окружности и, соответственно, один из концов дуги.

Пусть для определенности дуга проходит через точки: $(-a,-b)$; $(0,0)$ и $(a,-b)$. Тогда, если записать

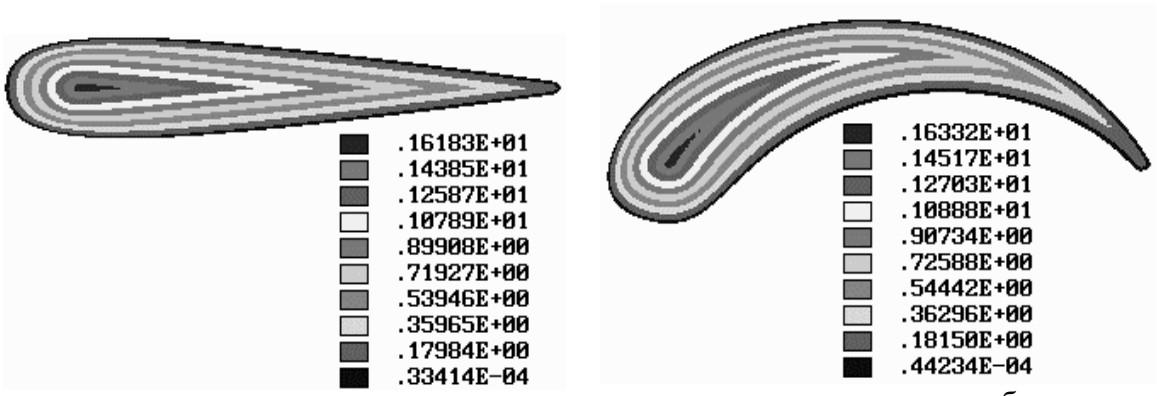
$$\omega=\omega_1-(a^2-x^2)/par,$$

где par - параметр, регулирующий толщину лопатки, получим натянутый на каркас в виде дуги профиль



а б

Рис.10. Профили лопаток с острыми кромками



а б

Рис.11. Несимметричные профили лопаток с затупленными кромками

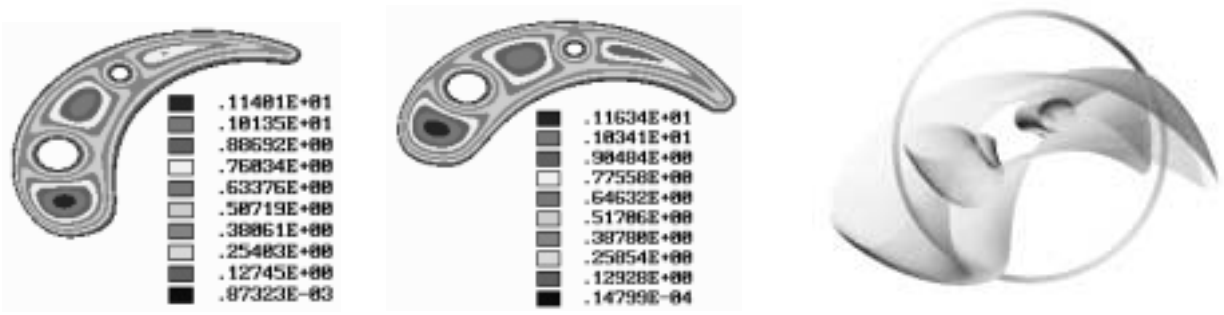
лопатки с острыми кромками, изображенный на рис. 10а. Если в качестве каркаса рассматривается не дуга, а отрезок, то получим профиль, изображенный на рис. 10б.

Если же записать

$$\omega = \omega_1 - (a + par1 + x)(a + par2 - x)/par, \qquad (10)$$

где par1 и par2 определяют степень скругления кромок, а par, как и ранее, - толщину лопатки, то получим натянутый на каркас в виде дуги несимметричный профиль лопатки с затупленными кромками, изображенный на рис. 11а. Если в качестве каркаса рассматривается отрезок, то получим профиль, изображенный на рис. 11б.

На рис.12 (а,б) изображены полученные в системе ПОЛЕ два сечения закрученной лопатки с затупленными кромками и теплоотводящими каналами. Рис.12в отличается от предыдущих изображений



а б

в

Рис.12. Профили лопатки с теплоотводящими каналами в сечениях $z = h_i$

тем, что отображает объект целиком в позиции наблюдения сверху с применением эффекта

квазипрозрачности и выполнен в системе РАНОК. Посредством данного изображения наглядно оценивается изменение формы и поворота элементов сечения заданной лопатки в целом для всего объекта.

Рис.13 наглядно отображает общий вид закрученной лопатки с затупленными кромками и

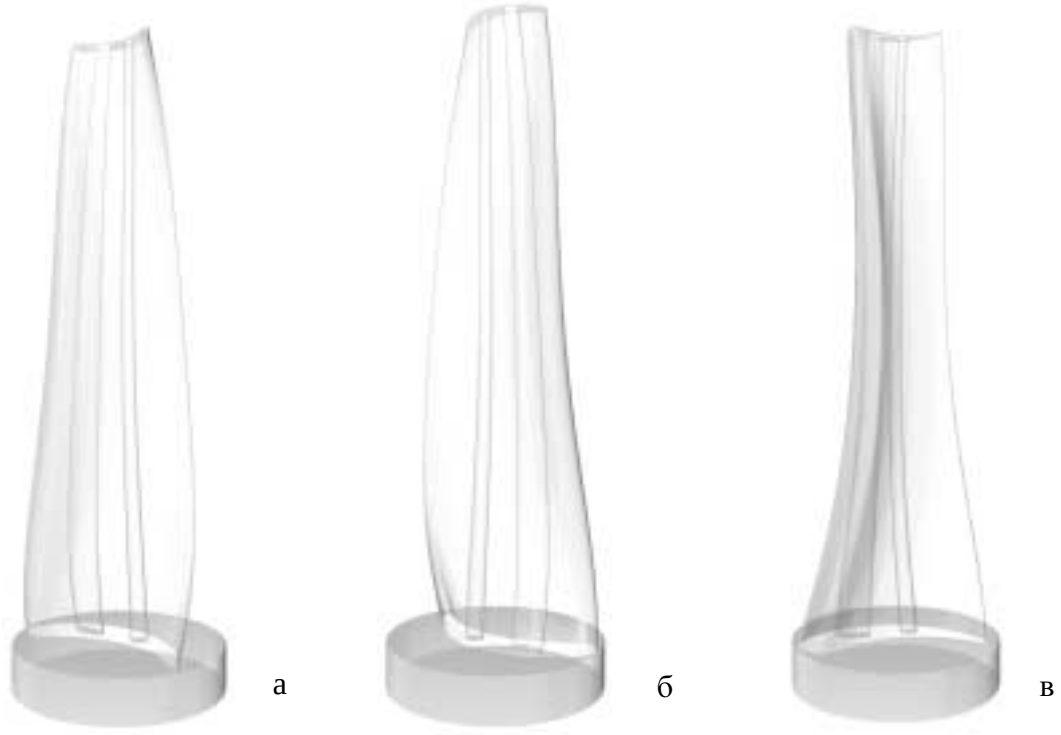


Рис.13. Примеры отображения проекций 3D-сцен для лопатки с затупленными кромками и теплоотводящими каналами

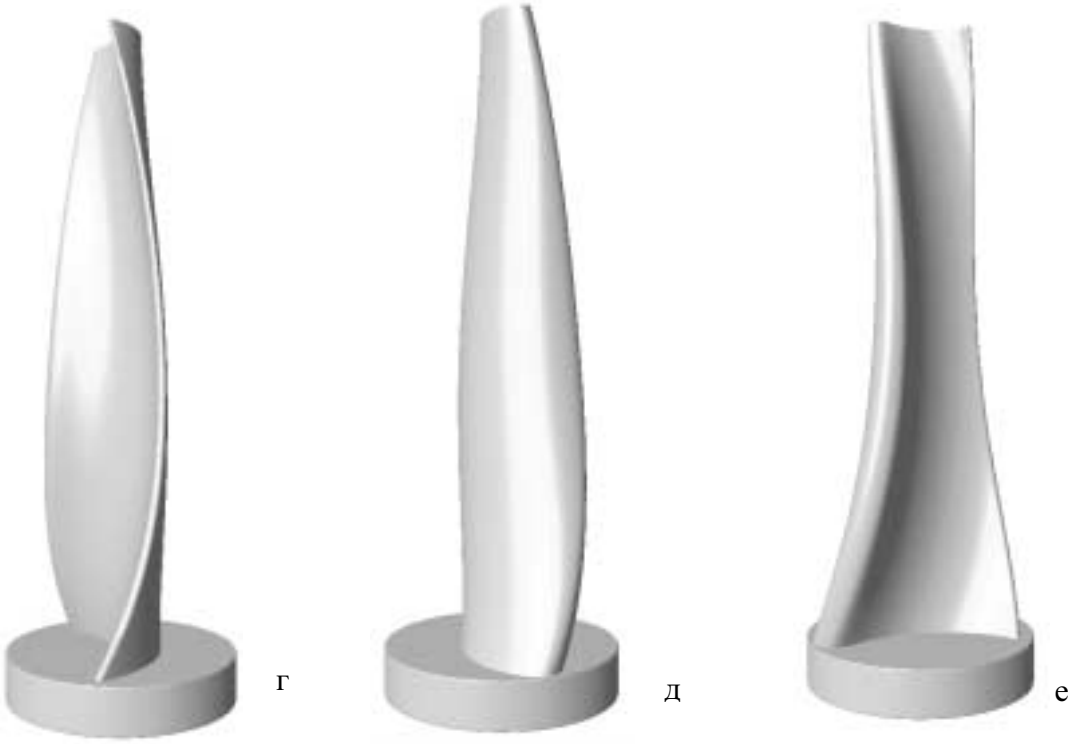


Рис.13. Примеры отображения проекций 3D-сцен для лопатки с затупленными кромками и теплоотводящими каналами

теплоотводящими каналами, сечения которой отображены на рис.12. Применение эффекта квазипрозрачности позволяет наглядно выявить пустотные образования внутри рассматриваемого тела.

Рис.14 демонстрирует образ структурной организации рассматриваемого объекта сцены представленной этой же лопаткой на 6-ти итерациях уточнения. Получаемая при этом относительная прозрачность в толстых слоях тела позволяет предполагать существование функционально заданных пустотных образований внутренних теплоотводящих каналов.

Замечание 3. Обратим внимание, что изображенные на рис.10,11 профили напоминают профиль и руль Жуковского, хотя принципы их построения радикально отличаются.

Произведя в полученном уравнении (10) подстановку (9), получим закрученную по заданному закону лопатку, у которой в каждом сечении будут профили, подобные исходному.

Такой аналитический метод построения решетки профилей имеет ряд преимуществ:

– полностью исключается влияние человека–конструктора, так как качество решетки профилей определяется только качеством математической модели;

– при заданных исходных данных и принятых параметрах существует строго однозначное решение;

– ускоряется процесс проектирования;

– появляется возможность полностью автоматизировать процесс проектирования решетки, производить аналитические операции (дифференцирование, интегрирование и т.д.), что открывает широкие перспективы создания методов расчета характеристик и методов оптимизации решетки профилей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые её приложения. К.: Наукова думка, 1982.- 552 с.
2. Рвачев В.Л., Синекоп Н.С., Кравченко Л.К. Расчет неоднородного цилиндра с жестким включением // Мат. методы и физ.-мех. поля.- 1987.- Вып.26.- С. 72-78.
3. Рвачев В.Л., Проценко В.С. Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. К.: Наукова думка, 1977.- 235с.
4. Рвачев В.Л., Слесаренко А.П., Архипова Е.С. Расчет температурного поля в двухсвязном составном цилиндре сложного сечения // Мат. физика.- 1980.-Вып.28.- С. 87-92.
5. Рвачев В.Л., Проценко В.С., Архипова Е.С. Структурный метод и его приложения к решению пространственных контактных задач теории упругости // Тр. науч. конф. «Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе», Киев, 26-28 сент. 1974 г. -Киев: Ин-т кибернетики АН УССР. -1974.- С. 582-590.
6. Рвачев В.Л. Методы алгебры логики в математической физике. -К.: Наукова.думка, 1974.- 259с.
7. Рвачев В.Л. Геометрические приложения алгебры логики.- К.: Техника, 1967.- 212с.
8. Рвачев В.Л., Шейко Т.И., Шапиро В. Обобщенные интерполяционные формулы Лагранжа-Эрмита на произвольных локусах (Интерлокационные операторы R-функций) // Проблемы машиностроения.- 1998.- Т.1.- №3-4.- С.150-165.



Рис.14. Общий вид закрученной лопатки с затупленными кромками и теплоотводящими каналами для 6-ти итераций

9. Шубенко-Шубин Л.А., Познахирев В.Ф., Тарелин А.А., Антипцев Ю.П. Аналитический метод проектирования длинных рабочих лопаток турбомашин // Энергомашиностроение.- 1973.- №5.- С.1-5.

10. Воробьев Ю.С. Колебания лопаточного аппарата турбомашин.- К.: Наукова думка, 1988.- 224 с.

11. Рвачев В.Л., Шевченко А.Н., Сизова Н.Д. Исследование термонапряженного состояния лопатки авиационных двигателей. // Прикладная механика.-1996.- Т.32.- №2.- С.117-121.

12. Рвачев В.Л., Слесаренко А.П., Сизова Н.Д. Расчет пространственного стационарного температурного поля внутри прямой призмы при определенной температуре на её гранях // Докл. АН УССР. Сер.А.- 1975.- №10.- С.945-948.

13. Рвачев В.Л., Слесаренко А.П., Сизова Н.Д. Температурное поле в цилиндровом блоке аксиально-поршневого насоса // Инж.-физ.журн.- 1980.- Т.34.- №3.- С. 527-531.

14. Жуковский М.И. Расчет обтекания решеток профиля турбомашин. Москва-Ленинград: Машгиз, 1960.

15. Шубенко-Шубин Л.А., Соболев С.П., Познахирев В.Ф. Конструирование профильной части рабочих лопаток последних ступеней мощных паровых турбин // Энергомашиностроение.- 1964.- №9.- С.1-5.

16. Гладкий Б.М., Толок А.В. Применение алгоритма частичной сортировки по глубине к визуализации функции трёх переменных // Вісник Запорізького державного університету.– 1999.- №2.- С 28-35.

17. Толок А.В. Образный анализ в интеллектуальных системах// Научно-теоретический журнал «Искусственный Интеллект».- 2000.- №3. – С. 558 - 565.