УДК 517.927

ДОСТАТНІ УМОВИ ЗБІЖНОСТІ МОДИФІКОВАНОГО КОЛОКАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНОГО МЕТОДУ ДЛЯ РІВНЯНЬ З МАЛОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

Поселюжна В. Б., к. ф.-м. н., доцент

Тернопільська академія народного господарства,

Чортківський інститут підприємництва і бізнесу

Для рівнянь з малою нелінійністю доцільно застосовувати модифіковані варіанти проекційно-ітеративного методу $[1,2]$. У цій роботі досліджується питання застосування колокаційно-ітеративного методу та встановлюються достатні умови його збіжності.

Розглянемо інтегральне рівняння з малою нелінійністю вигляду

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)y(t)dt + \lambda \int_a^b G(x,t)F(t,y(t)), \tag{1}$$

в якому

1) функці я f є$C_{[a,b]}$;

2) лінійні інтегральні оператори

$$(Ky)(x) := \int_a^b K(x,t)y(t)dt, \tag{2}$$

$$(Gy)(x) := \int_a^b G(x,t)y(t)dt, \tag{3}$$

відображають простір $C[a.b]$ в себе і

$$K^2 = \int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 dxdt < \infty, \; G^2 = \int_a^b \int_a^b |G(x,t)|^2 dxdt < \infty,$$

3)F(t,y)-неперервна функція за сукупністю своїх аргументів в області $\{a < t < b, -\infty < y < \infty\}$і задовольняє умові Ліпшиця, тобто

$$|F(t,y_1) - F(t,y_2| < \mu|y_1 - y_2|, \forall\{y_1, y_2\} \in R, \tag{4}$$

де μ - додатня константа; λ - малий параметр.

Застосуємо до рівняння (1) модифікований колокаційно-ітеративний метод, згідно з яким наближені розв'язки рівняння (1) будуються на основі формул

$$y_k(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)z_k(t)dt + \lambda \int_a^b G(x,t)F(t,y_{k-1}(t))dt, \tag{5}$$

$$z_k(x) = y_{k-1}(x) + w_k(x), \tag{6}$$

$$w_k(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j{}^k \varphi_j(x). \tag{7}$$

Невідомі параметри a_j^k, $j = \overline{0,n}$, у кожній ітерації визначаємо з умови

де $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{n}$ - система лінійно-незалежних, неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій, $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ - вузли колокації.

Звичайним способом для визначення параметрів a_j^k отримаємо систему алгебраїчних рівнянь вигляду

$$\sum_{j=0}^{n} a_j^k \left(\varphi_j(x_i) - \int_a^b K(x_i,t)\varphi_j(t)dt \right) = \varepsilon_k(x_i), \qquad i = \overline{0,n}, \tag{9}$$

в якій $\varepsilon_k(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)y_{k-1}(t)dt + \lambda \int_a^b G(x,t)F\left(t, y_{k-1}(t)\right)dt - y_{k-1}(x)$. (10)

Якщо система (9) однозначно розв'язна, то наближені розв'язки рівняння (1) згідно з колокаційно-ітеративним методом (5)-(8) будуються однозначно.

Припустимо, не обмежуючи загальності, що $\{\varphi_j(x)\}$ - фундаментальна система функцій на відрізку [a,b]. Встановимо достатні умови збіжності методу (5)-(8).

$$w_k(x_i) = y_k(x_i) - y_{k-1}(x_i), i = \overline{o,n}, \tag{8}$$

Виконавши нескладні перетворення на основі формул (7), (8) і врахувавши попереднє зауваження, можна показати, що поправка $w_k(x)$ може бути представлена у вигляді

$$w_k(x) = \int_a^b S_n(x,t)\Delta_k(t)dt, \tag{11}$$

де $S_n(x,t) = \sum_{j=0}^{n} \varphi_j(x)\delta(t-x_j)$ (12)

$$\Delta_k(x) = y_k(x) - y_{k-1}(x), \tag{13}$$

$\delta(t-x_j)$ -функція Дірака.

Для визначення функції $w_k(x)$ на основі формул (5), (11)-(13) отримаємо інтегральне рівняння з виродженим ядром

$$w_k(x) = g_k(x) + \int_a^b H_n(x,t)w_k(t)dt, \tag{14}$$

де $g_k(x) = \int_a^b S_n(x,t)\varepsilon_k(t)dt,$ (15)

$$H_n(x,t) = \sum_{j=0}^{n} \varphi_j(x)K(x_j,t). \tag{16}$$

Інтегральне рівняння (14) рівносильне системі рівнянь (9).

Алгоритм (5)-(8) рівносильний таким співвідношенням

$$\Delta_k(x) = \int_a^b M_n(x,t)v_{k-1}(t)dt + \lambda \int_a^b E_n(x,t)\Delta F_{k-1}(t)dt, \tag{17}$$

$$v_k(x) = \int_a^b L_n(x,t)v_{k-1}(t)dt + \lambda \int_a^b D_n(x,t)\Delta F_{k-1}(t)dt, \tag{18}$$

де

$$v_k(x) = \Delta_k(x) - w_k(x), \tag{19}$$

$$\Delta F_{k-1}(x) = F(x, y_{k-1}(x)) - F(x, y_{k-2}(x)), \tag{20}$$

а ядра операторів переходу обчислюються за формулами

$$M_n(x,t) = K(x,t) + \int_a^b K(x,\tau) R_n(\tau,t) d\tau, \tag{21}$$

$$L_n(x,t) = M_n(x,t) - \int_a^b S_n(x,\tau) M_n(\tau,t) d\tau, \tag{22}$$

$$E_n(x,t) = G(x,t) + \int_a^b M_n(x,\tau) G_n(\tau,t) d\tau, \tag{23}$$

$$D_n(x,t) = E_n(x,t) - \int_a^b S_n(x,\tau) E_n(\tau,t) d\tau, \tag{24}$$

де $R_n(x,t)$ - резольвента ядра $H_n(x,t)$ і вона задовольняє рівнянню

$$R_n(x,t) = H_n(x,t) + \int_a^b H_n(x,\tau) R_n(\tau,t) d\tau, \tag{25}$$

$$R_n(x,t) = H_n(x,t) + \int_a^b R_n(x,\tau) H_n(\tau,t) d\tau. \tag{26}$$

Розглянемо функцію

$$E(x,t) = G(x,t) + \int_a^b R(x,\tau) G(\tau,t) d\tau, \tag{27}$$

де $R(x,t)$ - резольвента ядра $K(x,t)$ і введемо такі позначення

$$p_n = \|M_n\|,\ q_n = \|L_n\|, \gamma_n = \|E_n\|, \eta_n = \|D_n\|, \gamma^* = \|E\|, \tag{28}$$

$$r_n = \lambda\mu\gamma_n, \quad l_n = \lambda\mu\eta_n,\ A_n = \begin{pmatrix} r_n & p_n \\ l_n & q_n \end{pmatrix}, \tag{29}$$

в яких M_n, L_n, E_n, D_n, E -інтегральні оператори, ядра яких визначаються формулами (21)-(24) та (27).

Тоді існує твердження, що виражає достатню умову збіжності методу.

Теорема. Нехай одиниця - регулярне значення лінійного інтегрального оператора (2) і нехай система функцій $\{\varphi_j(x)\}_{i=0}^{n}$ та вузли колокації підібрані таким чином, що

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \int_a^b |K(x,t) - H_n(x,t)|^2 dxdt = 0, \tag{30}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \int_a^b |G(x,t) - G_n(x,t)|^2 dxdt = 0, \tag{31}$$

де $G_n(x,t) = \sum_{j=0}^{n} \varphi_j(x) G(x_j,t),$ (32)

і $\lambda\mu\gamma^* < 1,$ тоді існує такий номер n_0, що $\forall n \ge n_0$ система (9) однозначно розв'язна і послідовність $\{y_k(x)\},$ побудована згідно з методом (5) -(8), збігається до єдиного розв'язку рівняння (1).

Отримаємо оцінки похибок цього методу.

Нехай $y^*(x)$ - розв'язок рівняння (1), тобто

$$y^*(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)y^*(t)dt + \lambda\int_a^b G(x,t)F(t,y^*(t))dt \ . \tag{33}$$

Тоді на основі співвідношень (33),(5) отримаємо

$$y^*(x) - y_k(x) = \int_a^b K(x,t)(y^*(t) - y_{k-1}(t) - w_k(t))dt + \lambda\int_a^b G(x,t)F^*(t)dt\,, \tag{34}$$

де $F^*(x) = F(x, y^*(x)) - F(x, y_{k-1}(x)).$ (35)

Поправка $w_k(x)$ з урахуванням співвідношення (11) може бути представлена у вигляді

$$w_k(x) = \beta_{k-1}(x) - \beta_k(x)\,, \tag{36}$$

де $\beta_k(x) = \int_a^b S_n(x,t)(y^*(t) - y_k(t))dt\,.$ (37)

Тоді на основі співвідношень (37), (33), (5)-(7), (36) для $\beta_k(x)$ отримаємо інтегральне рівняння з виродженим ядром вигляду

$$\beta_k(x) = r_k(x) + \int_a^b H_n(x,t)\beta_k(t)dt\,, \tag{38}$$

в якому

$$r_k(x) = \int_a^b\int_a^b S_n(x,\tau)K(\tau,t)h_{k-1}(t)dtd\tau + \lambda\int_a^b G_n(x,t)F^*(t)dt\,, \tag{39}$$

$$h_k(x) = y^*(x) - y_k(x) - \beta_k(x). \tag{40}$$

При виконанні умов теореми рівняння (38) при достатньо великих n однозначно розв'язне, тобто буде справедливе представлення

$$\begin{aligned}\beta_k(x) = &\int_a^b H_n(x,t)h_{k-1}(t)dt + \int_a^b\int_a^b R_n(x,\tau)H_n(\tau,t)h_{k-1}(t)dtd\tau + \\ &+ \lambda\int_a^b G_n(x,t)F^*(t)dt + \lambda\int_a^b\int_a^b R_n(x,\tau)G_n(\tau,t)F^*(t)dtd\tau.\end{aligned} \tag{41}$$

Тоді, підставивши співвідношеня (41) у (35) , враховуючи співвідношення (36), (21), (23) отримаємо

$$y^*(x) - y_k(x) = \int_a^b M_n(x,t)h_{k-1}(t)dt + \lambda\int_a^b E_n(x,t)F^*(t)dt \tag{42}$$

Із співвідношень (40), (37), (42) з урахуванням співідношень (22), (24) отримаємо

$$h_k(x) = \int_a^b L_n(x,t)h_{k-1}(t)dt + \lambda\int_a^b D_n(x,t)F^*(t)dt \tag{43}$$

Тоді, з урахуванням позначень (28), (29) маємо

$$\|y^* - y_k\| \le p_n\|y^* - y_{k-1} - \beta_{k-1}\| + r_n\|y^* - y_{k-1}\|\,, \tag{44}$$

$$\|y^* - y_k - \beta_k\| \le q_n\|y^* - y_{k-1} - \beta_{k-1}\| + l_n\|y^* - y_{k-1}\|. \tag{45}$$

Введемо такі позначення

$$a_k = \begin{pmatrix} \|y^* - y_k\| \\ \|y^* - y_k - \beta_k\| \end{pmatrix}, \tag{46}$$

$$b_k = \begin{pmatrix} \|\Delta_k\| \\ \|v_k\| \end{pmatrix}. \qquad (47)$$

Тоді, використовуючи результати роботи $[1]$, отримаємо такіі оцінки

$$a_k \le A_n{}^k a_0, \qquad (48)$$

які характеризують швидкість збіжності методу, та апостеріорні оцінки

$$a_k \le (1 - A_n)^{-1} A_n b_k, \qquad (49)$$

$$a_k \le (1 - A_n)^{-1} A_n{}^{k-1} b_1 . \qquad (50)$$

Зауваження. Якщо $\lambda = 0$, то оцінки (48)-(50) співпадають з відомими оцінками [1] для лінійних рівнянь.

ЛІТЕРАТУРА

1. Лучка А.Ю. Проекционно-итеративные методы.-К.: Наук.думка,1993.-288с.

2. Лучка А.Ю. Достаточные условия сходимости модифицированого проекционно- итеративного метода для уравнений со слабой нелинейностью //Укр. мат. журн. - 1990.-42, №12 .-С.1626-1635.