УДК 517

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ДІАГНОСТИКИ ТРІЩИН У ТІЛАХ ЗА ДОПОМОГОЮ АНАЛІЗУ КРАЙОВОГО РОЗПОДІЛУ ТЕМПЕРАТУРИ

Пожуєв В.І., д.ф.-м.н., професор, Сорока Д.М., аспірант

Запорізька державна інженерна академія

У задачах діагностики часто єдино можливим місцем для розміщення різноманітного роду датчиків є поверхня тіла. Тому для розв'язування задачі виявлення тріщин необхідно вивчити вплив тріщин на розподіл температури уздовж межі тіла. У цій статті розглянутий вплив однієї тріщини в тілі достатньо простої форми.

Математична модель. Будемо розглядати двовимірну задачу теплопровідності з нульовими початковими умовами. На межах тіла будуть задані умови третього роду (конвективного типу), при цьому з однієї сторони тіло буде підігріватися, тобто зовнішня температура буде більше нуля, а на всіх інших сторонах зовнішня температура залишається нульовою. У такий спосіб моделюється тіло, що тестується, до однієї сторони якого підведене джерело тепла, а з інших сторін розташовані датчики. Ця задача описується таким диференційним рівнянням:

$$\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}=\frac{1}{k}\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} \tag{1}$$

із граничними умовами такого типу:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial n(x,y)}+\mu u(x,y,t)=\mu U, \quad (x,y)\in \Gamma_1,\\ &\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial n(x,y)}+\mu u(x,y,t)=0, \quad (x,y)\in \Gamma_2,\end{aligned} \tag{2}$$

де $n(x,y)$ — зовнішня нормаль до межі тіла, μ — коефіцієнт теплопередачі, Γ_1 — межа, що підігрівається, U — температура джерела тепла, Γ_2 — інша межа тіла. Початкова температура і температура навколишнього середовища дорівнює нулю. Для розв'язку будемо використовувати фундаментальний розв'язок, що залежить від часу.

За таких умов зручно застосувати крайову схему, у якій процес інтегрування йде з початкового моменту часу, і тому не потрібно підраховувати значення функції u у внутрішніх точках тіла.

Запишемо крайове формулювання цього рівняння для випадку інтерполяції за часом і за простором постійними функціями. Нехай інтервал часу ділиться на F кроків, а межа розбивається на N елементів, тоді відповідно до [1] маємо:

$$c_i u_F^i + k\sum_{n=1}^{N}\sum_{f=1}^{F} u_f^n \int_{\Gamma_1}\int_{t_{f-1}}^{t_f}\frac{\partial \omega}{\partial n}dtd\Gamma = k\sum_{n=1}^{N}\sum_{f=1}^{F}\frac{\partial u}{\partial n}^{n}_{f}\int_{\Gamma_1}\int_{t_{f-1}}^{t_f}\omega dtd\Gamma \tag{3}$$

де ω і $\dfrac{\partial \omega}{\partial n}$ — фундаментальний розв'язок і його нормальна похідна, що мають вигляд:

$$\begin{aligned}&\omega=\frac{1}{4\pi k\tau}\exp\left[-\frac{r^2}{4k\tau}\right]\\ &\frac{\partial \omega}{\partial n}=\frac{d}{8\pi k^2\tau^2}\exp\left[-\frac{r^2}{4k\tau}\right]\end{aligned} \tag{4}$$

де $r^2=(x(\xi)-x_i)^2+(y(\xi)-y_i)^2$ — квадрат відстані до вузлової точки, а $d=-\big((x(\xi)-x_i)n_x+(y(\xi)-y_i)n_y\big)$. Записавши (3) у матричній формі, маємо:

$$\sum_{f=1}^{F}\mathbf{H}_{fF}\mathbf{U}_f=\sum_{f=1}^{F}\mathbf{G}_{fF}\mathbf{Q}_f \tag{5}$$

При цьому температура і потік у моменти часу t_f, $f<F$ були обчислені на попередніх кроках за часом. Невідомими є температура і потік для моменту часу t_F. Коефіцієнти матриць розраховуються за такими формулами:

$$\begin{aligned}
h_{fF\,ij}&=k\int_{-1}^{1}\frac{d}{2\pi kr^2}\left[\exp\left(-a_{f-1}\right)-\exp\left(-a_f\right)\right]d\xi,\quad i\neq j\\
g_{fF\,ij}&=k\int_{-1}^{1}\frac{1}{4\pi k}\left[\mathrm{E}_1\left(a_{f-1}\right)-\mathrm{E}_1\left(a_f\right)\right]d\xi,\quad i\neq j\\
h_{fF\,ii}&=0,\quad h_{FF\,ii}=\frac{1}{2}\\
g_{fF\,ij}&=\frac{\ell}{4\pi}\left[\mathrm{iE}_1\left(a_{f-1}\right)-\mathrm{iE}_1\left(a_f\right)\right]
\end{aligned} \tag{6}$$

а допоміжні функції — за такими формулами:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_1(a)&=-C-\ln a+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{a^n}{n\,n!}\\
\mathrm{iE}_1(\alpha)&=2-C-\ln\alpha+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n(2n+1)n!}\\
a_f&=\frac{r^2}{4k\left(t_F-t_f\right)}\\
\alpha_f&=\frac{\ell^2}{16k\left(t_F-t_f\right)}\\
\exp(-a_F)&=0,\quad \mathrm{E}_1(a_F)=0,\quad \mathrm{iE}_1(\alpha_F)=0
\end{aligned} \tag{7}$$

де $\ell=\sqrt{dx_j^2+dy_j^2}$ — довжина елемента, $x(\xi)=cx_j+dx_j/2$, $y(\xi)=cy_j+dy_j/2$, $\left(cx_j,cy_j\right)$ — координати центру елемента, а dx_j,dy_j — проекції елемента на координатні осі, $n_x=-dy_j/\ell$ и $n_y=dx_j/\ell$ — проекції нормалі до елемента на координатні осі.

Для моделювання тріщини користуємося способом, описаним у [2]. Чисельне інтегрування будемо робити методом Гаусса. При формуванні матриці системи для точок із заданою умовою конвективного типу будемо вважати невідомою величиною температуру: виразивши потік через неї $\frac{\partial u^j}{\partial \mathrm{n}_F}=\mu U-\mu u_F^j$, отримаємо:

$$\begin{aligned}
&\ldots h_{FF\,ij}u_F^j\ldots=\ldots g_{FF\,ij}\frac{\partial \mathrm{u}^j}{\partial \mathrm{n}_F}\ldots,\\
&\ldots h_{FF\,ij}u_F^j\ldots=\ldots g_{FF\,ij}\left(\mu U-\mu u_F^j\right)\ldots,\\
&\ldots\left(h_{FF\,ij}+\mu g_{FF\,ij}\right)u_F^j\ldots=\ldots\mu U g_{FF\,ij}\ldots,
\end{aligned} \tag{8}$$

тобто в матрицю коефіцієнтів СЛАР додаємо $\left(h_{FF\,ij}+\mu g_{FF\,ij}\right)$, у стовпчик вільних членів $\mu U g_{FF\,ij}$.

Програмна модель. Тепер відзначимо особливості програмної реалізації цього методу в рамках об'єктної моделі, викладеної в [2]. У зв'язку з тим, що треба зберігати в одному вузлі декілька значень температури — по одному для кожного кроку за часом, змінимо цю модель. Як-от, відокремимо геометричні характеристики задачі від фізичних характеристик. Поділ будемо робити на всіх трьох рівнях: на рівні тіл, елементів і вузлів. Наприклад, для вузлів це значить, що координати, пов'язані із цим вузлом, будуть зберігатися окремо від температури і потоку. У геометричному елементі будуть зберігатися індекси початкового і кінцевого геометричного вузла, у фізичному будуть зберігатися порядок функцій , що інтерполюють, і індекс зв'язку — індекс геометричного елемента, до якого він

належить, причому до того самого геометричного елемента може належати декілька фізичних елементів. Таке відношення (один до багатьох) справедливо і на інших рівнях моделі.

Зв'язування частин задачі будемо робити на рівні тіл — у кожному фізичному тілі будемо зберігати індекс зіставленого з ним геометричного тіла. Значення індексів зв'язку, що зберігаються у фізичних вузлах і елементах, локальні в рамках цього геометричного тіла. Для визначення глобального індексу необхідно знати початкові зсуви, що утримуються усередині опису тіла.

Такий поділ зручний і вигідний не тільки через необхідність зберігати декілька фізичних характеристик для одного геометричного вузла. Головним чином воно зручно, тому що дозволяє розділити алгоритми, що працюють із тільки геометричними даними (наприклад, різного роду розбиття і дискретизації простору задачі) від алгоритмів що формують коефіцієнти СЛАР. А це спрощує реалізацію алгоритмів з обох сторін. Крім того, поділ підвищує читаність і спрощує модифікацію вхідних даних. Наприклад, у попередній моделі для відрізка який розбивався на n елементів, зберігалися $n+1$ вузол, у кожному з яких знаходилися дві його координати і значення температури. При зміні положення кінця відрізка доводилося їх ще раз перераховувати. Тепер для такого відрізка зберігається два геометричних вузли з координатами кінців відрізка і $n+1$ вузол, що містить температуру, потік, тип крайової умови та параметричну (локальну) координату вузла на цьому відрізку. У такий спосіб при зміні координат кінця відрізка не треба ще раз перераховувати вузли, оскільки їх локальні координати не змінилися, а дві глобальні координати вузла можна легко вирахувати за локальною. Крім того економиться пам'ять — зберігаємо одну координату замість двох.

У зміненій моделі під вузлом будемо розуміти або геометричні значення або масив фізичних значень, у якому кількість елементів відповідає кількості кроків за часом. У випадку статичних задач кількість дорівнює одиниці. Елемент, як і раніше, являє собою сукупність вузлів, а тіло — сукупність елементів. Додатково до старої моделі з'явилися спеціальні поля зв'язку, у яких зберігається локальний індекс відповідного компонента геометричного рівня.

Результати розрахунків. Роздивимося, як впливає тріщина на крайовий розподіл температури. Для цього розрахуємо дві задачі: із тріщиною й еталонну та порівняємо отримані розв’язки. Під еталонним розподілом температури для тіла, будемо розуміти такий розподіл, коли тріщина відсутня, але всі інші

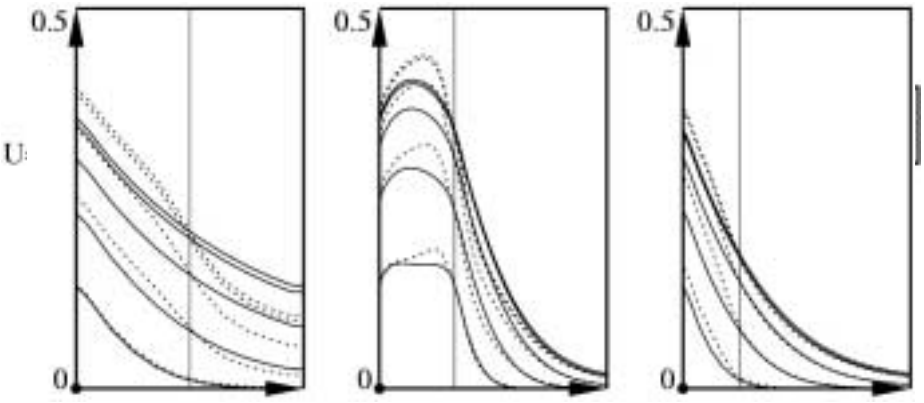


Рис. 2. Крайовий розподіл для різних моментів часу

умови однакові. Розрахунок будемо робити для тіл, зазначених на рис. 1 за схемою, описаною вище. Отримані графіки розподілу температури уздовж межі тіла показані на рис 2.

Вертикальна лінія на рисунках позначає точку, у якій перетинаються межа тіла і пряма, на якій лежить тріщина. З графіків можна побачити, що частина межі між цією точкою і ділянкою межі, що нагрівається, у всіх тілах прогрівається швидше і до більшої температури в порівнянні з еталонним розподілом. Це відповідає інтуїтивному припущенню, що тріщина заважає розповсюдженню тепла, і сприяє більш сильному нагріванню тієї частини тіла, що знаходиться між тріщиною і джерелом тепла.

При моделювання тріщини ми робимо розбивку тіла на дві області, у такий спосіб щоб тріщина знаходилася на лінії розбивки. Перед тим, як проводити подальший аналіз, перевіримо, який вплив на задачу робить така розбивка. Для цього на місці тріщини введемо крайові умови сполучення замість крайових умов для тріщини і після цього розрахуємо крайовий розподіл для задачі і порівняємо з еталонним розв’язком. Результати наведені на рис. 3.

Бачимо, що внесена примусовою розбивкою похибка лежить цілком у рамках припустимого, причому найбільшого значення вона досягає в перші моменти часу і на кутах межі (точки геометричної особливості). З часом вона зменшується і складає біля 5–10%.

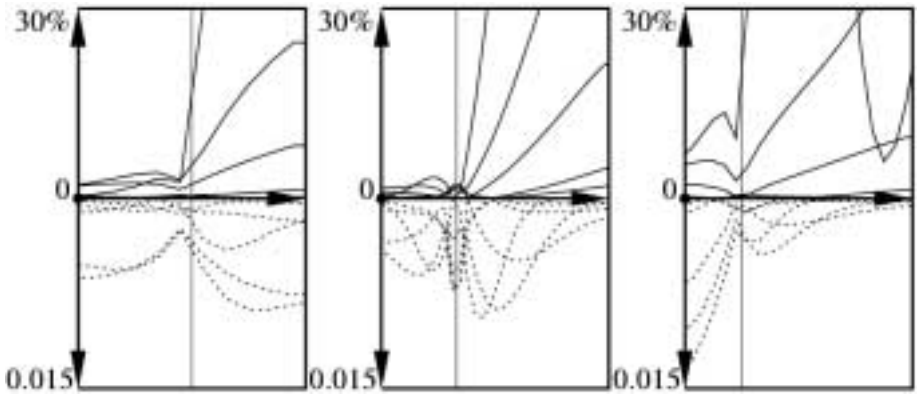


Рис. 3. Похибка внесена розбивкою тіла

Крім цього проведемо ще одну перевірку — можливо, така поведінка розподілу температури обумовлена тим, що ми проводимо розбивку по прямій, на якій лежить тріщина. Для цієї перевірки змінимо розбивку: зрушимо точки розбивки P для першого і третього тіла праворуч, тоді лінія розбивки буде являти собою деяку ламану. Результати розрахунку показані на рис. 4.

Проте все рівно спостерігаємо таку ж ситуацію з крайовим розподілом температури: біля точки перетинання лінії тріщини з межею різниця між значеннями температури в еталонному розподілі й у розподілі з тріщиною змінює знак. Тепер роздивимося розподіл температури по всій поверхні тіла в цілому. Воно зображено на рис 5. На розподілі можна виділити дві ділянки: на одній більша температура належить розподілу з тріщиною, на іншій, навпаки, еталонному розподілу; причому краї ділянок лежать в околі точок перетинання прямої тріщини з межею тіла. Цю властивість можна застосувати для оцінки наявності тріщини та для приблизного визначення розташування тріщини.

Висновки. Для підвищення зручності роботи з програмною моделлю і підвищення рівня абстракції різноманітних алгоритмів необхідно розділити в моделі геометричні і фізичні характеристики задачі, проте для їх зберігання продовжувати використовувати загальні для обох характеристик поняття вузла, елемента, тіла. Зв'язування геометричної і фізичної частини задачі проводжується на рівні тел.

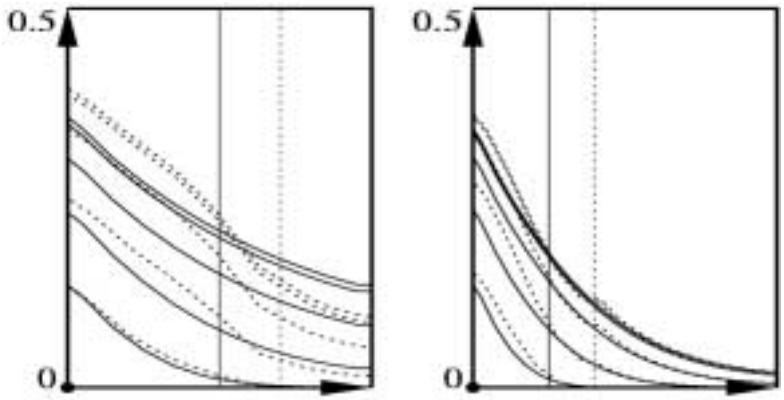


Рис. 4. Розподіл температури при зміненій розбивці тіла.

При наявності однієї тріщини крайовий розподіл температури у випадку простого двомірного тіла змінюється в такий спосіб: на ділянці межі, що лежить між точками перетинання прямої, що проходить уздовж тріщини, та містить ділянку, що нагрівається, температура вище ніж у еталонному розподілі для тіла без тріщини. У районі точок перетинання температури дорівнюються. На іншій частині межі еталонна температура більше, причому чим далі від точок перетинання, тим менше помітно вплив тріщини.

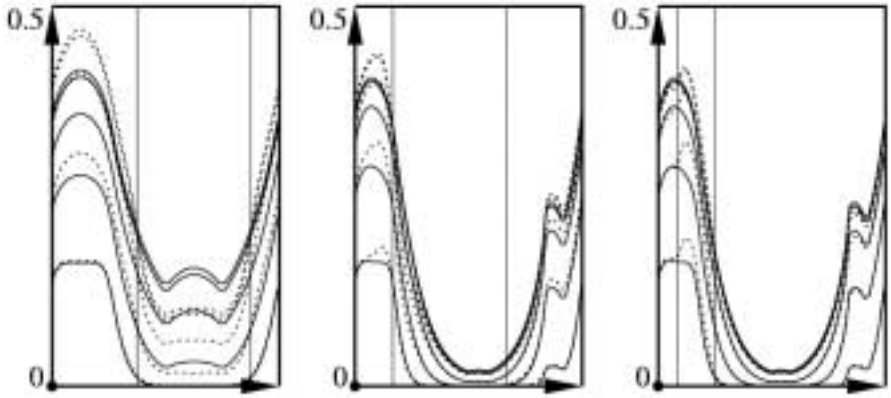


Рис. 5. Розподіл температури по всій межі тіла.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бреббия К., Вроубел Л., Теллес Ж.. Методы граничных элементов. — М.:Мир, 1986 . — 547 с.
2. Пожуєв В.І., Сорока Д.М. Об'єктно-орієнтоване програмування при моделюванні теплового процесу в пластині з тріщиною//Вісник ЗДУ: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. Біологічні науки, 2000. — № 1. — С. 94-99.