УДК 518.25

АНАЛІЗ ПОХИБОК ЗАОКРУГЛЕННЯ СХЕМИ РОЗРІЗАННЯ ДЛЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ З λ-МАТРИЦЯМИ

Босікова І.І., ст. викладач

Чортківський інститут підприємництва і бізнесу

ВСТУП

У циклі робіт [1],[2],[3] були розглянуті різні підходи до розв'язання систем алгебраїчних рівнянь з квадратними і прямокутними λ-матрицями, значне місце серед яких займають алгоритми, котрі узагальнюють прямі чисельні методи лінійної алгебри. Однак у багатьох важливих застосуваннях виникає необхідність розгляду іншого достатньо цікавого випадку - систем лінійних алгебраїчних рівнянь з тригонометричними поліномами.

У цій роботі представлено алгоритм та аналіз похибок заокруглення методу розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь з тригонометричними елементами, який є узагальненням схеми розрізання для чисельних систем.

Розглянемо систему рівнянь

$$\mathrm{A}(\lambda)\mathrm{X}(\lambda)=\mathrm{B}(\lambda), \qquad (1)$$

де $\mathrm{A}(\lambda)$ - регулярна матриця порядку n, елементами якої є – многочлени від λ. Покладається, що значення λ і коефіцієнти многочленів беруться з деякого поля F, так що коли елементи матриці A обчислюються для часткового значення λ, наприклад $\lambda=\lambda_0$, то $A(\lambda_0)\in F^{n\times n}$. $\mathrm{B}(\lambda)$ - це вектор $\left(a_{1,n+1}(\lambda),a_{2,n+1}(\lambda),\ldots,a_{n,n+1}(\lambda)\right)^T$.

Матриця $\mathrm{A}(\lambda)$ і вектор $\mathrm{B}(\lambda)$ мають степені L:

$$a_{ij}(\lambda)=\sum_{k=-L}^{L}a_{ij}^{(k)}e^{ik\lambda}, \qquad \left(\mathrm{i}=\overline{1,n};\ \mathrm{j}=\overline{1,n+1}\right),$$

де

$$2\mathrm{a}_{\mathrm{ij}}^{(\mathrm{k})}=\begin{cases}c_{ij}^{(k)}-id_{ij}^{(k)}, & k\ge 0;\\ c_{ij}^{(k)}+id_{ij}^{(k)}, & k<0.\end{cases}$$

АЛГОРИТМ МЕТОДУ

Для пошуку розв’язку системи (1) пропонується привести її до чисельної системи спеціального вигляду. З цією метою розв’язок заданої системи формально шукатимемо у вигляді відношення двох многочленів:

$$\mathrm{X}(\lambda)=\frac{\sum_{j=-nL}^{nL}e^{ij\lambda}\mathrm{Y}_j}{\sum_{j=-nL}^{nL}e^{ij\lambda}z_j}, \qquad (2)$$

де Y_j $\left(\mathrm{j}=\overline{-\mathrm{nL},\mathrm{nL}}\right)$ - невідомі вектори розмірності n; z_j $\left(\mathrm{j}=\overline{-\mathrm{nL},\mathrm{nL}}\right)$ - невідомі скалярні величини.

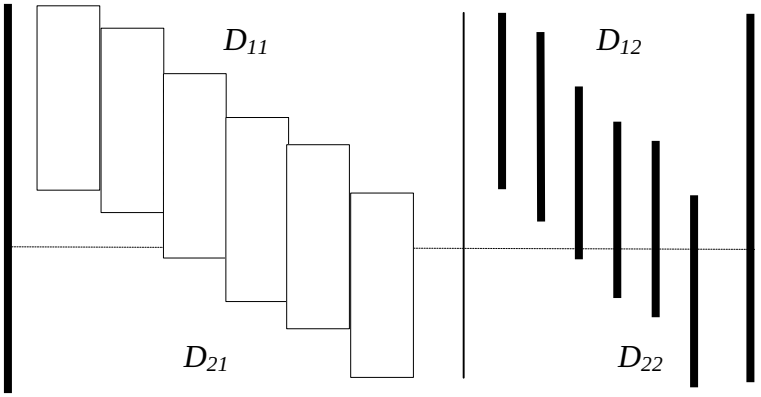
Якщо матрицю *A(λ)* і вектор *B(λ)* представити у вигляді матричних многочленів, тоді система, для визначення невідомих, може бути записана таким чином:

$$\mathrm{A}(\lambda)\mathrm{X}(\lambda) = (\mathrm{A}_{-L}e^{-Li\lambda} + \mathrm{A}_{-L+1}e^{(-L+1)i\lambda} + ... + \mathrm{A}_0 + ... + \mathrm{A}_{L-1}e^{(L-1)i\lambda} + \mathrm{A}_L e^{Li\lambda}) \times$$
$$\times (\mathrm{Y}_{-nL}e^{-nLi\lambda} + \mathrm{Y}_{-nL+1}e^{(-nL+1)i\lambda} + ... + \mathrm{Y}_0 + ... + \mathrm{Y}_{nL-1}e^{(nL-1)i\lambda} + \mathrm{Y}_{nL}e^{inL\lambda}) =$$
$$= (\mathrm{B}_{-L}e^{-iL\lambda} + \mathrm{B}_{-L+1}e^{(-L+1)i\lambda} + ... + \mathrm{B}_0 + ... + \mathrm{B}_{L-1}e^{(L-1)i\lambda} + \mathrm{B}_L e^{iL\lambda}) \times (z_{-nL}e^{-nLi\lambda} +$$
$$+ z_{-nL+1}e^{(-nL+1)i\lambda} + ... + z_0 + ... + z_{nL-1}e^{(nL+1)i\lambda} + z_{nL}e^{nLi\lambda}).$$

Згрупувавши члени в лівій і правій частинах рівності при однакових степенях λ та прирівнявши після цього коефіцієнти при однакових степенях λ, одержимо чисельну систему $n[2(Ln+L)+1]$ рівнянь з $(n+1)(2Ln+1)$ невідомими, яку для більшої наочності подальших викладок запишемо в матричному вигляді:

$$\begin{vmatrix}
A_{-L} & & & & & & & -B_{-L} \\
A_{-L+1} & A_{-L} & & & & & & -B_{-L+1} \\
A_{-L+2} & A_{-L+1} & A_{-L} & & & & & -B_{-L+2} \\
 & & & \dots & & & & \dots \\
A_0 & A_{-1} & \dots & A_{-L} & & & & -B_0 \\
A_1 & A_0 & \dots & A_{-L+1} & A_{-L} & & & -B_1 \\
 & & & & \dots & & & \dots \\
A_L & A_{L-1} & \dots & A_{-L+1} & A_{-L} & & & -B_L \\
 & & & & \dots & & & \\
 & A_L & A_{L-1} & \dots & A_{-L+1} & A_{-L} & & . \\
 & & A_L & A_{L-1} & \dots & A_{-L+1} & A_{-L} & . \\
 & & & A_L & A_{L-1} & \dots & A_{-L+1} & . \\
 & & & & \dots & & & \\
 & & & & & A_L & A_{L-1} & A_{L-2} \\
 & & & & & & A_L & A_{L-1}
\end{vmatrix}
\times
\begin{vmatrix}
Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \dots \\ Y_{L+1} \\ Y_{L+2} \\ \dots \\ Y_{2L+1} \\ \dots \\ Y_{2nL} \\ Y_{2nL+1} \\ z_1 \\ \dots \\ z_{2nL-1} \\ z_{2nL} \\ z_{2nL+1}
\end{vmatrix}
= 0. \qquad (3)$$

Розіб’ємо матрицю отриманої системи на блоки:



.

Тут D_{11}- квадратна матриця розміру $(2nL+1)n$, а D_{12}, D_{21}, D_{22} - прямокутні матриці відповідних розмірів.

Без обмеження загальності припускається, що мінор D_{11} відмінний від нуля. Для цього достатньо виконання умови $\det \mathrm{A} \neq 0$. Надавши z_{Ln} будь-яке значення, наприклад 1, можна записати неоднорідну систему

$$\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Її розв’язки, з точністю до множника, співпадають з розв’язками системи (3). На основі формули Шура вектор Z може бути визначений із такої системи рівнянь:

$$\left(D_{22} - D_{21}D_{11}^{-1}D_{12}\right)Z = B_2 - D_{21}\, D_{11}^{-1}\, B_1 \quad . \qquad (5)$$

Після того, як знайдено Z, Y обчислюється із системи:

$$D_{11}\,Y = B_1 - D_{12}\,Z\,. \qquad (6)$$

Таким чином, обчислення невідомих Y і Z системи (4) може бути зведено до пошуку розв'язків двох систем (5) і (6) меншого порядку. Зупинимось більш детально на виконанні кожної ланки алгоритму та оцінці обчислювальних затрат схеми на кожному кроці реалізації.

Етап 1. (Обчислення $D_{11}^{-1}D_{12}$ і $D_{11}^{-1}B_1$). Для обчислення добутків $D_{11}^{-1}D_{12}$ і $D_{11}^{-1}B_1$ досить [2] для всіх $i = 0,...,2nL$ обчислити розв'язки систем вигляду:

$$\begin{pmatrix} A_{-L} & 0 & 0 & ... & 0 \\ A_{-L+1} & A_{-L} & 0 & ... & 0 \\ A_{-L+2} & A_{-L+1} & A_{-L} & ... & 0 \\ & & ... & & \\ A_{L} & A_{L-1} & A_{L-2} & ... & 0 \\ 0 & A_{L} & A_{L-1} & ... & 0 \\ & & ... & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & A_{-L} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} W_0^{(i)} \\ W_1^{(i)} \\ W_2^{(i)} \\ ... \\ W_{2L}^{(i)} \\ W_{2L+1}^{(i)} \\ ... \\ W_{2nL}^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{-L} \\ B_{-L+1} \\ B_{-L+2} \\ ... \\ B_{L} \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

По характеру заповнення D_{11} - блочно-трикутна квадратна матриця клітково-тепліцевого характеру. Тоді достатньо розв'язати систему при $i = 0$. Решта невідомих $W_j^{(i)}$ $\left(i = \overline{1,2nL};\ \ j = \overline{0,2nL}\right)$ може бути визначена із співвідношень:

$$\left.\begin{aligned} &W_0^{(i)} = W_1^{(i)} = ... = W_{i-1}^{(i)} = 0, \\ &W_i^{(i)} = W_0^{(0)}, \\ &W_{i+1}^{(i)} = W_1^{(0)}, \\ &\quad ... \\ &W_{2nL}^{(i)} = W_{2nL-i}^{(0)}. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Як було вже сказано, матриця системи (7) є клітково - тепліцевою, блочно-трикутною ще й стрічковою. Тому розв'язки можна обчислювати за формулою:

$$\left.\begin{aligned} &W_i^{(0)} = A_{-L}^{-1}\left[B_{-L+i} - \sum_{j=1}^{i} A_{-L+j} W_{i-j}^{(0)}\right], \quad \left(i = \overline{0,2L}\right), \\ &W_i^{(0)} = A_{-L}^{-1}\left[-\sum_{j=1}^{2L} A_{-L+j} W_{i-j}^{(0)}\right], \quad \left(i = \overline{2L+1,2nL}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Обчислення A_{-L}^{-1} вимагає виконання $\frac{4}{3}n^3$ операцій. Для обчислення усіх добутків $A_0^{-1}A_J$ треба виконати $(2L+1)n^3$ операцій додавання та множення. Множення вектора порядку n на квадратну матрицю $n\times n$ вимагає в загальному випадку виконання n^2 операцій. Тому для обчислення кожного $W_j^{(0)}$ потрібно $(2L+1)n^2$ арифметичних дій. Всього для визначення усіх $W_j^{(0)}$ $\left(j = \overline{0;\,2nL}\right)$ слід виконати, з точністю до головного члена L^2n^3 операцій.

Неважко переконатися, що

$$D_{11}^{-1}B_1 = \left(0...0W_0^{(0)}W_1^{(0)}...W_{2L}^{(0)}\right)^T.$$

Крім того з урахуванням (8) можна записати:

$$D_{11}^{-1}D_{12} = \begin{pmatrix} W_0^{(0)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ W_1^{(0)} & W_0^{(0)} & 0 & \dots & 0 \\ W_2^{(0)} & W_1^{(0)} & W_0^{(0)} & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ W_{2L}^{(0)} & W_{2L-1}^{(0)} & W_{2L-2}^{(0)} & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ W_{2nL}^{(0)} & W_{2nL-1}^{(0)} & W_{2nL-2}^{(0)} & \dots & W_{2L+1}^{(0)} \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Слід відмітити, що $W_i^{(0)}$ - вектори розмірності n.

Етап 2. (Обчислення $D_{21}\left(D_{11}^{-1}B_1\right)$ і $D_{21}\left(D_{11}^{-1}D_{12}\right)$.Для обчислення $D_{21}(D_{11}^{-1}B_1)$ треба розглянути добуток матриці розмірності $2Ln\times(2nL+1)n$ та вектора порядку $(2nL+1)n$.

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & A_L & A_{L-1} & \dots & A_{-L+3} & A_{-L+2} & A_{-L+1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & A_L & \dots & A_{-L+4} & A_{-L+3} & A_{-L+2} \\ & & & & \dots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_L & A_{L-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & A_L \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ W_0^{(0)} \\ \dots \\ W_{2L}^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Для цього треба виконати не більше $4n^2L^2$ множень та додавань, оскільки матриця D_{21} має заповнену частину не більше, ніж $2nL\times 2nL$.

Добуток $D_{21}\left(D_{11}^{-1}D_{12}\right)$ вимагає більш ретельного дослідження. З цією метою розглянемо добуток двох матриць, розміри яких відповідно - $2nL\times(2nL+1)n$ і $(2nL+1)n\times 2nL$:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & A_L & A_{L-1} & A_{L-2} & \dots & A_{-L+2} & A_{-L+1} \\ 0 & \dots & 0 & A_L & A_{L-1} & \dots & A_{-L+3} & A_{-L+2} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & A_L & \dots & A_{-L+4} & A_{-L+3} \\ & & & & \dots & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & A_L & A_{L-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_L \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} W_0^{(0)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ W_1^{(0)} & W_0^{(0)} & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ W_{2L}^{(0)} & W_{2L-1}^{(0)} & W_0^{(0)} & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ W_{2nL}^{(0)} & W_{2nL-1}^{(0)} & W_{2nL-2L}^{(0)} & \dots & W_{2L+1}^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Немає необхідності виконувати множення кожного рядка першої матриці на кожний стовпець другої. Якщо перемножити стовпець

$$\left(W_0^{(0)}\ W_1^{(0)}\ \dots W_{2L}^{(0)} \dots W_{2nL}^{(0)}\right)^T \qquad (11)$$

на перший рядок першої матриці

$$(00\ \dots 0\ A_L A_{L-1} \dots A_{-L+2}\ A_{-L+1}), \qquad (12)$$

то в процесі обчислень будуть знайдені як проміжні величини всі діагональні елементи. При множенні стовпця (11) на другий рядок першої матриці будуть як проміжні величини обчислені і елементи першої піддіагоналі. При множенні цього ж стовпця на третій рядок в процесі обчислень заодно будуть знайдені всі елементи другої піддіагоналі і т.д. Всього на виконання цієї процедури потрібно виконати $4L^2n^2$ операцій множення та додавання.

Аналогічно для знаходження всіх наддіагональних елементів добутку достатньо перемножити рядок на кожний стовпець другої матриці. При множенні (12) на другий стовпець матриці як проміжні величини будуть обчислені і елементи першої наддіагоналі, при множенні цього рядка на третій стовпець заодно будуть знайдені і всі елементи другої наддіагоналі і т.д. На виконання цієї процедури потрібно виконати $4L^2n^3$ операцій множення та додавання.

У результаті отримаємо матрицю A^* розміром $2nL \times 2nL$ загального вигляду:

$$A^* = \begin{pmatrix} A^*_{11} & A^*_{12} & \dots & A^*_{1,2L} \\ A^*_{21} & A^*_{22} & \dots & A^*_{2,2L} \\ & & \dots & \\ A^*_{2L,1} & A^*_{2L,2} & \dots & A^*_{2L,2L} \end{pmatrix}.$$

Етап 3. (Визначення Z). Спочатку потрібно обчислити величини $D_{22} - \left(D_{21}\, D_{11}^{-1}\, D_{12}\right)$ і $B_2 - \left(D_{21}\, D_{11}^{-1}\, B_1\right)$. Як було показано на попередньому кроці, $D_{21}\, D_{11}^{-1}\, D_{12} = A^*$ - це матриця розміру $2nL \times 2nL$, а $D_{21}\, D_{11}^{-1}\, B_1 = B^*$ - вектор розмірності $2nL$. Тому для обчислення $D_{22} - \left(D_{21}\, D_{11}^{-1}\, D_{12}\right)$ досить виконати $4L^2n^2$ додавань, а $B_2 - \left(D_{21}\, D_{11}^{-1}\, B_1\right)$ -- $2nL$ додавань. Для визначення Z з системи $2nL$ рівнянь з $2nL$ невідомими потрібно виконати $O(2nL)^\beta$ операцій. При використанні алгоритму відсічених систем $\beta = 3$, а для швидких схем типу Штрассена $\beta = \log_2 7$ і менше.

Етап 4. (Визначення Y). Спочатку треба обчислити праву частину $B_1 - D_{12} Z$ системи (6). Для множення D_{12} на Z доведеться виконати $4L^2n^2$ операцій множення і таку ж саму кількість додавань. Після цього система (6) може бути розв'язана за формулами типу (9). Для цього потрібно виконати, з точністю до головного члена, по L^2n^3 адитивних та мультиплікативних операцій.

Таким чином, на реалізацію всього алгоритму з чотирьох етапів потрібно виконати $4L^2n^3+0(2nL)^\beta$ арифметичних операцій на ЕОМ.

Аналіз похибок заокруглення. Аналіз похибок заокруглення для описаного алгоритму проведений згідно з так званим зворотним аналізом похибок, у відповідності до якого, реально обчислені розв'язки x_t системи

$$Ax=B$$

розглядаються як результат точного розв'язування системи лінійних рівнянь зі збуреними даними

$$A_t x_t = B_t\ .$$

Основним для ЕОМ є режим обчислення з плаваючою комою, в якому кожне ненульове число x може бути представлене парою чисел m і p, так що $x = m\xi^p$. Тут ξ-основа системи числення ЕОМ, p-ціле число, m-таке, що

$$1/\xi \le |m| < 1.$$

Прийнято називати m-мантисою, а p-порядком числа x. Припускається, що ЕОМ має t-розрядну мантису.

Для сучасних ЕОМ похибки окремих арифметичних операцій мають незначну величину, так що

$$fl(x * y) = (x * y)(1 + \varepsilon),$$

де

$$\begin{cases} |\varepsilon| \le \dfrac{1}{2}\xi^{-t+1}, & \text{коли } fl(x * y) \ne 0, \\ \varepsilon = -1, & \text{коли } fl(x * y) = 0, \text{ але } (x * y) \ne 0. \end{cases}$$

Через $fl(x * y)$ тут позначено кінцевий дріб, який отримується після заокруглення числа $(x * y)$ з плаваючою комою до t-го розряду після коми. Число $(x * y)$ одержується з чисел x і y з плаваючою комою в результаті виконання деякої арифметичної операції "+", "-", "×", "/".

У різних обчислювальних агоритмах доводиться проводити оцінку похибок різними способами. Сформулюємо один результат загального характеру, який може бути використаний при побудові таких методів.

Теорема. Нехай деякий масив вхідних даних $A\{a_1, a_2, \dots a_n\}$ обробляється за алгоритмом φ, який складається з етапів $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_k$ так, що

$$\hat{A}_t = \varphi_t(A). \tag{13}$$

Тоді реалізації φ_t алгоритму φ на ЕОМ відповідають еквівалентні збурення α масиву вхідних даних A такі, що

$$\|\alpha\|_l \le \prod_{i=1}^{k}(1+\|\alpha^{(i)}\|_l)-1\ . \tag{14}$$

Доведення. За основною ідеєю зворотного аналізу машинної реалізації відношенню (13) можна поставити у відповідність точну реалізацію (13), але зі збуреними вхідними даними, тобто

$$A^{(i)} = \varphi_i(A^{(i-1)}[1+\alpha^{(i)}]). \tag{15}$$

З врахуванням (15) для реалізації першого кроку на ЕОМ можемо записати

$$A^{(1)} = \varphi_i(A[1+\alpha^{(1)}]).$$

Для другого кроку

$$A^{(2)} = \varphi_i(A[1+\alpha^{(2)}]).$$

Продовжуючи цей процес, на k-ому кроці одержимо

$$A^{(k)} = \varphi_k(A^{(k-1)}[1+\alpha^{(k)}]) = \varphi_k([1+\alpha^{(k)}])\varphi_{k-1}(A^{(k-2)}[1+\alpha^{(k-1)}])).$$

Якщо при реалізації довільного обчислювального алгоритму φ_t на ЕОМ виконується хоча б одна арифметична операція, то для відповідного еквівалентого збурення ε мають місце співвідношення

$$(1+\delta)\varphi(x) = \varphi_t(x[1+\varepsilon]). \tag{16}$$

Тоді на основі (16) можемо записати:

$$A^{(2)} = \varphi_2(A^{(1)}[1+\alpha^{(2)}]) = \varphi_2([1+\alpha^{(2)}])\varphi_1(A[1+\alpha^{(1)}])) =$$
$$= \varphi_2(\varphi_1(A[1+\eta^{(2)}][1+\alpha^{(1)}])),$$
$$A^{(3)} = \varphi_3(A^{(1)}[1+\alpha^{(3)}]) = \varphi_3([1+\alpha^{(3)}])\varphi_2(\varphi_1(A[1+\eta^{(2)}]\times$$
$$\times[1+\alpha^{(1)}])) = \varphi_3\varphi_2([1+\alpha^{(3)}])(\varphi_1(A[1+\eta^{(2)}][1+\alpha^{(1)}])) =$$
$$= \varphi_3(\varphi_2(\varphi_1(A[1+\eta^{(3)}][1+\eta^{(2)}][1+\alpha^{(1)}]))),$$

. . . . . .

$$A^{(k)} = \varphi_k(\varphi_{k-1}(..\varphi_1(A[1+\eta^{(k)}][1+\eta^{(k-1)}]...[1+\eta^{(2)}][1+\alpha^{(1)}])...),$$

де

$$\|\eta^{(i)}\| \le \|\alpha^{(i)}\|. \tag{17}$$

Таким чином, якщо

$$\varphi(A)=\varphi_k(\varphi_{k-1}(..\varphi_1(A[1+\eta^{(k)}][1+\eta^{(k-1)}]...[1+\eta^{(2)}][1+\alpha^{(1)}]))`,$$

то

$$\varphi_t(A(1+\alpha)) = \varphi_k(\varphi_{k-1}(..\varphi_1(A\prod_{i=2}^{k}[1+\eta^{(i)}][1+\alpha^{(1)}]))).$$

Звідки

$$\alpha = \prod_{i=2}^{k}[1+\eta^{(i)}][1+\alpha^{(1)}]-1.$$

З урахуванням (17) на основі останьої рівності можна записати

$$\left\|\alpha\right\|_l \le \prod_{i=2}^{k}[1+\left\|\eta^{(i)}\right\|_l][1+\left\|\alpha^{(1)}\right\|_l]-1 \le$$

$$\le \prod_{i=2}^{k}[1+\left\|\alpha^{(i)}\right\|_l][1+\left\|\alpha^{(1)}\right\|_l]-1 = \prod_{i=1}^{k}[1+\left\|\alpha^{(i)}\right\|_l].$$

Що й треба було довести.

Зупинимось тепер безпосередньо на аналізі похибок заокруглення описаного алгоритму схеми розрізання. Спочатку проведемо аналіз похибок для кожного етапу окремо, а потім виведемо остаточну оцінку.

Етап 1.За алгоритмом розрізання спочатку проводиться обчислення добутків

$D_{11}^{-1}D_{12}$ та $D_{11}^{-1}B_1$. За характером заповнення матриця D_{11}- є блочно-трикутна квадратна матриця клітково-тепліцевого характеру. Підрахунок $D_{11}^{-1}D_{12}$ та $D_{11}^{-1}B_{11}$ можна виконати розв'язуючи блочно-трикутну систему з *2Ln+1* правими частинами. Отже, еквівалентні збурення $a_{ij}^{(1)}$ елементів a_{ij} будуть задовільняти нерівності:

$$\left\|\alpha_{ij}^{(1)}\right\| \le 3.015(2nL+1)\left\|A\right\|\xi^{-t+1} \tag{18}$$

для обчислень з одинарною точністю і

$$\left\|a_{ij}^{(1)}\right\| \le 3.015\left\|A\right\|\xi^{-t+1} \tag{19}$$

для обчислень скалярних добутків з подвійною точністю.

Етап 2. На даному етапі виконуються обчислення $D_{22}-D_{21}D_{11}^{-1}D_{12}$ та $B_2-D_{21}D_{11}^{-1}B_1$. При виконанні множення матриць класичним способом одержимо еквівалентні збурення $a_{ij}^{(2)}$ такі, що:

$$\left\|a_{ij}^{(2)}\right\| \le 2.01\times(2nL+1)\max\left\{\left\|D_{22}-D_{21}D_{11}^{-1}D_{12}\right\|,\left\|B_2-D_{21}D_{11}^{-1}B_1\right\|\right\}\xi^{-t+1} \tag{20}$$

для обчислень з одинарною точністю і

$$\left\|a_{ij}^{(2)}\right\| \le 2.01\max\left\{\left\|D_{22}-D_{21}D_{11}^{-1}D_{12}\right\|,\left\|B_2-D_{21}D_{11}^{-1}B_1\right\|\right\}\xi^{-t+1} \tag{21}$$

у випадку застосування обчислень з подвійною точністю для нагромадження скалярних добутків.

Етап 3. Цей крок полягає в розв'язані системи лінійних алгебраїчних рівнянь порядку *2nL* з щільним заповненням, тому

$$\left\|a_{ij}^{(3)}\right\| \le 3.015\times 2nL\left\|A^*\right\|\xi^{-t+1} \tag{22}$$

для обчислень із звичайною точністю та

$$\left\|a_{ij}^{(3)}\right\| \le 3.015\left\|A^*\right\|\xi^{-t+1} \tag{23}$$

для обчислень з подвійною точністю.

Етап 4. Спочатку на даному етапі визначаються матриці $B_1-D_{12}Z.$ При їх обчисленні на ЕОМ виникають такі ж самі похибки, як і на другому кроці. Після обчислення $B_1-D_{12}Z$ необхідно розв'язати систему з матріцею D_{11} порядку *(2nL+1)n* із клітково-трикутним заповненням. Тому будуть виникати такі ж еквівалентні збурення, як на першому кроці:

$$\left\|a_{ij}^{(4)}\right\| \le 3.015(2nL+1)\left\{\left\|A\right\|,\left\|B_1-D_{12}Z\right\|\right\}\xi^{-t+1} \tag{24}$$

для обчислень з одинарною точністю *i*

$$\left\|a_{ij}^{(4)}\right\| \le 3.015\left\{\|A\|, \|B_1 - D_{12}Z\|\right\}\xi^{-t+1} \qquad (25)$$

для обчислень скалярних добутків з подвійною точністю.

Визначемо тепер еквівалентні збурення, котрі відповідають реалізації на ЕОМ всього алгоритму.Якщо всі обчислення проводити з одинарною точністю,то

$$\left\|a_{ji}^{(0)}\right\| \le C_0 nL \max\left\{\|A\|, \left\|D_{22} - D_{21}D_{11}^{-1}D_{12}\right\|, \left\|B_2 - D_{21}D_{11}^{-1}B_1\right\|\|B_1 - D_{12}Z\|\right\}\xi^{-t+1}.$$

А для обчислення скалярних добутків з подвійною точністю

$$\left\|a_{ji}^{(0)}\right\| \le C_0 \max\left\{\|A\|, \left\|D_{22} - D_{21}D_{11}^{-1}D_{12}\right\|, \left\|B_2 - D_{21}D_{11}^{-1}B_1\right\|\|B_1 - D_{12}Z\|\right\}\xi^{-t+1}.$$

На основі проведених обчислень можна зробити висновок, що з точки зору стійкості та швидкодії схема розрізання цілком придатна для застосування на практиці.

ЛІТЕРАТУРА

1. Недашковський М.О. Швидка схема розв'язання для систем лінійних алгебраічних рівнянь з λ - матрицями. - Доп. НАН України, Серія А, Київ, -1995. - № 4. - с. 23 - 29.
2. Недашковский Н.А.. Паралельный прямой метод для решения линейных алгебраических уравнений. - Кибернетика, Киев, 1987, № 4, с. 110-112.
3. Недашковский Н.А.. - Решение систем линейных алгебраических уравнений с полиномиально-численным заполнением // Кибернетика и системный анализ .- 1996.- №6. С.173-183.
4. Панкратьев Е.В. Компьютерная алгебра. Факторизация многочленов. - М.: Изд-во МГУ, 1998. 164 с.
5. Воеводин В.В., Тыртышников Е.Е. Вычислительные процесы с теплицевыми матрицами.-М.: Наука, 1987.-319 с.
6. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. - М.: Наука, 1977.-304 с.
7. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений, М.: Наука, 1970.-504с.