УДК 519.1

ДОСЛІДЖЕННЯ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ СКЛАДНОСТІ ТЕОРЕТИКО-ГРАФОВОЇ ЗАДАЧІ ФОРМУВАННЯ ЦІЛЬОВИХ ГРУП

Перепелиця В.О., д. ф.-м. н., професор, Рябенко А.Є., аспірант

Запорізький державний університет

МАТЕМАТИЧНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Задача формування цільових груп [1] полягає у такому: за вихідні дані розглядається n-вершинний граф $G=(V,E)$, у якому множині вершин V={v} поставлена у взаємооднозначну відповідність множина виконавців, що розподіляються по формованих цільових групах (ЦГ). Якщо для пари вершин v',v'' ребро (v',v'') у множині E є відсутнє, то це означає несумісність відповідної пари виконавців і, отже, небажання встановлення між цією парою зв'язку інформаційного обміну і співпідпорядкованості. Наявність у множині E ребра (v',v'') означає, що відповідна пара виконавців у принципі може мати робочий зв'язок у складі ЦГ. Приписані ребру e ваги $w_v(e)$, $v=\overline{1,N}$ є оцінками (наприклад, у балах) таких, наприклад, показників як психологічна сумісність, функціональна взаємодоповнюваність та ін.

Залежно від цільового призначення формованих груп, для останніх установлюється найкраща структура, що відбиває усередині групи бінарні відношення співпідпорядкованості, інформаційного обміну, професійної взаємодії та ін. Зазначена структура відбивається типовим графом (ТГ). Класифікація ТГ представлена в [1] для випадку, коли групи складаються з 4-х виконавців. У цьому випадку множина усіх припустимих ТГ складена з 6-ти 4-вершинних зв'язаних попарно неізоморфних графів (див. рис. 1), позначених у [1] через $H_t=(U,\Psi_t)$, $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$, $\Psi_t\subset U^2$, $3\le|\Psi_t|\le 6$.

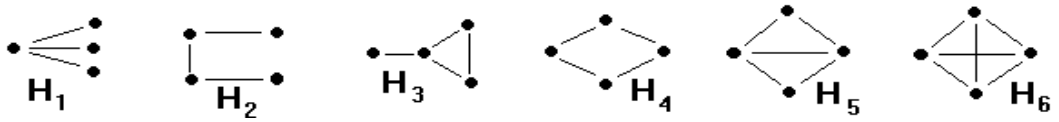


Рис. 1

Множину усіх таких 4-вершинних ТГ позначимо через $\mathcal{H}=\{H_t\}$. Сукупність S_4 усіх непорожніх підмножин множини $\mathcal{H}$ упорядкуємо в порядку неубування їхньої потужності, позначаючи їх через $\mathcal{H}_s$, $\mathcal{H}_s\in\mathcal{H}$, $S_4=\{\mathcal{H}_s\}$, $s=\overline{1,63}$, $|\mathcal{H}s_1|\le|\mathcal{H}s_2|$, якщо $s_1\le s_2$. При цьому індекси перших шести 1-елементних підмножин збігаються з індексом його ТГ, тобто $\mathcal{H}_s=\{H_s\}$, $s=\overline{1,6}$.

Для заданої пари G, $\mathcal{H}_s$ через X=X(G, $\mathcal{H}_s$)={x} позначимо множину усіх припустимих розв'язків (МПР), у якій кожний елемент $x=(V,E_x)$ є у випадку n кратне 4 такий остовний підграф [2], кожний компонент зв'язності якого ізоморфний деякому ТГ $H_t\in\mathcal{H}_s$. На МПР визначена векторна цільова функція (ВЦФ):

$$F(x)=(F_1(x), F_2(x),\ldots,F_N(x)), \tag{1}$$

що складається з критеріїв вигляду MAXSUM

$$F_v(x)=\sum_{e\in E_x} w_v(e)\to\max,\quad v=1,2,...,N_1,\ N_1\le N \tag{2}$$

і критеріїв вигляду MAXMIN

$$F_v(x)=\min_{e\in E_x} w_v(e)\to\max,\ v=N_1+1,...,N \tag{3}$$

Примітка 1. Критерії вигляду MAXSUM (2) є показниками сумарної корисності по відповідній властивості v, $v\in\{1,2,\ldots,N_1\}$; критерії вигляду MAXMIN (3) іноді називають терміном «оцінка по

найгіршому». У якісному відношенні кожен з таких критеріїв відбиває міру ризику, оцінюваємого по найменш надійному елементу розглянутого припустимого розв'язку.

ВЦФ (1)-(3) визначає в МПР X паретовську множину (ПМ) $\tilde{X}$ [3], що складається з паретовських оптимумів (ПО), тобто парето-оптимальных припустимих розв'язків. розв'язок $\tilde{x} \in X$ називається ПО, якщо для нього не існує такого припустимого розв'язку $x^* \in X$, для якого виконуються нерівності $F_\nu(x^*) \geq F_\nu(\tilde{x}), \quad \nu = \overline{1,N}$, серед яких хоча б одна є строгою.

Шуканий найбільш доцільний розв'язок всякої індивідуальної задачі з ВЦФ вигляду (1)-(3) вибирається з ПМ $\tilde{X}$ за допомогою процедур теорії вибору і прийняття рішень [4-8]. Однак, з погляду цієї теорії ПМ $\tilde{X}$ може виявитися надлишковим у тому сенсі, що воно містить значну частку попарно еквівалентних елементів. Тому як шуканий формальний розв'язок багатокритеріальної задачі розглядається повна множина альтернатив (ПМА) [9]. Підмножина $X^0 \subseteq \tilde{X}$ називається ПМА, якщо її потужність мінімальна і при цьому виконується рівняння $F(X^0) = F(X)$, де $F(X^*) = \{F(x) = (F_1(x), F_2(x), \ldots, F_N(x)) : x \in X^*\} \quad \forall X^* \subseteq X$.

1. ОЦІНКИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ СКЛАДНОСТІ ЗНАХОДЖЕННЯ ПМА ДЛЯ ВЕКТОРНОЇ ЗАДАЧІ ФОРМУВАННЯ ЦГ ФІКСОВАНОГО ТИПУ

Обмовимо заздалегідь, що згідно з [9;10], будемо оцінювати обчислювальну складність знаходження ПМА в шкалі вигляду: «поліноміальні задачі»-«NP-повні задачі»-«NP-важкі задачі». При цьому відзначимо, що поняття NP-важкої задачі згідно з [11] означає оптимізаційну постановку NP-повної задачі розпізнавання.

Як відзначено в [9], обчислювальна складність знаходження ПМА зростає (чи принаймні не спадає) у міру поповнення ВЦФ новими критеріями. Як правило, та чи інша екстремальна задача на графах стає важкорозв'язуваною у той момент, коли її ВЦФ поповнилася хоча б парою критеріїв вигляду MAXSUM чи MINSUM.

Оцінимо спочатку обчислювальну складність знаходження хоча б одного припустимого розв'язку сформованої вище задачі покриття графа типовими графами вигляду H_3 (див. рис. 1). Покажемо, що є справедливою наступна

Лема 1. При n, кратному 4, задача покриття n-вершинного графа типовими графами вигляду H_3 є NP-повною.

Доведення. Спочатку розглянемо так звану задачу 3-С чи задачу про три-сполучення [11], що, як відомо, є NP-повною. Далі як задачу 2 розглянемо задачу покриття графа типовими графами H_3. Ідея доведення леми 1 полягає в тому, що задача 3-С представляється як обмежена версія задачі 2, і NP-повнота задачі 2 випливає з її природного зведення до неї задачі 3-С [11]. Припустимим розв'язком цієї задачі для розглянутого графа G=(V,E) є такий його остовний підграф, кожен компонент зв'язності якого є 3-вершинним циклом. Таким чином, екстремальна задача про три-сполучення з цільовою функцією (ЦФ)

$$F_1(x) = \sum_{e \in E_x} w_1(e) \to \max \qquad (4)$$

є NP-важкою, причому ця задача залишається NP-важкою й у випадку, коли вона розглядається на повних зважених графах.

Розглянемо однокритеріальну задачу покриття графа типовими графами вигляду H_3 на множині n-вершинних 1-зважених графів $G^0 = (V, E^0)$ наступного вигляду. Множина вершин V складається з підмножин V_1 і V_2, потужність яких відповідно дорівнює $|V_1| = m = 3n/4, \quad |V_2| = n/4$. Підграф $G_1{}^0$, індукований у G^0 множиною V_1 є повним m-вершинним графом, множину ребер якого позначимо через E_1. Вершини підмножини V_2 попарно не суміжні між собою, причому кожна вершина $v \in V_2$ суміжна з усіма вершинами підмножини V_1. Через E_2 позначимо сукупність усіх ребер, що з'єднують вершини підмножин V_1 і V_2. Таким чином, одержуємо розбивку множини E^0 на підмножини E_1 і E_2. Усякому ребру $e \in E_2$ приписана вага $w_1(e) = 0$, усякому ребру $e \in E_1$ приписана вага $w_1(e) \geq n$, тобто ваги ребер усякого графа G^0 задовольняють умові:

$$w_1(e) \geq n, \text{ якщо } e \in E_1;\ w_1(e) = 0 \text{ , якщо } e \in E_2. \qquad (5)$$

Із визначення графа G^0 і умови (5) випливає взаємозвідність задачі про три-сполучення на підграфі G_1^0 і задачі покриття графа G^0 типовими графами H_3. Дійсно, нехай отриманий оптимальний (по ЦФ (4)) розв'язок задачі про три-сполучення на G_1^0, тоді, приєднавши до кожного трикутника знайденого оптимального три-сполучення по одному ребру з множини E_2 (дотримуючи принципу попарного неперетинання цих ребер), одержимо оптимальний розв'язок задачі покриття G^0 типовими графами H_3. Вірно і зворотне: нехай знайдений оптимальний розв'язок задачі покриття графа G^0 типовими графами вигляду H_3, причому кожна компонента зв'язності цього розв'язкня є таким графом вигляду H_3, що зображений на рис. 2(1), тобто тільки єдина його висяча вершина належить множині V_2, а усі вершини трикутника належать V_1. У цьому випадку одержуємо оптимальний розв'язок задачі про три-сполучення на G_1^0 у результаті видалення висячих ребер у кожного компонента зв'язності отриманого оптимального покриття.

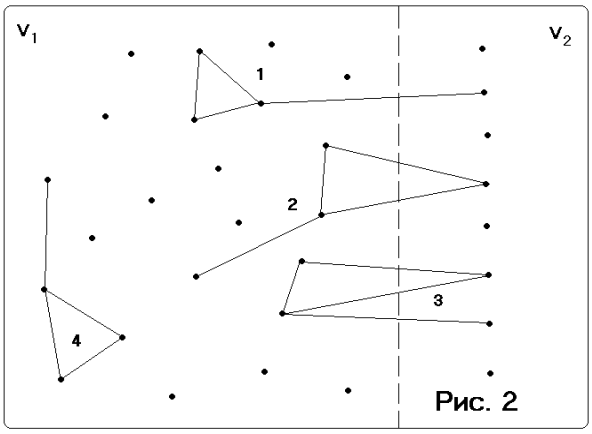


Рис. 2

Таким чином, для завершення доведення леми 1 досить показати, що є справедливої наступна

Лема 2. Кожна компонента зв'язності всякого оптимального покриття графа G^0 типовим графом H_3 буде містити в точності одне ребро вигляду (v', v''), таке, що $v' \in V_1$, $v'' \in V_2$.

доведення леми 2 базується на рис. 2. Дійсно, у кожному припустимому розв'язку $x = (V, E_x)$ кожна компонента зв'язності може мати залежно від кількості в ньому ребер $e = (v', v'')$, $v' \in V_1$, $v'' \in V_2$ вигляд 1, 2, 3 чи 4, як показано на рис. 2.

Покажемо, що в оптимальному покритті не буде компонент вигляду 2, 3, і 4. Дійсно, як показано на рис. 3, у будь-якій компоненті вигляду 2 можна зробити заміну одного з ребер $e = (v', v'')$, $v' \in V_1$, $v'' \in V_2$ на ребро $e_0 = (v', v_0)$, $v', v_0 \in V_1$, $e_0 \in E_1$, звівши тим самим компоненту вигляду 2 до вигляду 1. Таким чином, виключається ребро з нульовою вагою і додається ребро з позитивною вагою при тих же вершинах. Із цього перетворення випливає, що оптимальна множина розв'язків не буде містити компонент вигляду 2.

Для того щоб у припустимому покритті $x \in X$ був присутнє m компонент вигляду 4 необхідне

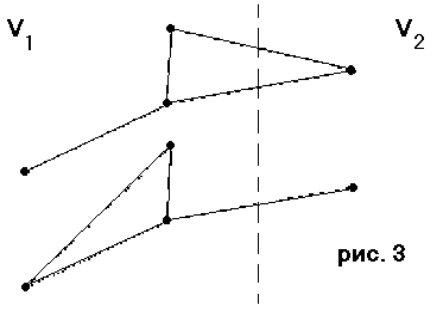


рис. 3

присутність m компонент вигляду 3. Тільки в цьому випадку забезпечується повне покриття вихідного графа. Дійсно, нехай потужність множини вершин, що належать V_2, дорівнює k. Тоді, потужність множини вершин, що належать V_1, дорівнює $3k$. Якщо мається m компонент вигляду 3, то сумарна по всіх цих компонентах кількість вершин $v \in V_2$ дорівнює $2m$, а кількість вершин з V_1 у цих компонентах також дорівнює $2m$. Використовуючи вершини з V_2, що залишилися, можна побудувати $(k-2m)$ компонент вигляду 1, яким буде потрібно $3(k-2m)$ вершин з V_1. Таким чином, у покриття x включаються усі вершини з V_2 і $(3k-2m-3(k-2m))$ вершин з V_1. Розкривши дужки в цьому виразу, одержимо $4m$. Це значить, що незадіяними залишилися 4m вершин з V_1, які можна покрити m компонентами вигляду 4. Ніякий інший вигляд не підходить, оскільки усі вершини належать V_1.

Розглянемо довільну пару компонентів вигляду 3 і 4. Шляхом заміни ребер її можна привести до пари компонентів вигляду 1, виключивши тим самим одне нульове ребро і додавши одне ребро з позитивною вагою (див. рис. 4). Таким чином, усі компоненти вигляду 2-4 приводяться до вигляду 1 з поліпшенням значення ЦФ (4). Отже, оптимальне покриття містить тільки компоненти вигляду 1.
Тим самим лема 1 і лема 2 доведені.

Вважаючи прийняту в [11] термінологію з леми 1 і леми 2 випливає

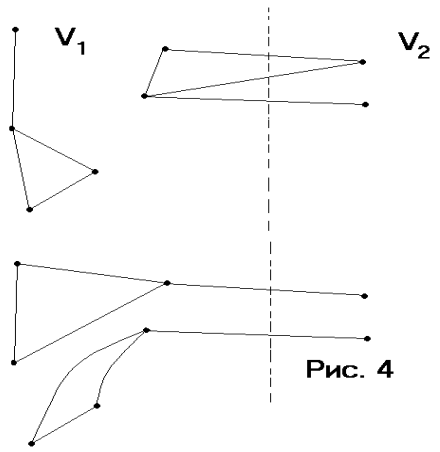


Рис. 4

Теорема 1. Оптимізаційна задача покриття 1-зваженого графа типовими графами вигляду H_3 із ЦФ вигляду (2) чи вигляду (3) є NP-важкою.

2. ОЦІНКИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ СКЛАДНОСТІ ЗНАХОДЖЕННЯ ПМА ДЛЯ ОПТИМІЗАЦІЙНІЙ ЗАДАЧІ ФОРМУВАННЯ ЦГ ВАРІЙОВАНОГО ТИПУ

Розглянута вище задача відноситься до випадку, коли в припустимому розв'язку будь-яка компонента зв'язності ізоморфна одному ТГ. В оглядовій монографії [11] наведений широкий список NP-повних задач на графах. Усяка задача типу «задача покриття» цього списку фактично задовольняє тій же умові структури покриваючого елемента, тобто ТГ. Виведемо узагальнення теореми 1 на випадок, коли при визначенні МПР X=X(G, $\mathcal{H}_s$)={x} множина припустимих ТГ (МПТГ) $\mathcal{H}_s$ складається з 2-х чи більшої кількості елементів. Це узагальнення базується на представленому в [11] твердженні, яке ми переформулюємо в термінах, більш близьких до розглянутого питання. Зазначене твердження відоме під власною назвою «точне покриття 4-елементними множинами» [11, 100].

Лема 3. Нехай задана кінцева множина V потужності $|V|=4q$, а також сім'я $\mathcal{C}=\{W_i\}$ 4-елементних підмножин $W_i \subset V$, $|W_i|=4$. Припустимим покриттям множини V називається всяка підродина $\mathcal{C}^0 \subseteq \mathcal{C}$, що складається з попарно непересічних підмножин W_i, об'єднання яких збігається з V. Задача розпізнавання, чи існує припустиме покриття множини V, є NP-повною.

Покажемо, що для всякого $\mathcal{H}_s \in S_4$ задача відшукання хоча б одного припустимого розв'язку $x \in X(G, \mathcal{H}_s)$ і представлена в лемі 3 задача «точне покриття 4-елементними множинами» поліноміально збіжні одна до одної. Дійсно, для даного графа G=(V,E) розглянемо всі C_n^4 сполучень його вершин. Для кожного такого 4-сполучення розглянемо індукований їм підграф графа G. Якщо цей підграф як свій суграф містить деякий ТГ із даного МПТГ $\mathcal{H}_s$, то розглянуте 4-сполучення представляємо як чергову 4-елементну підмножину $W_i \in \mathcal{C}$. Після перегляду всіх C_n^4 4-елементних сполучень множини V розглянуте в лемі 3 сім'я $\mathcal{C}$ виявиться сформованою. Стає очевидним, що задача відшукання припустимого покриття $\mathcal{C}^0 \subseteq \mathcal{C}$ і задача відшукання припустимого розв'язку $x \in X(G, \mathcal{H}_s)$ є поліноміально збіжні одна до одної. Фактично це означає, що є справедливої наступна

Теорема 2. Для всякого МПТГ $\mathcal{H}_s \in S_4$ оптимізаційна задача покриття 1-зваженого графа типовими графами з цільовою функцією вигляду (2) чи вигляду (3) є NP-важкою.

3. ДОСТАТНЯ УМОВА ВАЖКОРОЗВ'ЯЗУВАНОСТІ

Усяку масову задачу [11] прийнято називати важкорозв'язуваною, якщо трудомісткість найбільш економного алгоритму для її розв'язку не обмежується поліномом від розмірності n.

Випливаючи з [10], векторну задачу з даної ВЦФ F(x) називають повною, якщо для всякого МПР X цієї задачі існують такі параметри її ВЦФ F(x), при яких виконується рівняння

$$X^0 = \tilde{X} = X. \qquad (6)$$

У роботі [10] розглядається клас K^0 таких задач на графах, МПР яких має таку властивість: для всякого n-вершинного графа G=(V,E) припустимий розв'язок $x=(V,E_x)$ є суграфом, що складається з однакового числа ребер $|E_x|$ для усіх $x \in X$. Неважко помітити, що ця властивість виконується стосовно розглянутої задачі для всякого одноелементного МПТГ, а також для пари 2-елементних МПТГ $\{H_1, H_2\}$ і $\{H_3, H_4\}$. Іншими словами, є справедливої наступна

Лема 4. Задача покриття графа 4-елементними ТГ є повною, якщо її ВЦФ містить не менш 2-х критеріїв вигляду MAXSUM (2) і її МПТГ є або одноелементним або має вигляд $\{H_1, H_2\}$ чи $\{H_3, H_4\}$.

У термінах [12] розглянута задача має властивість монотонності по ребрах при будь-якому МПТГ $\mathcal{H}_s \in S_4$. Звідси випливає, що максимальна потужність МПР досягається на повному графі. Розглянемо тепер задачу покриття представленого вище графа G^0 типовими графами H_3. Неважко зазначити, що монотонність МПР $X = X(G^0, H_3)$ перевершує кількість варіантів вибору висячих ребер вигляду $e = (v', v'')$, $v' \in V_1$, $v'' \in V_2$. Це кількість очевидно перевершує число всіх зроблених паросполучень у двочастковому повному 2q-вершинному графі з рівнопотужними частками. Звідси одержуємо нижню оцінку $\left|X(G^0, H_3)\right| \geq q! = (n/4)!$. Таким чином, з урахуванням леми 4 одержуємо, що є справедливою наступна

Теорема 3. Задача покриття графа типовими графами H_3 є важкорозв'язуваною у випадку, якщо її ВЦФ (1)-(3) містить не менш ніж 2 критерії вигляду MAXSUM (2).

ЛІТЕРАТУРА

1. Перепелиця В.О., Рябенко А.Є. Оцінки надійності в задачі формування цільових груп // Вісник Запорізького державного університету. Фізико-математичні науки. - 2000. - №2. - С. 90-93.
2. Емеличев В.А., Мельников О.Н., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. - М.: Наука, 1990. - 384с.
3. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. - М.: Наука, 1982. - 256с.
4. Вилкас Э.Й., Майминас Е.З. Решения: теория, информация, моделирование. - М.: Радио и связь, 1981. - 328с.
5. Дубов Ю.А., Травкин С.И., Якимец В.Н. Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем. - М.: Наука, 1986. - 296с.
6. Емельянов С.В., Ларичев О.И. Многокритериальные методы принятия решений. - М.: Знание, 1985. - 32с.
7. Ларичев О.И. Искусство и наука принятия решения. - М.: Наука, 1979. - 200с.
8. Михалевич В.С., Волкович В.Л. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. - М.: Наука, 1982. - 287с.
9. Емеличев В.А., Перепелица В.А. Сложность дискретных многокритериальных задач / Дискретная математика. - 1994. - Вып.1,6. - С. 3-33.
10. Многокритериальные задачи теории графов. Алгоритмический подход: Учеб. пособие / сост. В.А. Перепелица. - К.: УМК ВО, 1989. - 67с.
11. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. - М.: Мир, 1982. - 416с.