УДК 512.622+519.614+519.615.4

ВИЗНАЧЕННЯ КОРЕНІВ МНОГОЧЛЕНА МЕТОДОМ ОБЕРНЕНИХ ІТЕРАЦІЙ

Маркушина А. Ю., студент, Романович Н. Г., ст. викладач

Запорізький державний університет

Розглянемо *алгебраїчне рівняння* степеня n>2

$$f_n(z) \equiv z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0, \qquad (1)$$

у якому коефіцієнти $a_1, \ldots, a_n$ - комплексні числа. Його корені порівняно рідко вдається знайти точно. Вирішення проблеми коренів многочлена, звичайно, здійснюється шляхом будування за яким-небудь правилом ітераційної послідовності, яка збігається до шуканого кореня многочлена. У літературі, яка пов'язана з цим питанням, описані такі методи:

1) для знаходження дійсних коренів - метод бісекції, метод січних, метод дотичних, метод парабол, метод ітерацій [1-5];

2) для знаходження комплексних коренів - метод Лобачевського [5-6], метод квадратного тричлена [3], метод Ліна [6], метод Берстоу [4].

Пропонований метод обернених ітерацій дає спосіб побудування ітераційного процесу, який збігається до одного з коренів многочлена за значно меншу кількість наближень, ніж вищеназвані. Цей метод використовується також для роз'язання проблеми власних значень матриці [1-4]; використання ж його до розв'язання проблеми коренів многочлена описується вперше.

Розглянемо матрицю n-го порядку, яка відповідає рівнянню (1)

$$P = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Цю матрицю називають *матрицею Фробеніуса*. Побудуємо характеристичний многочлен матриці P:

$$\chi_P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

Через те, що $\chi_P(z) = f_n(z)$, власні значення матриці Фробеніуса, які є коренями рівняння $\chi_P(z) = 0$, будуть збігатися з коренями початкового рівняння. Таким чином, вихідна проблема коренів многочлена $f_n(z)$ збігається з проблемою власних значень матриці Фробеніуса, яка відповідає даному многочлену.

Під *повною проблемою* власних значень матриці розуміється проблема знаходження **всіх** власних значень матриці. Але в багатьох практичних задачах потрібно визначити не всі власні значення, а тільки їх невелику кількість. У цьому випадку розглядають *часткову проблему* власних значень. Для її розв'язання, звичайно, використовують ітераційні процеси, які збігаються до одного власного числа. Основний метод – метод обернених ітерацій із постійним та зі змінним зсувом, сумісне використання яких дає добрі результати. Оскільки цей метод достатньо повно описаний у науковій літературі [1], нагадаємо лише основні формули та етапи.

1) Метод обернених ітерацій з постійним зсувом (визначення власного числа матриці за його грубим наближеним значенням) [1]. Нехай λ_k - деяке власне значення матриці P, $\tilde{\lambda}_k$ - його грубе наближене

значення, $\bar{y}^{0}$ - довільний ненульовий вектор. Будуємо послідовність ітерацій для зсунутої матриці $A = P - \tilde{\lambda}_k E$: $\bar{y}^{0}$, $\bar{y}^{1} = A^{-1}\bar{y}^{0}, \ldots, \bar{y}^{(m)} = A^{-1}\bar{y}^{(m-1)}$, тоді

$$\lambda_k \approx \tilde{\lambda}_k + \frac{y_i^{(m-1)}}{y_i^{(m)}}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Зауваження 1. Для отримання послідовності $\bar{y}^{0}, \bar{y}^{1}, \ldots, \bar{y}^{(m)}, \ldots$ необов'язково знаходити A^{-1}, оскільки із рівності $\bar{y}^{(m)} = A^{-1}\bar{y}^{(m-1)}$ випливає

$$A\bar{y}^{(m)} = \bar{y}^{(m-1)}. \tag{3}$$

Координати вектора $\bar{y}^{(m)}$ знаходять із неоднорідної системи алгебраїчних рівнянь (3).

2) Метод обернених ітерацій зі змінним зсувом [1]. Нехай $\tilde{\lambda}_k$ - наближене значення власного числа λ_k, $\lambda_k^{(0)} = \tilde{\lambda}_k$, $\bar{y}^{0}$ - довільний ненульовий вектор. Використовуємо формули:

$$(P - \lambda_k^{(m)} E)\bar{x}^{(m)} = \bar{y}^{(m)}, \quad m = 0,1,2,..; \tag{4}$$

$$\lambda_k^{(m+1)} \approx \lambda_k^{(m)} + \frac{y_i^{(m)}}{x_i^{(m)}}, \quad i = \overline{1,n}; \tag{5}$$

$$\bar{y}^{(m+1)} = \frac{\bar{x}^{(m)}}{M}, \tag{6}$$

де M - масштабний множник (звичайно максимальна за модулем координата вектора).

Зауваження 2. В алгоритмі методу зі змінним зсувом на кожному кроці ітераційного процесу необхідно розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь (4) із матрицею, яка відрізняється від матриці системи на попередньому кроці.

ПРОЦЕС ЗНАХОЖДЕННЯ ВСІХ КОРЕНІВ МНОГОЧЛЕНА

1. Будуємо матрицю Фробеніуса P, яка відповідає даному многочлену $f_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$.
2. За початкове наближення обираємо $z_0 = 0$, тобто корені будуть відшукуватися в порядку зростання їх модулів (доведення цього факту можна знайти в науковій літературі [1-4]).
3. Обираємо довільний ненульовий n-координатний вектор $\bar{y}^{0}$.
4. Робимо кілька кроків із постійним зсувом (формули (2), (3)), доки не встановляться 1-2 перші цифри шуканого наближеного значення кореня многочлена (після цього використання обчислень зі змінним зсувом різко прискорює збіжність процесу).
5. Використовуємо змінний зсув (формули (4)-(6)) та визначаємо наближене значення кореня ξ_1 з потрібною точністю.
6. Ділимо початковий многочлен $f_n(z)$ на двочлен $z - \xi_1$, відкидаючи малу остачу, яка характеризує похибку ітерацій [3]. Отримуємо многочлен $f_{n-1}(z)$ степеня, на одиницю меншого, ніж степінь $f_n(z)$.
7. Для многочлена $f_{n-1}(z)$ повторюємо пункти 1-6, знаходимо наступний корінь ξ_2 та многочлен $f_{n-2}(z)$.

8. Повторюємо пункти 1-7 до тих пір, доки не прийдемо до многочлена другого степеня, знаходження коренів якого здійснюється за відомими формулами.

Оскільки многократне зневажання остачами від ділення многочленів (при виконанні пункту 6) неминуче дає нагромадження похибок, рекомендується після знаходження всіх наближених значень коренів повторити процедуру методу (пункти 1-6), використовуючи отримані результати як початкові наближення. Це дозволить уточнити значення шуканих величин.

Якщо метод обернених ітерацій зі змінним зсувом не дає гарної збіжності за 2-3 ітерації, то це пояснюється однією з двох причин:

1. Невдалий вибір початкового вектора $\overline{y}^0$. Необхідно повторити побудування ітераційного процесу з іншим вектором;
2. Рівняння має два (або більше) різних, але рівних за модулем кореня (наприклад, комплексно спряжених). У цьому випадку ітераційний процес просто «не знає», до якого з них збігатися. Початкову матрицю Фробеніуса необхідно замінити зсунутою матрицею $P-\mu E$, де μ - довільне комплексне число (невелике за модулем).

ПРИКЛАД

Для наочної демонстрації достоїнств та швидкості збіжності методу розглянемо многочлен, корені якого наперед відомі:

$$f_5(z)=z^5+(7-2i)z^4+(1-12i)z^3+(-69+6i)z^2+(-88+112i)z+48+96i=$$
$$=(z-i)(z+2-i)(z-3)(z+4)^2$$

(корені нумеруються в порядку зростання модулів). Використовуючи описаний метод, отримаємо такі результати:

$z_1=0.00000+1.00000i$ (2 ітерації зі змінним зсувом, початковий вектор $\overline{y}^0=(i,1,-i,1,-i)^t$, точне значення $\xi_1=i$),

$z_2=-1.99998+0.99998i$ (3 ітерації зі змінним зсувом, початковий вектор $\overline{y}^0=(i,1,-i,1)^t$, точне значення $\xi_2=-2+i$),

$z_3=2.99999+0.00000i$ (1 ітерація зі змінним зсувом, початковий вектор $\overline{y}^0=(-2i,1,i)^t$, точне значення $\xi_3=3$),

$z_4=z_5=-4.00001-0.00006i$ (корені квадратного многочлена знайдені за відомими формулами).

Сучасна обчислювальна техніка робить практичне використання методу обернених ітерацій для розв'язання проблеми коренів многочлена достатньо нескладним. Про ступінь ефективності методу можна судити, наприклад, за кількістю ітерацій, через яку досягається необхідна точність результату. Метод обернених ітерацій вимагає у середньому від трьох до восьми наближень, тоді як при використанні такого поширеного методу, як метод Ньютона, потрібно побудувати 10-15 ітерацій. Прикладна обчислювальна сторона цього методу достатньо зручна через те, що її основний зміст – це помноження матриці на вектор та розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. З цим завданням прекрасно впорається будь-яка ЕОМ (зокрема, такі програми як MathCard та MapleV).

Достоїнства методу:

1. Розв'язання рівнянь проводиться без виконання громіздких операцій попереднього відділення коренів;
2. Визначаються корені різних типів – дійсні, комплексні, кратні, з рівними модулями;
3. Корені обчислюються з дуже високою точністю.

ЛІТЕРАТУРА

1. Калиткин Н. Н. Численные методы. - М.: Наука, 1978. – 512 с.
2. Волков Е. А. Численные методы. - М.: Наука, 1982. – 254 с.
3. Березин И. С., Жидков Н. А. Методы вычислений.. - М.: Наука, 1966. – Том 1.-632 с.
4. Хемминг Р. В. Численные методы: Пер. с англ. - М.: Наука, 1968. – 278 с.
5. Демидович В. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. - М.: Наука, 1970. – 664 с.
6. Беланов А. А. Решение алгебраических уравнений методом Лобачевского. - М.: Наука, 1979. – 95 с.