УДК 512.2

ГЕОМЕТРИЧНА МОДЕЛЬ ЗГЛАДЖЕНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ НА СКІНЧЕННОМУ ЕЛЕМЕНТІ СИРЕНДИПОВОЇ СІМ'Ї

Манойленко О. С., аспірант, Хомченко А. Н., д.ф.-м.н., професор

Херсонський державний технічний університет

Розглядається геометричний спосіб удосконалення сирендипова 16 – ти вузлового елемента. Як відомо, такий елемент має 16 вузлів на границі, за допомогою яких визначаються 16 параметрів α_i інтерполяційного полінома.

$$U(\xi,\eta)=\alpha_1+\alpha_2\xi+\alpha_3\eta+\alpha_4\xi^2+\alpha_5\xi\eta+\alpha_6\eta^2+\alpha_7\xi^3+\alpha_8\xi^2\eta+\alpha_9\xi\eta^2+\alpha_{10}\eta^3+\alpha_{11}\xi^4+$$
$$\alpha_{12}\xi^3\eta+\alpha_{13}\xi^2\eta^2+\alpha_{14}\xi\eta^3+\alpha_{15}\eta^4+\alpha_{16}\xi^3\eta^3,$$
$$|\xi|\le 1,\ |\eta|\le 1. \qquad (1)$$

При побудові базису методом скінченних елементів традиційно використовується апарат лінійної алгебри, який приводить до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь 16х16 відносно параметрів, що визначають інтерполяційний поліном. Велика розмірність систем спряжена з певними обчислювальними труднощами і вимагає великих витрат машинного часу. Такий підхід до моделювання сирендипових скінченних елементів та конструювання базисних функцій скінченних елементів грунтується на геометричних уявленнях і дозволяє отримати нові альтернативні моделі сирендипових базисів. За об'єкт дослідження вибраний скінченний елемент сирендипової сім'ї. Сирендиповий елемент – це чотирикутник з вузлами інтерполяції тільки на границі елемента і базис, який відповідає цим вузлам. Сирендипові елементи були відкриті в 60 – ті роки і з того часу інтерес до них невпинно зростає, що супроводжується поширенням їх практичного застосування. Розглянемо скінченний елемент з 16 – ма вузлами.

$|\xi|\le 1,$
$|\eta|\le 1.$

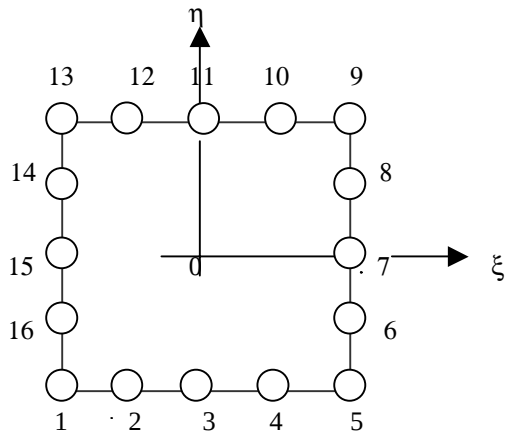

Рис.1 Двовимірний скінченний елемент з 16 – ма вузлами.

При побудові N_1 використана композиція з прямих $\xi-1=0,\eta-1=0,-\xi-\eta-1=0$ та еліпса $4\xi^2+4\eta^2+4\xi\eta+4\xi+4\eta=1,$ що проходить через вузли 2 – 4 – 14 – 16.

Використовуючи композицію перелічених ліній для вузла 1 отримаємо:

$$N_1=\frac{1}{12}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1)(4\xi^2+4\eta^2+4\xi\eta+4\xi+4\eta-1).$$

Взагалі,

$$N_i=\frac{1}{12}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(\xi_i\xi+\eta_i\eta-1)(4\xi^2+4\eta^2+4\xi_i\xi\eta_i\eta-4\xi_i\xi-4\eta_i\eta-1)$$
$$\xi_i,\eta_i=\pm 1,\ i=1,5,9,13.$$

При побудові N_2 використана композиція з прямих $\xi-1=0,\xi+1=0,\eta-1=0,-2\xi-\eta-1=0,-4\xi-\eta+1=0.$

Використовуючи композицію перелічених ліній для вузла 2 отримаємо:

$$N_2=\frac{1}{16}(1-\xi^2)(1-\eta)(-2\xi-\eta-1)(-4\xi-\eta+1).$$

Взагалі,

$$N_i = \frac{1}{16}(1-\xi^2)(1+\eta_i\eta)(4\xi_i\xi+\eta_i\eta-1)(8\xi_i\xi+\eta_i\eta+1)$$
$$\xi_i = \pm\frac{1}{2};\ \eta_i = \pm 1,\ i = 2,4,10,12. \qquad (2)$$

Щоб отримати базисні функції для вузлів 6,8,14,16 треба у формулі (2) зробити циклічну перестановку ξ та η .

При побудові базисної функції для вузла 3 використана композиція з прямих $\xi-1=0, \xi+1=0, \eta-1=0,$

$$\xi+\frac{1}{2}=0\,, \xi-\frac{1}{2}=0.$$

Базисна функція для вузла 3 має вигляд[.1]:

$$N_3 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)(1-4\xi^2).$$

Взагалі,

$$N_i = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta_i\eta)(1-4\xi^2)$$
$$\eta_i = \pm 1\,, i = 3,11. \qquad (3)$$

Щоб отримати базисні функції для вузлів 7,15 треба у формулі (3) зробити циклічну перестановку ξ та η.

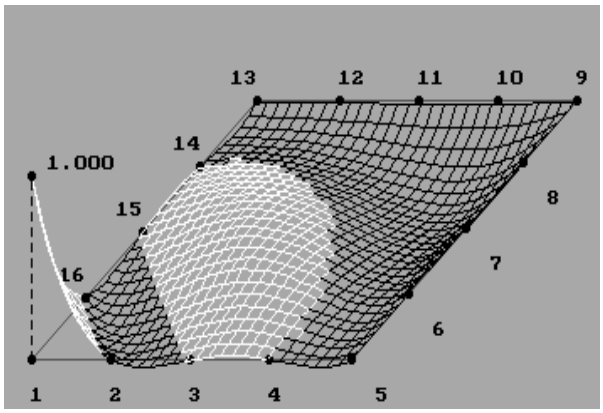

Рис.2 Графік функції N_1 16 – ти вузлового елемента

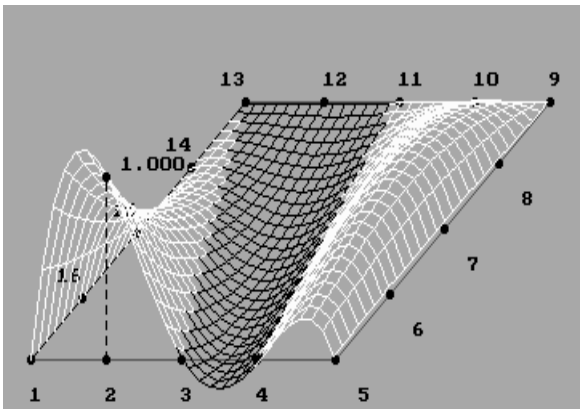

Рис.3 Графік функції N_2 16 – ти вузлового елемента

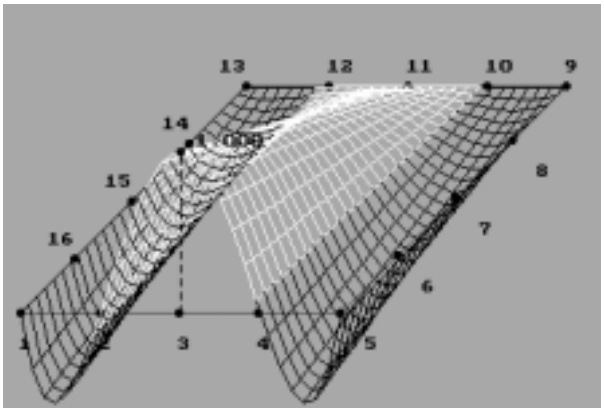

Рис.4 Графік функції N_3 16 – ти вузлового елемента

Порівняння полінома (1) з повним поліномом четвертого порядку відносно аргументів ξ та η :

$$\overline{U}(\xi,\eta)=\beta_1+\beta_2\xi+\beta_3\eta+\beta_4\xi^2+\beta_5\xi\eta+\beta_6\eta^2+\beta_7\xi^3+\beta_8\xi^2\eta+\beta_9\xi\eta^2+\beta_{10}\eta^3+\beta_{11}\xi^4+$$
$$+\beta_{12}\xi^3\eta+\beta_{13}\xi^2\eta^2+\beta_{14}\xi\eta^3+\beta_{15}\eta^4, \qquad (4)$$

виявляє "зайві" члени в (1). У деяких задачах "зайві" члени в інтерполяційному поліномі викликають виникнення паразитних ефектів (нефізичних аномалій). Виключення члена $\alpha_{16}\xi^3\eta^3$ означає "згладити зморшки" на поверхні $U(\xi,\eta)$, звільнитися від нефізичних аномалій або ослабити їх вплив на розв'язок. Такі згладжені базисні функції називають субститут – базисами. Один з прийомів отримання субститут – базису оснований на методі найменших квадратів в інтегральні формі. Інтегральне апроксимування дозволяє усунути зайві члени в поліноми та отримати новий субститут – базис для елемента. Згладжена апроксимація для 16 – ти вузлового елемента має таку властивість: у будь – якому довільному напрямку поле змінюється за біквадратним законом. Помітимо, що для стандартного 16 – ти вузлового елемента біквадратна зміна поля відповідає тільки двом взаємно перпендикулярним напрямкам, паралельним координатним осям (рис. 2,3,4). За міру відхилення (1) від згладженої функції на квадраті $-1\le\xi,\eta\le1$ приймається величина

$$\chi=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(U-\overline{U}\right)^2 d\xi d\eta.$$

Таким чином, задача згладжування зводиться до розв'язання системи

$$\frac{\partial\chi}{\partial\beta_i}=0, \quad для \quad i=\overline{1,16},$$

невідомі коефіцієнти β_i виражаються через відомі коефіцієнти α_i. При цьому виключається один зайвий доданок у (1).

Субститут – базиси для 16 – ти вузлового елемента мають вигляд:

$$\overline{N}_i=\frac{35}{756}-\frac{103}{420}(\xi_i\xi+\eta_i\eta)-\frac{1}{252}(131\xi^2+105\xi_i\xi\eta_i\eta+131\eta^2)+\frac{1}{840}(315\xi_i\xi^3+121\xi^2\eta_i\eta+$$
$$+121\xi_i\xi\eta^2+315\eta_i\eta^3)+\frac{1}{3}(\xi^4+\xi_i\xi^3\eta_i\eta+\xi^2\eta^2+\xi_i\xi\eta_i\eta^3+\eta^4),\ i=1,5,9,13;\ \xi_i,\eta_i=\pm1,$$
$$\overline{N}_i=-\frac{28}{189}-\frac{2}{105}(14\xi_i\xi-\eta_i\eta)+\frac{1}{126}(241\xi^2+168\xi_i\xi\eta_i\eta+21\eta^2)+\frac{1}{315}(81\xi^2\eta_i\eta+252\xi_i\xi\eta^2+$$
$$+35\eta^2)-\frac{1}{6}(8\xi^4+8\xi_i\xi^3\eta_i\eta+\xi^2\eta^2),\ i=2,4,10,12;\ \xi_i=\pm\frac{1}{2},\eta_i=\pm1,$$
$$\overline{N}_i=\frac{1}{2}+\frac{23}{70}\eta_i\eta-\frac{131}{42}\xi^2-\frac{11}{14}\xi^2\eta_i\eta+2\xi^4,\ i=3,11;\ \eta_i=\pm1.$$

Отримані функції задовольняють основним умовам:

- згладжена базисна функція дорівнює 1 в однойменному вузлі і обертається в 0 в інших вузлах,

- сума базисних функцій на елементі дорівнює 1.

Кожна субституційна функція є лінійною комбінацією площини і поверхні другого порядку (рис.5,6,7).

Субститут – базиси для N_1, N_2 та N_3 мають вигляд:

$$\overline{N}_1=\frac{35}{756}+\frac{103}{420}(\xi+\eta)-\frac{1}{252}(131\xi^2+105\xi\eta+131\eta^2)-\frac{1}{840}(315\xi^3+121\xi^2\eta+121\xi^2+315\eta^3)+$$
$$+\frac{1}{3}(\xi^4+\xi^3\eta+\xi^2\eta^2+\xi\eta^3+\eta^4),$$

$$\overline{N}_2=-\frac{28}{189}+\frac{2}{105}(7\xi-\eta)+\frac{1}{126}(241\xi^2+84\xi\eta+21\eta^2)-\frac{1}{315}(81\xi^2\eta+126\xi\eta^2+35\eta^2)-$$
$$-\frac{1}{6}(8\xi^4+4\xi^3\eta+\xi^2\eta^2),$$

$$\overline{N}_3 = \frac{1}{2} - \frac{23}{70}\eta - \frac{131}{42}\xi^2 + \frac{11}{14}\xi^2\eta + 2\xi^4.$$

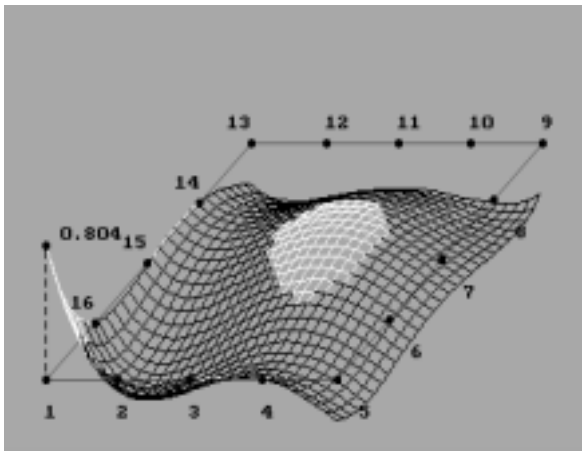

Рис.5 Графік функції N_1 субститут – базису 16 – ти вузлового елемента

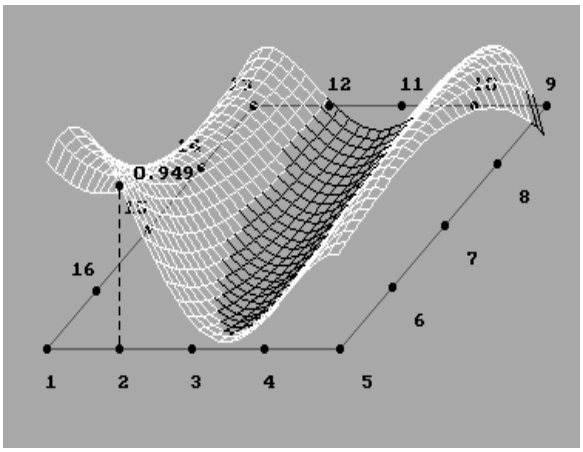

Рис.6 Графік функції N_2 субститут – базису 16 – ти вузлового елемента

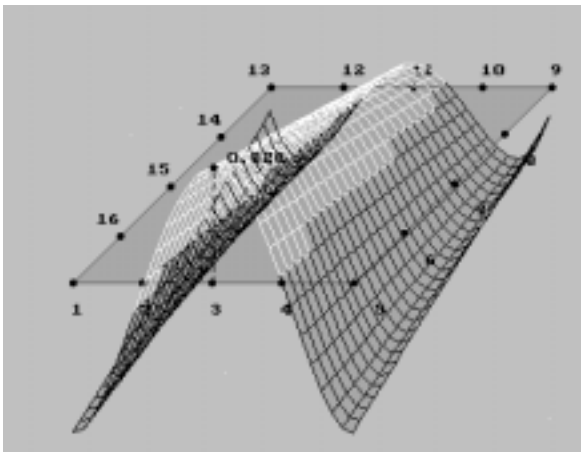

Рис.7 Графік функції N_3 субститут – базису 16 – ти вузлового елемента

Для кількісного вимірювання інтенсивності складкоутворення зручно користуватися спеціальною характеристикою.

ЛІТЕРАТУРА

1. Манойленко О.С., Литвиненко О.І. Розвиток геометричного моделювання базисів дискретних елементів // Прикладна геометрія та інженерна графіка.-К.: КНУБА,2000.- Вип. 67- С.166-170.
2. Хомченко А.Н., Хомченко Б.А. Геометрическая модель сглаженной аппроксимации на серендиповом КЭ //Сб. тр. Межд. н.-п. конференции “Современные проблемы геометрического моделирования”.- Донецк: ДонГТУ, 2000.- С. 86-87.
3. Хомченко А. Н., Литвиненко Е. И., Гучек П. И. Геометрия сирендиповых аппроксимаций // Прикл. геом. и инж. графика. – К.: Будівельник, 1996. – Вып. 59. – С. 40 –42.
4. Гучек П. И., Литвиненко Е. И., Хомченко Б. А. Сглаженные аппроксимации на сирендиповых элементах // Прикл. матем. и матем. моделирование. Сб. научн. тр. VII межд. симпозиума МДОЗМФ. – Феодосия: ХГТУ, 1997. – С. 62 – 64.