УДК 536.24.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СВЕРХВЫСОКОЧАСТОТНОГО НАГРЕВА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА И ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ЕГО ФАЗОВОМ ПРЕВРАЩЕНИИ

Яковенко В.А., соискатель

Днепропетровский национальный университет

Обычно передача тепла осуществляется за счет конвекции и теплопроводности. Отсюда неизбежен температурный градиент (перепад) от поверхности в глубину материала, причем тем больший, чем меньше теплопроводность. Уменьшить или почти устранить большой градиент температур можно за счет увеличения времени обработки. Во многих случаях только за счет медленного нагрева удается избежать перегрева поверхностных слоев обрабатываемого материала. Примерами таких процессов является обжиг керамики, получение полимерных соединений. С помощью энергии излучения сверхвысоких частот можно не только равномерно нагревать диэлектрик по его объему, но и получать по желанию любое заданное распределение температур. Поэтому при сверхвысокочастотном нагреве открываются возможности многократного ускорения ряда технологических процессов[1].

Применение классических методов решения задач теплообмена, протекающего под действием энергии сверхвысокочастотного излучения, ограничивается сложностью геометрии постоянной границы области, в которой определяется решение, разнообразием краевых условий, нелинейностями. Поэтому распространение получили приближенные методы: конечно-разностные, вариационные, МКЭ. Вместе с тем, наряду с созданием математических моделей процессов теплообмена, актуальным является развитие алгоритмов и методов решения задач теплопроводности, термоупругости, конвективного теплообмена при сверхвысокочастотном нагреве для переменных областей.

В тепломассообменных и термонапряженных процессах, возникающих и протекающих в диэлектрике под действием энергии сверхвысоких частот, особое значение имеют тепловые процессы, которые регламентируют основные параметры и одновременно определяют технико-экономические характеристики материала. Создание научных основ в исследовании таких процессов сдерживалось отсутствием знаний о теплообмене, сопровождавшемся фазовыми превращениями в условиях действия энергии сверхвысокочастотных электромагнитных полей. Поэтому создание теплофизических основ этих процессов, математических моделей, которые бы адекватно описывали их важные свойства и эффективных методов их реализации является актуальной проблемой как с научной, так и с практической точек зрения.

В связи с актуальностью такой задачи и опираясь на ранее проделанную в этом направлении работу [2, 3], получим компоненты сверхвысокочастотных электромагнитных колебаний в тороидальной резонаторной камере, где и происходит процесс термообработки материала. Для этого необходимо решить уравнения Максвелла в тороидальной системе координат (ρ,θ,φ):

$$\frac{1}{R\rho\eta}\left[\frac{\partial(\eta \mathrm{E}_\varphi)}{\partial\theta} - im\rho \mathrm{E}_\theta\right] = -i\omega \mathrm{H}_\rho \tag{1}$$

$$\frac{1}{R\eta}\left[im\mathrm{E}_\rho - \frac{\partial(\eta \mathrm{E}_\varphi)}{\partial\rho}\right] = -i\omega \mathrm{H}_\theta \tag{2}$$

$$\frac{1}{R\rho}\left[\frac{\partial(\rho \mathrm{E}_\theta)}{\partial\rho} - \frac{\partial \mathrm{E}_\rho}{\partial\theta}\right] = -i\omega \mathrm{H}_\varphi \tag{3}$$

$$\frac{1}{R\rho\eta}\left[\frac{\partial(\eta \mathrm{H}_\varphi)}{\partial\theta} - im\rho \mathrm{H}_\theta\right] = i\omega\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu \mathrm{E}_\rho \tag{4}$$

$$\frac{1}{R\eta}\left[im\mathrm{H}_\rho - \frac{\partial(\eta \mathrm{H}_\varphi)}{\partial\rho}\right] = i\omega\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu \mathrm{E}_\theta \tag{5}$$

$$\frac{1}{R\rho}\left[\frac{\partial(\rho \mathrm{H}_\theta)}{\partial\rho}-\frac{\partial \mathrm{H}_\rho}{\partial\theta}\right]=i\omega\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu \mathrm{E}_\varphi \qquad (6),$$

где ε_0,μ_0 - электрическая и магнитная постоянные соответственно , ε,μ - соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости материала, $\rho=\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{R}}$; $\eta=1-\rho\cos\theta$; $\mathrm{m}=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$, θ -азимутальный угол, φ -тороидальный угол, R-тороидальный радиус, r-радиус поперечного сечения камеры.

Полагая, что контур камеры в любом поперечном сечении представляет собой идеальную окружность с постоянным диаметром, а магнитная и диэлектрическая проницаемости материала в равной степени как и проводимость, постоянны во всем обьеме тракта, и считая, что распространение электромагнитной энергии происходит во времени по закону $\exp(\mathrm{im}\varphi)$ вдоль оси линии φ ,то можно из уравнений Максвелла (1) - (6) получить соотношения для определения поперечных компонент поля через продольные составляющие, которые определяются решениями волновых уравнений:

$$\frac{\eta}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\rho\eta}{m^2-\kappa^2\eta^2}\frac{\partial U}{\partial\rho}\right)+\frac{\eta}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\eta}{m^2-\kappa^2\eta^2}\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)+\frac{m\eta}{\omega\rho R}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{m^2-\kappa^2\eta^2}\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)-$$

$$-\frac{m\eta}{\omega\rho R}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{m^2-\kappa^2\eta^2}\frac{\partial W}{\partial\rho}\right)-U=0;$$

$$\frac{\eta}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\rho\eta}{\mathrm{m}^2-\kappa^2\eta^2}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial\rho}\right)+\frac{\eta}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\eta}{\mathrm{m}^2-\kappa^2\eta^2}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial\theta}\right)-\frac{\mathrm{m}\eta}{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\omega\rho\mathrm{R}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\mathrm{m}^2-\kappa^2\eta^2}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial\theta}\right)+$$

$$+\frac{m\eta}{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\omega\rho R}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{m^2-\kappa^2\eta^2}\frac{\partial U}{\partial\rho}\right)-W=0 \qquad (7),$$

где $U=\eta \mathrm{H}_\varphi,\ W=\eta \mathrm{E}_\varphi,\ \kappa^2=\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\omega^2R^2,\ \omega=2\pi f$.

В силу того, что источник излучения не задан и, следовательно, возможен произвольный выбор начала отсчета угла θ , решения уравнений (7) запишутся в виде [4] :

$$U=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(\theta)\rho^n \ \text{ и } \ W=\sum_{n=0}^{\infty}G_n(\theta)\rho^n \qquad (8),$$

где $\mathrm{g_n}(\theta),\mathrm{G_n}(\theta)$ -неизвестные функции.

Для их определения следует подставить выражения (8) в систему волновых уравнений (7). Это позволяет преобразовать систему уравнений в частных производных в систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $\mathrm{g_n}(\theta),\mathrm{G_n}(\theta)$. . Приняв во внимание то, что функциональные ряды (8) являются равномерно сходящимися в области изменения переменных ρ,θ и если ограничиться, например, тремя членами ряда (n = 0,1,2), то получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left(m^2-k^2\right)g_0''(\theta)=0,$$

$$\left(m^2-k^2\right)G_0''(\theta)=0,$$

$$\left(m^2-k^2\right)\left[g_1''(\theta)+g_1(\theta)\right]=2\left(m^2-2k^2\right)g_0''(\theta)\cos\theta-\left(m^2+k^2\right)g_0'(\theta)\sin\theta+\ +\beta\mathrm{G}_0'(\theta)\cos\theta,$$

$$\left(m^2-k^2\right)\left[G_1''(\theta)+G_1(\theta)\right]=2\left(m^2-2k^2\right)G_0''(\theta)\cos\theta-\left(m^2+k^2\right)G_0'(\theta)\sin\theta-\alpha g_0'(\theta)\cos\theta,$$

$$\left(m^2-k^2\right)\left[g_2''(\theta)+4g_2(\theta)\right]=2\left(m^2-2k^2\right)g_1''(\theta)\cos\theta-\left(m^2+k^2\right)g_1'(\theta)\sin\theta+$$

$$+3\left(\mathrm{m}^2-\mathrm{k}^2\right)\mathrm{g}_1(\theta)\cos\theta-\left(\mathrm{m}^2-6\mathrm{k}^2\right)\mathrm{g}_0''(\theta)\cos^2\theta+$$

$$+\left(m^2+3k^2\right)g_0'(\theta)\sin\theta\cos\theta+\left(m^2-k^2\right)^2g_0(\theta)+\beta G_1'(\theta)\cos\theta-2\beta\mathrm{G}_0'(\theta)\cos^2\theta+\beta\mathrm{G}_1(\theta)\sin\theta,$$

$$\left(m^2-k^2\right)\left[G_2''(\theta)+4G_2(\theta)\right]=2\left(m^2-2k^2\right)G_1''(\theta)\cos\theta-\left(m^2+k^2\right)G_1'(\theta)\sin\theta+$$

$$+3\left(\mathrm{m}^2-\mathrm{k}^2\right)\mathrm{G}_1(\theta)\cos\theta-\left(\mathrm{m}^2-6\mathrm{k}^2\right)\mathrm{G}_0''(\theta)\cos^2\theta+$$

$$+\left(m^2+3k^2\right)G_0'(\theta)\sin\theta\cos\theta+\left(m^2-k^2\right)^2G_0(\theta)-\alpha g_1'(\theta)\cos\theta+2\alpha g_0'(\theta)\cos^2\theta-\alpha g_1(\theta)\sin\theta \qquad (9)$$

Тогда решения системы (9) имеют вид:

$$\mathrm{g}_0=\mathrm{b}_0$$

$$G_0=B_0$$

$$\mathrm{g}_1=\mathrm{a}_1\sin\theta+\mathrm{b}_1\cos\theta$$

$$G_1=A_1\sin\theta+B_1\cos\theta$$

$$g_2=a_2\sin 2\theta+b_2\cos 2\theta+\frac{1}{4}\left(m^2-k^2\right)b_0+\frac{1}{4}\frac{m^2+k^2}{m^2-k^2}b_1+\frac{\chi A_1}{4\left(m^2-k^2\right)}$$

$$\mathrm{G}_2=\mathrm{A}_2\sin 2\theta+\mathrm{B}_2\cos 2\theta+\frac{1}{4}\left(\mathrm{m}^2-\mathrm{k}^2\right)\mathrm{B}_0+\frac{1}{4}\frac{\mathrm{m}^2+\mathrm{k}^2}{\mathrm{m}^2-\mathrm{k}^2}\mathrm{B}_1-\frac{\chi\mathrm{a}_1}{4\left(\mathrm{m}^2-\mathrm{k}^2\right)},$$

где $\chi=\dfrac{2mk^2}{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu R\omega}$, $\gamma=\dfrac{2mk^2}{R\omega}$.

Подстановкой полученных решений в ряды (8) определяются решения волновых уравнений (7).

Таким образом, φ-ые составляющие компонент электромагнитного поля в тороидальной резонаторной камере, можно записать в виде:

$$\mathrm{H}_\varphi=b_0\left(\frac{1}{1-\rho\cos\theta}+\frac{\rho^2\left(m^2-k^2\right)}{4\left(1-\rho\cos\theta\right)}\right)+b_1\left(\frac{\rho\cos\theta}{1-\rho\cos\theta}+\frac{\rho^2\left(m^2+k^2\right)}{4\left(1-\rho\cos\theta\right)\left(m^2-k^2\right)}\right)+b_2\frac{\rho^2\cos 2\theta}{1-\rho\cos\theta}+$$

$$+a_1\frac{\rho\sin\theta}{1-\rho\cos\theta}+a_2\frac{\rho^2\sin 2\theta}{1-\rho\cos\theta}+A_1\frac{\beta\rho^2}{4\left(1-\rho\cos\theta\right)\left(m^2-k^2\right)}; \qquad (10)$$

$$\mathrm{E}_\varphi=B_0\left(\frac{1}{1-\rho\cos\theta}+\frac{\rho^2\left(m^2-k^2\right)}{4\left(1-\rho\cos\theta\right)}\right)+B_1\left(\frac{\rho\cos\theta}{1-\rho\cos\theta}+\frac{\rho^2\left(m^2+k^2\right)}{4\left(1-\rho\cos\theta\right)\left(m^2-k^2\right)}\right)+B_2\frac{\rho^2\cos 2\theta}{1-\rho\cos\theta}-$$

$$-\mathrm{a}_1\frac{\chi\rho^2}{4\left(1-\rho\cos\theta\right)\left(\mathrm{m}^2-\mathrm{k}^2\right)}+\mathrm{A}_1\frac{\rho\sin\theta}{1-\rho\cos\theta}+\mathrm{A}_2\frac{\rho^2\sin 2\theta}{1-\rho\cos\theta}. \qquad (11)$$

Из уравнений (1), (2), (4) и (5) выражаются $\rho-$ые и $\theta-$ые компоненты в виде:

$$\mathrm{E}_\rho=\frac{i}{m^2-\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\omega^2R^2\eta^2}\left[\frac{\omega\eta R}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\theta}-m\frac{\partial W}{\partial\rho}\right];$$

$$\mathrm{E}_\theta=\frac{i}{m^2-\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\omega^2R^2\eta^2}\left[-\omega\eta\frac{\partial U}{\partial\rho}R-\frac{m}{\rho}\frac{\partial W}{\partial\theta}\right];$$

$$\mathrm{H}_\rho=\frac{i}{m^2-\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\omega^2R^2\eta^2}\left[-m\frac{\partial U}{\partial\rho}-\frac{\omega\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\eta R}{\rho}\frac{\partial W}{\partial\theta}\right];$$

$$\mathrm{H}_\theta=\frac{i}{m^2-\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\omega^2R^2\eta^2}\left[-\frac{m}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\theta}+\omega\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\eta R\frac{\partial W}{\partial\rho}\right].$$

Тогда:

$$\mathrm{E}_\rho=\frac{i}{m^2-\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\omega^2\eta^2R^2}\left[-b_1\omega\eta R\sin\theta-b_2\,2\rho\omega\eta R\sin 2\theta+a_1\left(\omega\eta R\cos\theta+\frac{\chi\rho m}{2\left(m^2-k^2\right)}\right)+\right.$$

$$a_2 2\rho\omega\eta R\cos 2\theta - B_1\left(m\cos\theta + \frac{m\rho}{2}\frac{m^2+k^2}{m^2-k^2}\right) - B_2 2\rho m\cos 2\theta -$$

$$- B_0\frac{m\rho}{2}\left(m^2-k^2\right) - A_1 m\sin\theta - A_2 2\rho m\sin 2\theta\Big]; \qquad (12)$$

$$E_\theta = \frac{i}{m^2-\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\omega^2\eta^2R^2}\left[-b_0\frac{\rho\omega\eta R}{2}\left(m^2-k^2\right) - b_1\left(\omega\eta R\cos\theta + \frac{\rho\omega\eta R}{2}\frac{m^2+k^2}{m^2-k^2}\right) -\right.$$

$$b_2 2\rho\omega\eta R\cos 2\theta - a_1\omega\eta R\sin\theta - a_2 2\rho\omega\eta R\sin 2\theta + B_1 m\sin\theta + B_2 2m\rho\sin 2\theta -$$

$$\left. - A_2 2m\rho\cos 2\theta - A_1\left(\frac{\gamma\rho\omega\eta R}{2\left(m^2-k^2\right)} + m\cos\theta\right)\right]; \qquad (13)$$

$$H_\rho = \frac{i}{m^2-\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\omega^2\eta^2R^2}\left[-b_0\frac{m\rho}{2}\left(m^2-k^2\right) - b_1\left(m\cos\theta + \frac{m\rho}{2}\frac{m^2+k^2}{m^2-k^2}\right) -\right.$$

$$- b_2 2m\rho\cos 2\theta - a_1 m\sin\theta - a_2 2m\rho\sin 2\theta +$$

$$+ B_1\omega\eta R\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\sin\theta + B_2 2\rho\omega\eta R\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\sin 2\theta - A_2 2\rho\omega\eta R\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\cos 2\theta -$$

$$\left. - A_1\left(\frac{m\rho\gamma}{2\left(m^2-k^2\right)} + \omega\eta R\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\cos\theta\right)\right]; \qquad (14)$$

$$H_\theta = \frac{i}{m^2-\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\omega^2\eta^2R^2}\left[b_1 m\sin\theta + b_2 2m\rho\sin 2\theta - a_1\left(m\cos\theta + \frac{\omega\eta R\rho\chi\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu}{2\left(m^2-k^2\right)}\right) -\right.$$

$$- a_2 2m\rho\cos 2\theta + B_0\frac{\omega\eta R\rho\varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0}{2}\left(m^2-k^2\right) + B_2 2\rho\omega\eta R\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\cos 2\theta +$$

$$+ A_1\omega\eta R\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\sin\theta + A_2 2\rho\omega\eta R\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\sin 2\theta +$$

$$\left. + B_1\left(\omega\eta R\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\cos\theta + \omega\eta R\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\frac{\rho}{2}\frac{m^2+k^2}{m^2-k^2}\right)\right]. \qquad (15),$$

где a_n, b_n, A_n, B_n - амплитудные коэффициенты.

Теперь рассмотрим теплообмен, возбуждаемый передачей энергии выше определенными компонентами сверхвысокочастотных полей в материал, характеризующийся коэффициентом теплопередачи. Тогда краевая задача о нагреве тела конечных размеров с учетом конечной скорости распространения тепла, позволяющая определить распределение температур в жидкой и твердой фазах в зависимости от частоты электромагнитных полей, а так же закон движения фазового превращения в материале, математически может быть сформулирована следующим образом [5] в твердой фазе:

$$\tau_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{\partial u_1}{\partial t} = \alpha_1^2\frac{\partial^2 u_1}{R\partial\varphi^2}; \qquad (16)$$

$$u_1(0, R\varphi) = u_C;\ \left.\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{t=0} = 0; \qquad (17)$$

$$u_1(t,0) = u_C;\ \ u_1(t,\xi) = u_\Phi. \qquad (18)$$

в расплаве:

$$\tau_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \frac{\partial u_2}{\partial t} = \alpha_2^2\frac{\partial^2 u_2}{R\partial\varphi^2}; \qquad (19)$$

$$u_2(R\varphi,0)=u_0;\ \left.\frac{\partial u_2}{\partial t}\right|_{t=0}=0; \tag{20}$$

$$u_2(t,\xi)=u_\Phi;\ u_2(t,R\varphi)=u_0. \tag{21}$$

Условие Стефана на изотермической границе раздела фаз имеет вид [7]:

$$q_1[t,\xi(t)]-q_2[t,\xi(t)]=L_\rho\frac{d\xi}{dt}. \tag{22}$$

Связь между температурным и электромагнитным полем при нестационарном процессе взаимодействия электромагнитной волны с материалом можно определить соотношением [1]:

$$\frac{\partial u_{1,2}}{\partial t}=\Omega\, f\, E^2 \tag{23}$$

Вектор теплового потока можно представить в явном виде [7]:

$$q=-\frac{\lambda}{\tau}\int_0^t\nabla u\exp\left[-\frac{(t-\eta)}{\tau}\right]d\eta. \tag{24}$$

Тогда уравнение (22) с учетом зависимости (24) можно представить в виде:

$$\lambda_2\left.\frac{\partial u_2}{R\partial\varphi}\right|_{\varphi=\xi(t)}-\lambda_1\left.\frac{\partial u_1}{R\partial\varphi}\right|_{\varphi=\xi(t)}=L_\rho(\tau\frac{d^2\xi}{dt^2}+\frac{d\xi}{dt}), \tag{25},$$

где $\tau=\tau_1=\tau_2;\xi(0)=\xi_0;(d\xi/dt)_{t=0}=0.$

Следуя методике построения решения [6], введем новые функции:

$$\vartheta_1(R\varphi,t)=u_1(R\varphi,t)-u_c-(u_\Phi-u_c)\frac{R\varphi}{\xi(t)}; \tag{26}$$

$$\vartheta_2(R\varphi,t)=u_2(R\varphi,t)-u_\Phi-(u_0-u_\Phi)\frac{R\varphi-\xi(t)}{1-\xi(t)}; \tag{27}$$

для которых граничные условия преобразуются к однородным

Относительно функций распределения температур в твердой фазе, образовавшемся расплаве и подвижной границе соответственно: $\vartheta_1(R\varphi,t),\vartheta_2(R\varphi,t),\xi(t)$, рассматриваемая задача свелась к следующей системе уравнений:

$$u_1(R\varphi,t)=u_c+(u_\Phi-u_c)\frac{R\varphi}{\xi(t)}+\frac{2}{\xi(t)}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(t)\sin\frac{n\pi}{\xi}R\varphi;$$

$$u_2(R\varphi,t)=u_\Phi+(u_0-u_\Phi)\frac{R\varphi-\xi(t)}{1-\xi(t)}+\frac{2}{1-\xi(t)}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(t)\sin\frac{nR\varphi[R\varphi-\xi(t)]}{1-\xi(t)},$$

где

$$\vartheta_1(R\varphi,t)=\frac{2}{\xi(t)}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(t)\sin\frac{n\pi}{\xi}R\varphi;$$

$$\vartheta_2(R\varphi,t)=\frac{2}{1-\xi(t)}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(t)\sin\frac{nR\varphi[R\varphi-\xi(t)]}{1-\xi(t)}.$$

Тогда соотношения на границе раздела фаз с учетом зависимостей для $u_1(R\varphi,t)$ и $u_2(R\varphi,t)$, а также уравнения (23) с выражениями для компонент электромагнитного поля (11) – (13), принимают вид:

$$\tau\frac{d^2\xi}{dt^2}+\frac{d\xi}{dt}+\frac{1}{L_\rho}\left[\frac{\lambda_2(u_\Phi-u_O)}{1-\xi}+\frac{\lambda_2(u_\Phi-u_C)}{\xi}\right]+\frac{2\lambda_1\pi}{\xi^2}\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^n\alpha_n-\frac{2\lambda_2\pi}{(1-\xi)^2}\sum_{n=1}^{\infty}n\beta_n=0;$$

$$\xi(0)=\xi_0,\ \dot\xi(0)=0. \tag{28}$$

$$\frac{\partial u_{1,2\varphi}}{\partial t} = \Omega\, f\, B_0^2\left(\frac{1}{1-\rho\cos\theta}+\frac{\rho^2\left(m^2-k^2\right)}{4\left(1-\rho\cos\theta\right)}\right)^2 + \Omega\, fB_1^2\left(\frac{\rho\cos\theta}{1-\rho\cos\theta}+\frac{\rho^2\left(m^2+k^2\right)}{4\left(1-\rho\cos\theta\right)\left(m^2-k^2\right)}\right)^2 +$$

$$+\Omega\, fB_2^2\frac{\rho^4\cos^2 2\theta}{1-\rho^2\cos^2\theta} - \Omega\, fa_1^2\frac{\alpha^2\rho^4}{16\left(1-\rho\cos\theta\right)^2\left(m^2-k^2\right)^2} +$$

$$+\Omega\, fA_1^2\frac{\rho^2\sin^2\theta}{1-\rho^2\cos^2\theta} + \Omega\, fA_2^2\frac{\rho^4\sin^2 2\theta}{1-\rho^2\cos^2\theta} \qquad (29)$$

$$\frac{\partial u_{1,2\rho}}{\partial t} = \Omega\, f\frac{i^2}{m^4-\varepsilon_0^2\mu_0^2\varepsilon^2\mu^2\omega^4\eta^4R^4}\left[-b_1\omega\eta R\sin\theta - b_2 2\rho\omega\eta R\sin 2\theta + a_1\left(\omega\eta R\cos\theta+\frac{\alpha\rho m}{2\left(m^2-k^2\right)}\right)+\right.$$

$$+a_2 2\rho\omega\eta R\cos 2\theta - B_1\left(m\cos\theta+\frac{m\rho}{2}\frac{m^2+k^2}{m^2-k^2}\right) - B_2 2\rho m\cos 2\theta -$$

$$\left.-B_0\frac{m\rho}{2}\left(m^2-k^2\right) - A_1 m\sin\theta - A_2 2\rho m\sin 2\theta\right]^2 \qquad (30)$$

$$\frac{\partial u_{1,2\theta}}{\partial t} = \Omega\, f\frac{i^2}{m^4-\varepsilon_0^2\mu_0^2\varepsilon^2\mu^2\omega^4\eta^4R^4}\left[-b_0\frac{\rho\omega\eta R}{2}\left(m^2-k^2\right) - b_1\left(\omega\eta R\cos\theta+\frac{\rho\omega\eta R}{2}\frac{m^2+k^2}{m^2-k^2}\right)-\right.$$

$$-b_2 2\rho\omega\eta R\cos 2\theta - a_1\omega\eta R\sin\theta - a_2 2\rho\omega\eta R\sin 2\theta + B_1 m\sin\theta + B_2 2m\rho\sin 2\theta -$$

$$\left.-A_2 2m\rho\cos 2\theta - A_1\left(\frac{\beta\rho\omega\eta R}{2\left(m^2-k^2\right)}+m\cos\theta\right)\right]^2 \qquad (31)$$

Определим соответствующие динамические тепловые напряжения, предполагая отсутствие поверхностных сил и сил инерции [8] в виде:

$$\sigma_\rho = \sigma_\theta = \sigma_\varphi = -\frac{2\nu\alpha_T}{(1-\upsilon)(1-\xi)}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\sin\frac{nR\varphi\left(R\varphi-\xi\right)}{1-\xi} \qquad (32)$$

где α_T -средний коэффициент линейного теплового расширения; ν-изотермический модуль упругости; υ - коэффициент Пуассона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пюшнер Г. Нагрев энергией сверхвысоких частот. Пер. с англ.– М.: Энергия,1968.–175 с.
2. Яковенко В.А. Математическая модель резонатора в кондуктивной сушке многослойных диэлектриков переменной толщины // Вісник Запорізького державного університету - 2000.-№2.- С.175-183.
3. Яковенко В.А. Математическая модель резонатора с многослойным диэлектрическим заполнением переменной толщины //Системні технології, системне моделювання технологічних процесів.: Збірн. наук. праць.- 2 (10) 2000.- С. 115 – 122.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников.-.М.: Наука, 1970.
5. Яковенко В.А. Математическая модель кондуктивной сушки материала с применением электромагнитного излучения сверхвысокой частоты //Техническая механика.- 2000.-№2.-С. 70-76.
6. Яковенко В.А. Математическая модель тепломассопереноса в пористых материалах под действием СВЧ энергии //Вісник Дніпропетровського університету: Механіка, випуск 3.-Т.1.- 2000.- С. 118-125.
7. Лыков А.В. Теплообмен (справочник). –М: Энергия, 1971. – 560 с.
8. Коваленко А.Д. Термоупругость.-К.: Вища школа, 1975.- 216 с.