УДК 517.95 + 517.518

R-ФУНКЦИИ В ЗАДАЧАХ БЛЕНДИНГА И ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ДИЗАЙНА

Уваров Р.А., аспирант, Шейко Т.И., д.т.н., профессор

Институт проблем машиностроения им. А.Н.Подгорного НАН Украины (г. Харьков)

В настоящее время в литературе широко освещены вопросы, связанные с блендингом, геометрическим дизайном и их приложениями к построению сложных плоских и пространственных локусов с заданными свойствами геометрического и эстетического характера. Следует особо отметить работы [1]–[4] и др., где наряду с разрабатываемыми авторами подходами уделено внимание и применению для этих целей R-функций. Вопрос о построении гладких сопряжений, скруглении углов и ребер с заданными радиусами плоских и пространственных локусов, построении нормализованных уравнений с гладким сопряжением градиентов стоял в RFM давно [5], решался с помощью конструктивных средств этой теории и в отличие от вышеупомянутых работ был в основном сориентирован на исследование полей различной физической природы (тепловых, деформационных, электромагнитных и др.). Например, если некоторый гладкий участок локуса $\partial\Omega = (\omega = 0)$ сформировался в результате сопряжения локусов-примитивов $\partial\Sigma_i = (\sigma_i = 0),\ i = 1,2$ разной кривизны, то применение обычных R-операций с постоянным α не гарантирует сопряжение градиентов соответствующих им функций, в результате чего важное для построения структур решения [5] свойство нормализованности может быть нарушено в точках сопряжения.

Рассмотрим случай, когда требуется написать нормализованное во всех регулярных точках границы уравнение локуса, изображенного на рис.1.

В качестве локусов-примитивов выбираем:

$$\Sigma_1 = \left[\frac{1-x^2}{2} \ge 0\right],\ \Sigma_2 = \left[\frac{1-y^2}{2} \ge 0\right],\ \Sigma_3 = \left[\frac{1-x^2-(y-1)^2}{2} \ge 0\right].$$

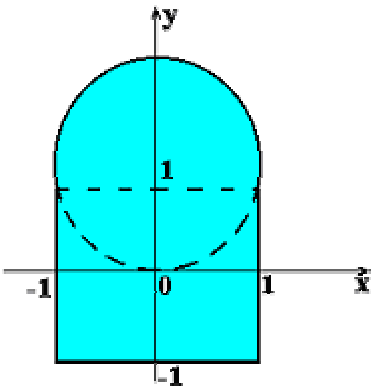
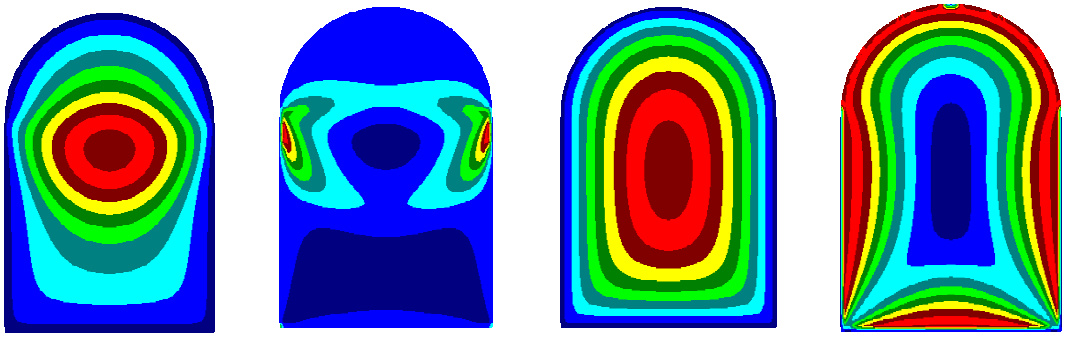


Рис.1. Общий вид исходной области.

Все приведенные неравенства нормализованы. Логическую формулу для области Ω строим в виде: $\Omega = (\Sigma_1 \cap \Sigma_2) \cup \Sigma_3$. Если при построении уравнения границы области заменить символы $\cap$, $\cup$ на $\wedge_\alpha$, $\vee_\alpha$ $|\alpha| > 1,\ \alpha = \text{const}$, то получим функцию ω, для которой условие нормализованности в точках $(-1,\ 1), (1,\ 1)$ может быть нарушено, хотя в этих точках граница построенной области является гладкой. Это явление достаточно ярко отражено в картинах линий уровня функции ω (рис.2а) и

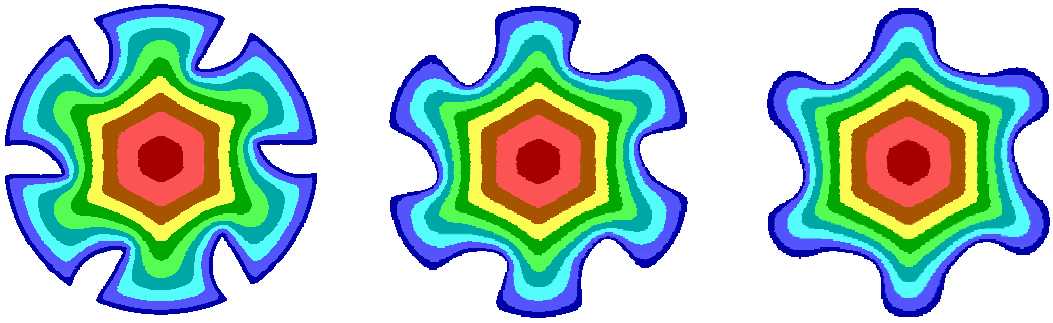
$\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2$ (Рис.2б). Если же α выбрать в виде функции $\alpha=\frac{1}{1+\sigma_i^2+\sigma_j^2}$, то получим результат, представленный на рис.2в), г), который иллюстрирует поведение функции ω после устранения дефекта, связанного с нарушением ее нормализованности в вышеуказанных точках. (Отметим, что для достижения этого же эффекта можно было бы выбрать $\alpha\equiv 1$, но в этом случае может нарушиться дифференцируемость результирующей функции ω во внутренних точках области.)



а) б) в) г)

Рис.2 Результат применения R_0 (а, б) и R_α (в, г).

Простейший блендинг можно реализовать, построив нормализованное уравнение границы области $\Omega=(\omega=0)$ и рассматривая различные кривые (или поверхности) вида $\omega-\varepsilon_i=0$. Пример таких блендингов представлен на рис.3.



а) б) в)

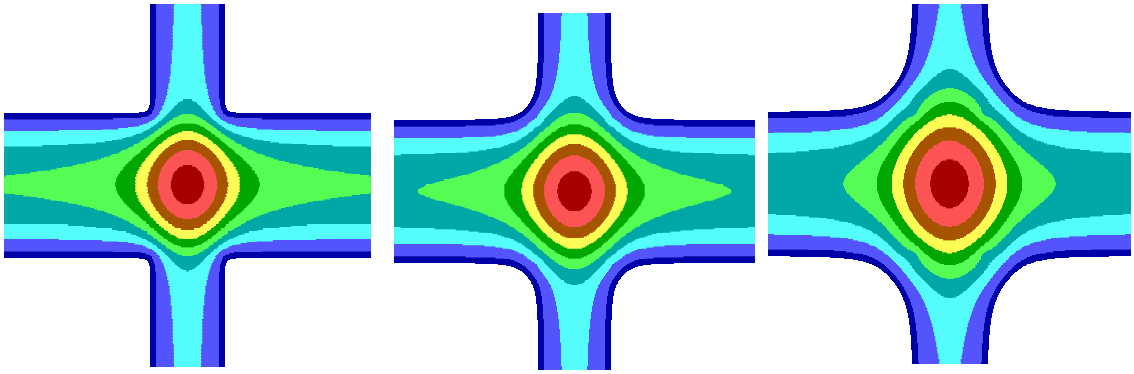
Рис. 3. Примеры исходной а) и блендинговых б) – $\varepsilon=0.5$, в) – $\varepsilon=0.8$ областей.

В работах [2],[3] скругление острых углов осуществляется по формуле

$$\omega=f_1+f_2\pm\sqrt{{f_1}^2+{f_2}^2}+\frac{b_0}{1+\frac{{f_1}^2}{b_1^2}+\frac{{f_2}^2}{b_2^2}}, \qquad (1)$$

где b_0 – радиус скругляющего эллипса; b_1, b_2 – коэффициенты скругления.

Если, например, $f_1=\frac{1-x^2}{2}$; $f_2=\frac{4-y^2}{4}$, то результат скругления углов по формуле (1) представлен на рис.4 для различных значений параметров b_i.



а) б) в)

Рис.4 Картины линий уровня скругленных объединений для различных значений параметров b_i:

а) $b_i = 0.1$; б) $b_i = 0.5$; в) $b_i = 1$

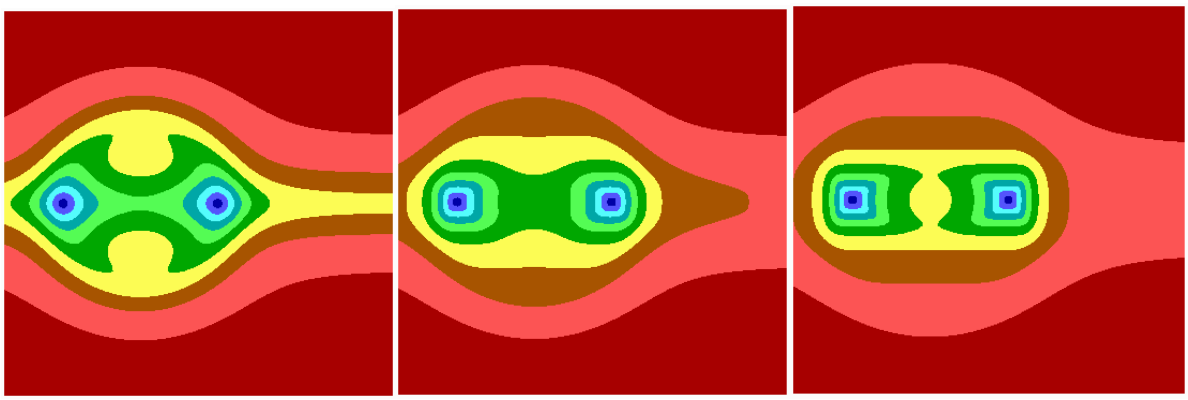
Метод неявного блендинга впервые был предложен Риччи [6], в работе которого тела были определены неравенствами вида $f(x) > 1$, а бленд при пересечении двух тел f_1 и f_2 неравенством

$$\omega = \sqrt[n]{f_1(x)^n + f_2(x)^n} \geq 1. \qquad (2)$$

Вообще, бленды между объединениями и пересечениями определены подобным образом и могут быть расширены до сумм произвольного числа функций f_i. Такие бленды являются гладкими для конечных значений $n > 1$.

Для наглядности рассмотрим $f_i = \dfrac{\hat{f}_i}{\sqrt{1+\hat{f}_i^2}}$, подставив в (2) $\hat{f}_1 = \dfrac{4-(x+1.5)^2-y^2}{4}$, $\hat{f}_2 = y$.

Результат представлен на рис.5. Если же $f_i = \dfrac{\hat{f}_i + |\hat{f}_i|}{2}$, то результат проиллюстрирован на рис.6.

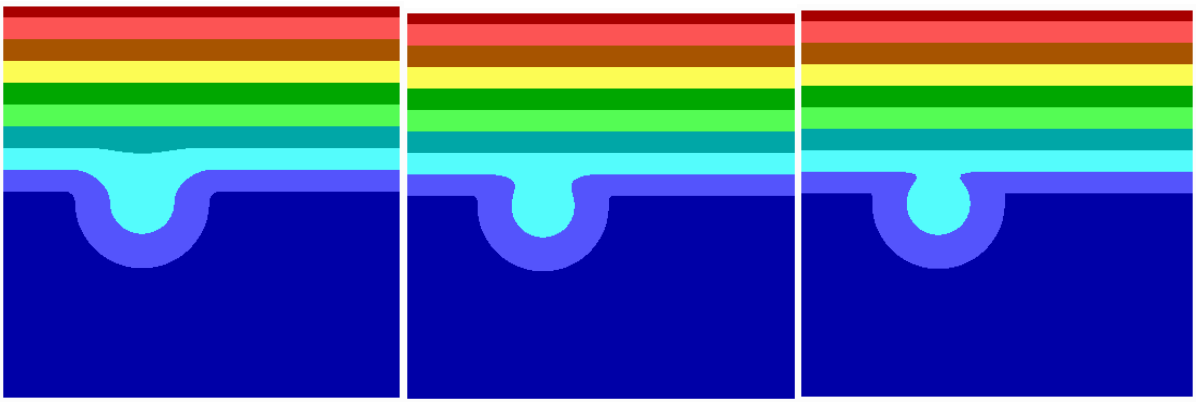


а) б) в)

Рис.5 Картины линий уровня блендинга окружности и прямой по формуле Риччи:

а) $n = 2$; б) $n = 4$; в) $n = 8$.

Когда продумывается форма блендинга, полезно начинать с рассмотрения бленда в простейшем случае, то есть между двумя прямыми линиями в R^2. Затем бленд расширяется до тел примитивов P_1 и P_2 в R^n составлением бленда B из $P_1 : R^n \to R$ и $P_2 : R^n \to R$, то есть поверхность блендинга является правильно ограниченной частью нулевой поверхности $B_{12} = B(P_1, P_2) : R^n \to R$. Такое составление двух функций полезно для отделения эффектов композиции функций от внутренних характеристик бленда.



а) б) в)

Рис.6 Картины линий уровня блендинга окружности и прямой по формуле Риччи.

а) $n = 2$; б) $n = 4$; в) $n = 8$.

В работе [1] предложен *супер-эллиптический бленд*, названный так, поскольку график для $t = 2$ – эллиптический, как показано на рис.7.

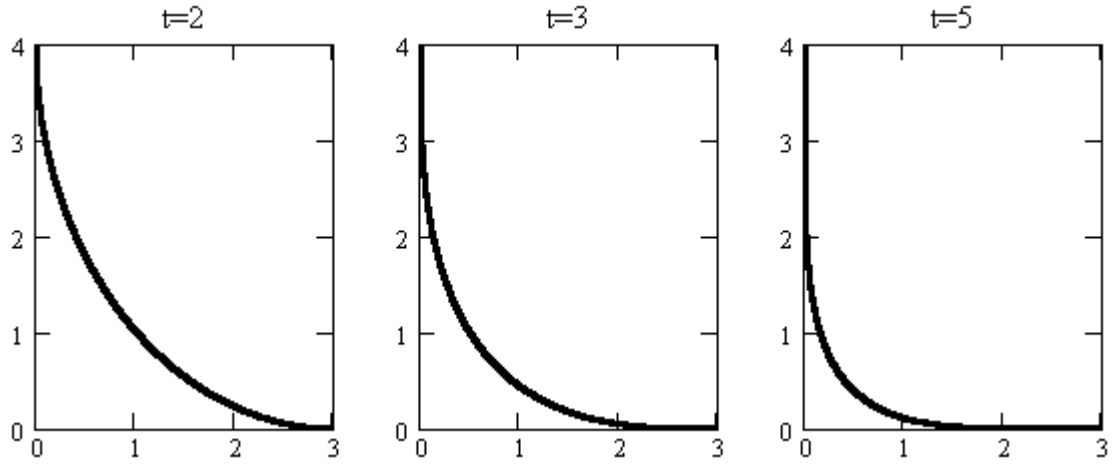


Рис.7 Супер-эллиптический бленд для $r_1 = 3$, $r_2 = 4$ и трех значений t

Бленд между осями в R^2 определяется как ядро (т.е. нулевое множество $B = 0$)

$$B(x, y) = 1 - [1 - x / r_1]_+^t - [1 - y / r_2]_+^t , \qquad (3)$$

где $[*]_+ = \max(0,*)$, ограничивая B положительным квадрантом.

На рис.7 r_1 – это расстояние по оси x до точки, где супер-эллиптическая дуга касается оси, а r_2 – соответствующее расстояние по оси y. Два этих параметра называются *интервалами*. Величина t может менять форму бленда, причём, увеличиваясь, прижимать бленд ближе к примитивам.

Супер-эллиптический бленд (3), применительно к функциям примитивов P_1 и P_2, имеет вид:

$$B(x, y) = 1 - [1 - P_1 / r_1]_+^t - [1 - P_2 / r_2]_+^t \qquad (4)$$

Рассмотрим окружность радиуса 5 с центром в начале координат, описанную уравнением (5) и полосу шириной 4, параллельную оси y, описанную уравнением (6); применяя супер-эллиптический бленд (4) с $r_1 = r_2 = 1$ и $t = 3$, получим бленд, заданный уравнением (7). Результирующий бленд показан на рис.8.

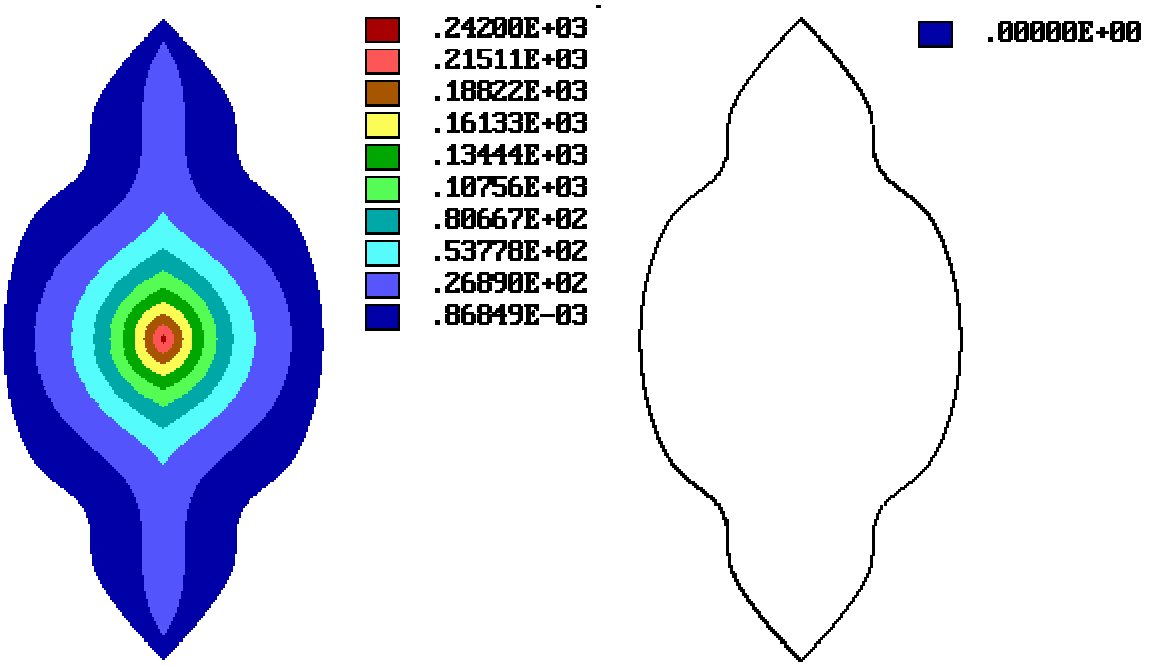


Рис. 8 Супер-эллиптический бленд окружности и полосы

$$P_1(x,y) = (x^2 + y^2)^{1/2} - 5\,, \tag{5}$$

$$P_2(x,y) = (x^2)^{1/2} - 2\,, \tag{6}$$

$$B_{12}(x,y) = 1 - [3 - (x^2)^{1/2}]_+^3 - [6 - (x^2 + y^2)^{1/2}]_+^3\,. \tag{7}$$

В работе [5] для скругления углов предложена операция R_ρ:

$$f_1 \wedge_\rho f_2 = f_1 + f_2 \pm \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + \frac{1}{8\rho^2}\left(\rho^2 - f_1^2 - f_2^2\right)\left(\left|\rho^2 - f_1^2 - f_2^2\right| + \rho^2 - f_1^2 - f_2^2\right)} \tag{8}$$

Проведем исследование формулы (8) для использования при скруглении двух пересекающихся прямых в зависимости от угла между ними. Пусть $f_1 = x \ge 0$ и $f_2 = y \ge 0$, т.е. угол раствора – прямой. Тогда имеем:

$$x \wedge_\rho y = x + y - \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{1}{8\rho^2}\left(\rho^2 - x^2 - y^2\right)\left(\left|\rho^2 - x^2 - y^2\right| + \rho^2 - x^2 - y^2\right)} \tag{9}$$

После преобразований в окрестности бленда (9), где $x^2 + y^2 < \rho^2$, получим нормализованную функцию, которой соответствует дуга сопрягающей рассматриваемые прямые окружности радиуса ρ с центром в точке (ρ,ρ). Действительно,

$$x + y - \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{1}{4\rho^2}\left(\rho^2 - x^2 - y^2\right)^2} =$$

$$= x + y - \frac{1}{2\rho}\left[\sqrt{4\rho^2x^2 + 4\rho^2y^2 + \rho^4 + x^4 + y^4 - 2\rho^2x^2 - 2\rho^2y^2 + 2x^2y^2}\right] =$$

$$= x + y - \frac{1}{2\rho}\sqrt{\left(\rho^2 + x^2 + y^2\right)^2} = x + y - \frac{1}{2\rho}\left(\rho^2 + x^2 + y^2\right) =$$

$$\frac{1}{2\rho}\left[2\rho x + 2\rho y - \rho^2 - x^2 - y^2\right] = \frac{1}{2\rho}\left[\rho^2 - (x-\rho)^2 - (y-\rho)^2\right].$$

Покажем, что при угле между рассматриваемыми прямыми $\neq 90^\circ$, скругление по $\wedge_\rho$ даёт дугу эллипса, симметричную относительно биссектрисы угла раствора, а не дугу окружности, как можно было бы предположить. Если $f_1^2 + f_2^2 \le \rho^2$, и $f_1 = \frac{y-kx}{\sqrt{1+k^2}}$, $f_1 = \frac{y-kx}{\sqrt{1+k^2}}$, то получим

$$f_1 \wedge_\rho f_2 = f_1 + f_2 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + \frac{1}{4\rho^2}\left(\rho^2 - f_1^2 - f_2^2\right)^2} = \frac{1}{2\rho}\left[\rho^2 - (f_1-\rho)^2 - (f_2-\rho)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2\rho}\left[\rho^2 - f_1^2 - \rho^2 + 2f_1\rho - f_2^2 - \rho^2 + 2f_2\rho\right] = \frac{1}{2\rho}\left[-f_1^2 - f_2^2 - \rho^2 + 2f_1\rho + 2f_2\rho\right] =$$

$$= \frac{2y}{\sqrt{1+k^2}} - \frac{\rho^2}{2\rho} - \frac{2y^2 + 2k^2x^2}{\left(1+k^2\right)2\rho} = \frac{1}{2\rho\left(k^2+1\right)}\left(4\rho y\sqrt{1+k^2} - \rho^2\left(1+k^2\right) - 2y^2 - 2k^2x^2\right) =$$

$$= \frac{1}{\rho\left(k^2+1\right)}\left(-(y-R)^2 - k^2x^2 + \frac{R^2}{2}\right) = \frac{2}{\rho\left(k^2+1\right)R^2k^2}\left(-\frac{(y-R)^2}{\frac{R^2k^2}{2}} - \frac{x^2}{\frac{R^2}{2}} + 1\right),$$

где $R = \rho\sqrt{1+k^2}$.

Результаты применения формулы (8) при $\rho = 0{,}5$ в области $(-2, 0, 2, 2)$ представлены на рис.9, где а) $f_1 = \frac{x-y}{\sqrt{2}} \ge 0$; $f_2 = y \ge 0$; б) $f_1 = x \ge 0$; $f_2 = y \ge 0$; в) $f_1 = \frac{x+y}{\sqrt{2}} \ge 0$; $f_2 = y \ge 0$.

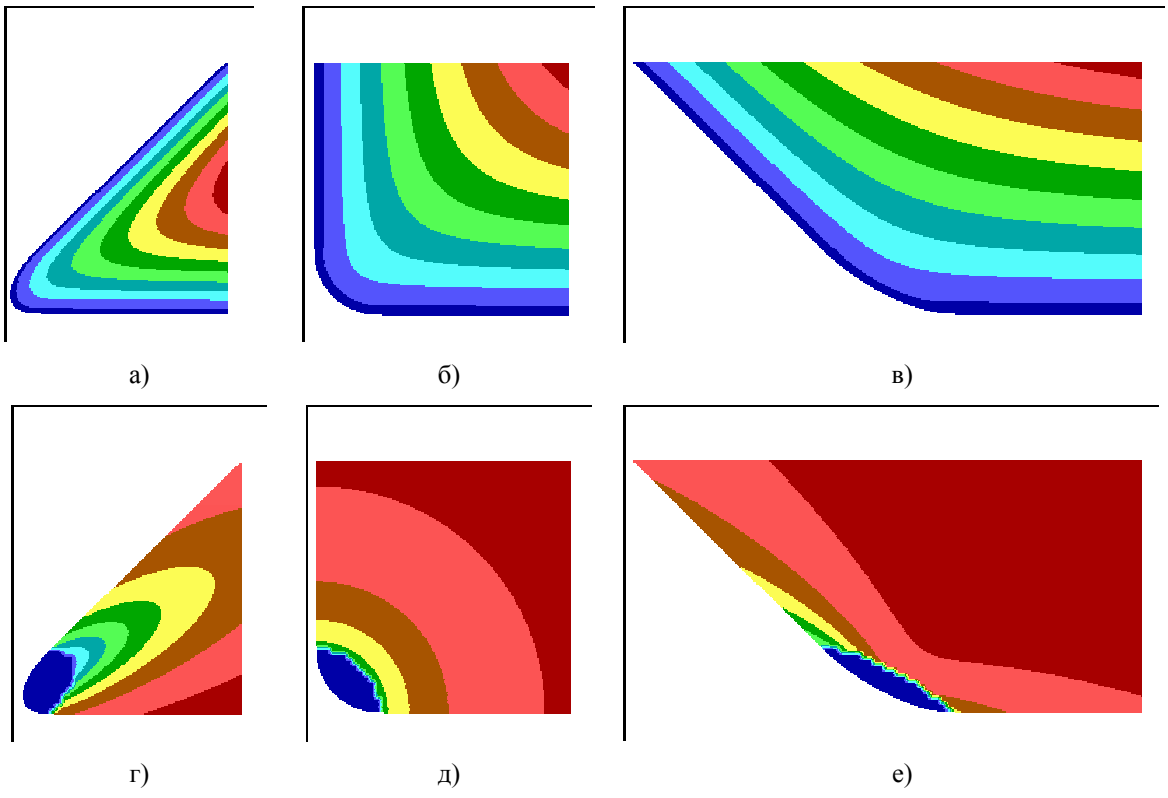
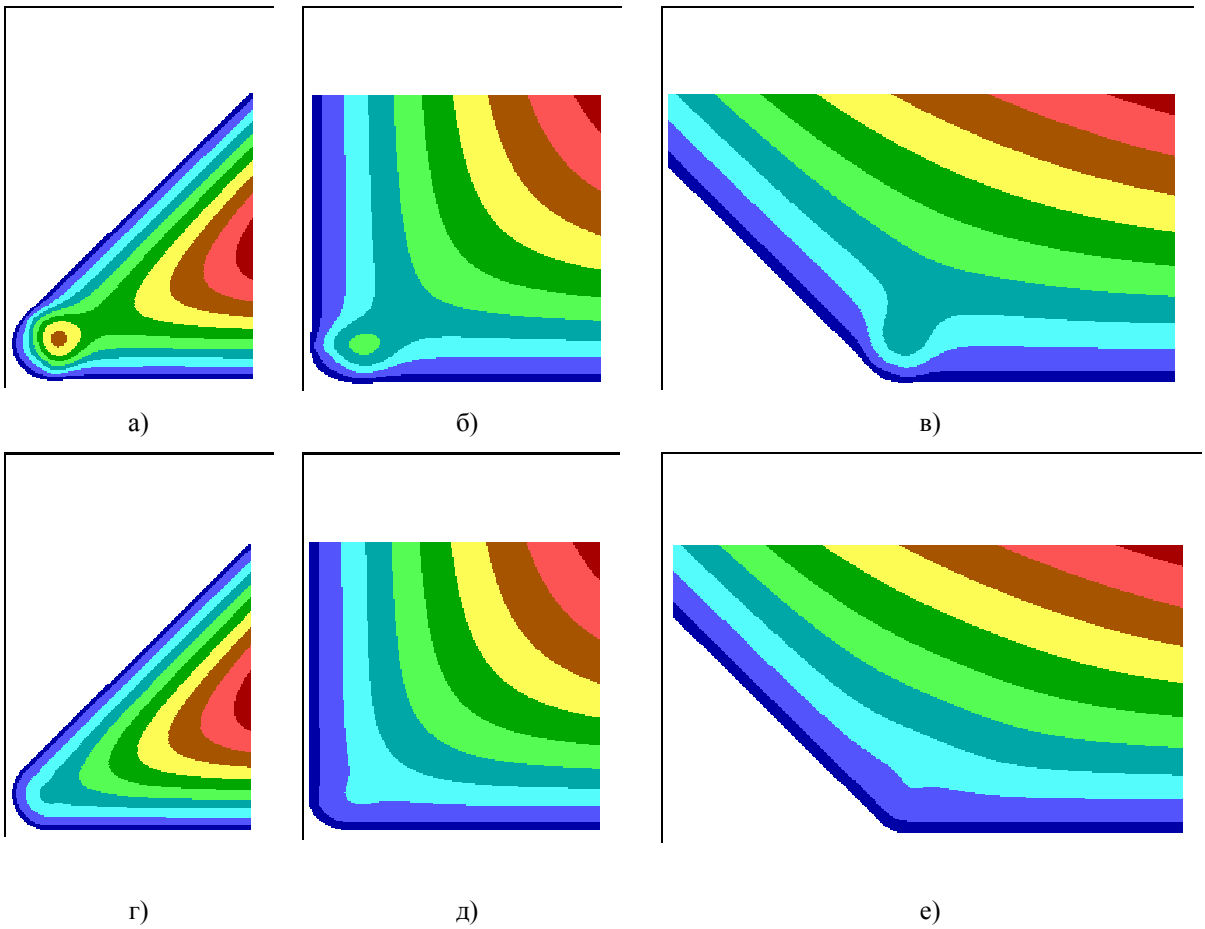


Рис.9 Картины линий уровня функций (а, б, в – $\omega = f_1 \wedge_\rho f_2$; г, д, е – $\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}$).



а) б) в)

г) д) е)

Рис.10 – Картины линий уровня функции $\omega = u \wedge_r v$.

а), б), в) – при $\alpha = 0$; г), д), е) – при $\alpha = \dfrac{1}{1+\sigma_i^2+\sigma_j^2}$.

Рассмотрим новый подход к блендингу двух прямых линий, имеющий значение в тех случаях, когда из технологических соображений скругление надо выполнить точно по дуге окружности заданного радиуса. Пусть прямые линии заданы неравенствами $u \geq 0$ и $v \geq 0$. Функция блендинга этих прямых будет иметь вид

$$\omega \equiv u \wedge_r v = \left[\left[u \wedge_\alpha v\right] \wedge_\alpha \overline{\omega}_\rho\right] \vee_\alpha \omega_r, \qquad (10)$$

где ω_ρ – функция границы окружности, пересекающей прямые в точках, которые будет соединять бленд,

$$\omega_\rho = \frac{\rho^2 - \left(\dfrac{v-u}{\alpha_1}\right)^2 - \left(\dfrac{v+u}{\alpha_2}\right)^2}{\alpha_3},$$

где $\alpha_1 = \sqrt{(\nabla(v-u))^2}$, $\alpha_2 = \sqrt{(\nabla(v+u))^2}$, $\alpha_3 = \sqrt{3\rho^2 + \left(\dfrac{v-u}{\alpha_1}\right)^2 - \left(\dfrac{v+u}{\alpha_2}\right)^2}$.

ω_r – функция границы окружности, являющейся блендом,

$$\omega_r = \frac{r^2 - \left(\frac{v-u}{\alpha_1}\right)^2 - \left(\frac{v+u}{\alpha_2} - \sqrt{r^2+q^2r^2}\right)^2}{\alpha_4},$$

где $$\alpha_4 = \sqrt{3r^2 + \left(\frac{v-u}{\alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{v+u}{\alpha_2} - \sqrt{r^2+q^2r^2}\right)^2}.$$

Здесь $\rho = r \cdot q$. Действительно, поскольку $\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2} = \frac{r}{\rho}$, то $\rho = r \cdot \operatorname{ctg}\frac{\Theta}{2} = r\sqrt{\frac{1-\cos\Theta}{1+\cos\Theta}}$. Подставляя $-\cos\Theta = \nabla u \cdot \nabla v$, запишем $\rho = r\sqrt{\frac{1-\nabla u \cdot \nabla v}{1+\nabla u \cdot \nabla v}} = r \cdot q$, где $q = \sqrt{\frac{1-\nabla u \cdot \nabla v}{1+\nabla u \cdot \nabla v}}$.

Результаты применения формулы (10) при $r = 0{,}5$ в области $(-3, -1, 4, 4)$ представлены на рис. 10:

а) $v = \frac{x-y}{\sqrt{2}} \geq 0$; $u = y \geq 0$; б) $v = x \geq 0$; $u = y \geq 0$; в) $v = \frac{x+y}{\sqrt{2}} \geq 0$; $u = y \geq 0$.

Если блендинг должен быть осуществлен для криволинейных локусов, то при малом радиусе скругления приведенные выше результаты для прямых могут быть использованы как блендинг касательных к этим криволинейным локусам.

Отметим еще один подход к построению блендинговых кривых для заданного каркаса, используемых в задачах геометрического дизайна, с помощью конструктивных средств теории R-функций. Используя нормальные уравнения [7] отрезков AB, CD и дуг окружности DK, KD для заданного каркаса (Рис.11) по формуле равнозначности [1] с весовыми коэффициентами m_i

$$\omega_{blend} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{\omega_i}} = \frac{1}{\frac{m_{AB}}{\omega_{AB}} + \frac{m_{CD}}{\omega_{CD}} + \frac{m_{DK}}{\omega_{DK}} + \frac{m_{KD}}{\omega_{KD}}} \qquad (11)$$

можно построить различные блендинговые кривые. Рассмотрим следующие значения координат точек каркаса: $A(-2,7)$; $B(2,7)$; $C(0,7)$; $D(0,1)$; $K(0,-1)$.

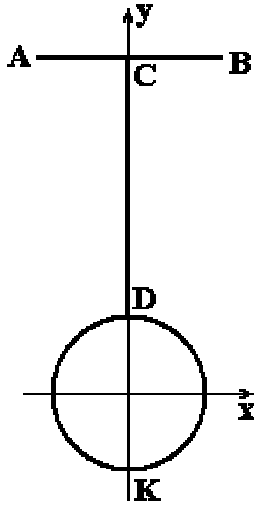


Рис.11 Общий вид исходного каркаса.

На рис.12 приведены картины линий уровня блендинга (11) при различных значениях параметров m_i, в том числе и функциональных.

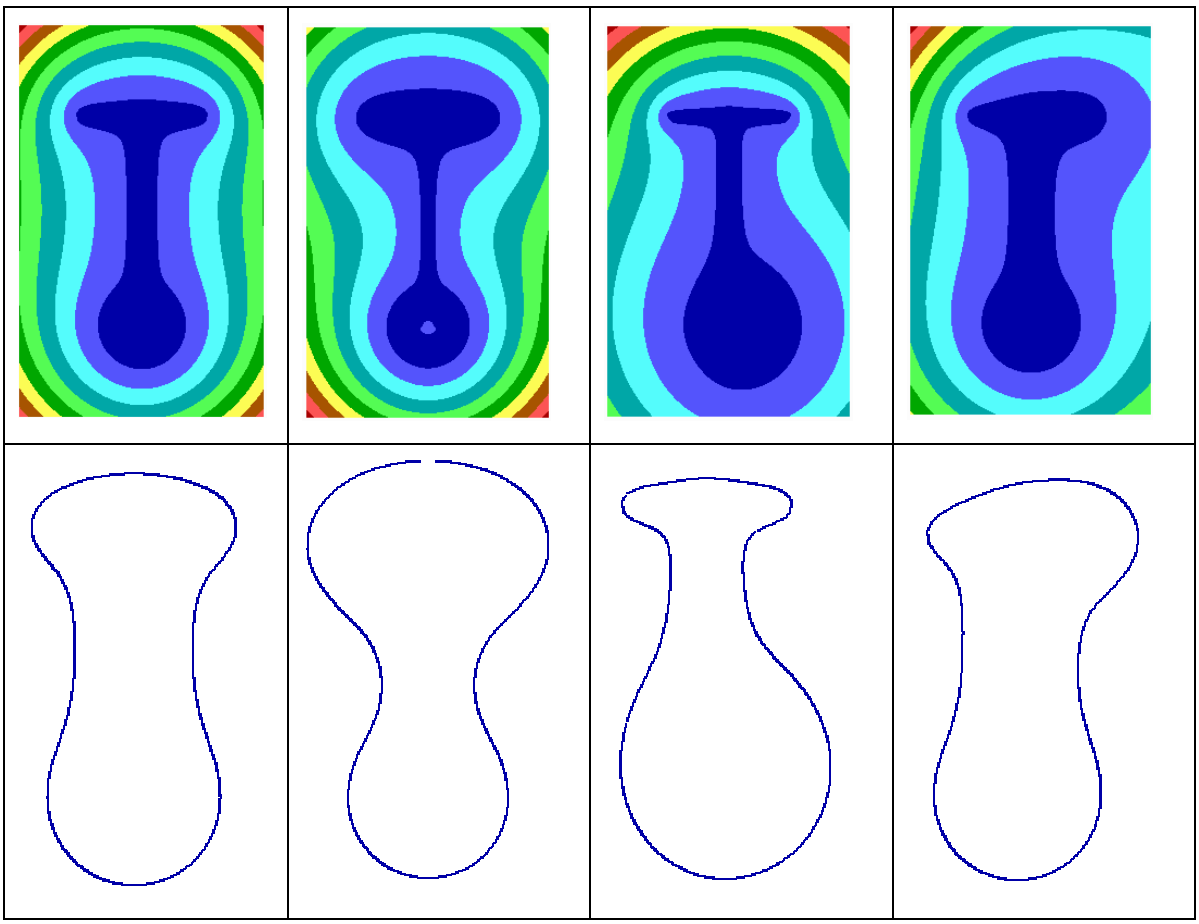


Рис.12 Картины блендинга для каркаса при различных значениях параметров m_i.

В заключение следует отметить, что применение R-функций в задачах геометрического дизайна позволяет строить блендинг-уравнения, обладающие заданными дифференциальными свойствами, например, свойством нормализованности, что позволяет впоследствии использовать эти уравнения не только для задания информации станкам с программным управлением при создании сложных поверхностей или форм для литья, например [8], но и для решения краевых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rockwood Alyn, Blending, in J. Bloomenthal (ed.), *Introduction to Implicit Surfaces*, San Francisco, California, Morgan Kaufmann Publishers.- 1997.- P. 196-221.
2. Sourin A., Pasko A. Function Representation for Sweeping by a Moving Solid, *ACM Solid Modeling*.- 1995.- P. 383-391.
3. Pasko A.A., Savchenko V.V. Algebraic Sums for Deformation of Constructive Solids, *ACM Solid Modeling*.- 1995.- P. 403-408.
4. Josef Hoschek and Dieter Lasser, Fundamentals of computer aided geometric design, Welleseley, Massachusetts, A K Peters.- 1993.- 727 p.
5. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые её приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.
6. Ricci A.. A Constructive Geometry for Computer Graphics // *The Computer Journal*.- 1973.- Vol. 16, №. 2.- P. 157-160.
7. Рвачев В.Л. Геометрические приложения алгебры логики. – Киев: Техника, 1967. – 212 с.
8. Rvachev V.L., Sheiko T.I., Shapiro V., Uicker J.J. Implicit Modeling of Solidification in Metal Castings // *ASME Journal of Mechanical Design*.- 1997.- Vol. 119, №. 4, December.- P. 466–473.