УДК 539.4

ДИНАМИКА УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ РАБОЧЕЙ ЛОПАТКИ КОМПРЕССОРА ГАЗОТУРБИННОГО ДВИГАТЕЛЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОДОЛЬНОЙ МАЛОЦИКЛОВОЙ НАГРУЗКИ

*Темис Ю.М., д.т.н., профессор, Ройтман А.Б., д.т.н., профессор, Александрова Н.Б., ассист.

Запорожский государственный университет,
**Московский государственный технический университет им. Баумана*

1. Введение. Процессом накопления повреждений при циклических изменениях нагрузок и температур в большой степени определяется долговечность ответственных конструктивных элементов энергетического машиностроения и авиационной техники. Основными факторами, вызывающими такие разрушения, являются циклические напряжения и деформации материала детали в зонах концентрации напряжений [1-3].

Проблемы вибрационной диагностики таких разрушений рассматривались в работах [4-6].

В настоящей работе рассматривается один из возможных подходов к решению данной проблемы, основанный на применении модели циклического поведения лопатки компрессора, изготовленной из конструкционного материала.

При решении задач методом конечных элементов удобно представить параметры напряжений и деформаций как функции повреждаемости [7]. Если в конечном элементе при некотором значении повреждаемости, близком единице, снизить величину модуля упругости, то вклад такого «отмирающего» элемента в общую жесткость системы резко снизится и произойдет перераспределение напряжений и деформаций в его окрестности. Часть элементов разгрузится, а часть – наоборот начнет работать при более высоких уровнях напряжений в деформационном цикле. Такой алгоритм использован в комплексе программ «Cycle2D», с помощью которого удобно моделировать кинетику напряженно-деформированного состояния (НДС) и повреждаемости деталей при циклическом деформировании. При этом появляется возможность оценить число циклов до начала образования трещины из условия достижения повреждаемости критического значения и проследить процесс развития трещины, траекторию движения которой моделируют «отмирающие» конечные элементы.

2. Уравнения метода конечных элементов.

При рассмотрении напряженно-деформированного состояния стержня нагруженного вдоль оси Z, проходящей через его центр тяжести, получено вариационное соотношение [8]:

$$\int_F \{\delta\hat{\varepsilon}\}^T \left(\left[\hat{D}\right]_2 \{\Delta\hat{\varepsilon}\} + \begin{Bmatrix} d_{13} \\ d_{23} \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta\varepsilon_z \right) dF + \int_F \delta\varepsilon_z \left(\{d_{13}\, d_{23}\, 0\}_2 \{\Delta\hat{\varepsilon}\} + d_{33,2}\Delta\varepsilon_z \right) dF =$$

$$= \int_F \delta\varepsilon_z \cdot \Delta\sigma_z^0 dF - \int_F \{\delta\hat{\varepsilon}\}\{\Delta\sigma^0\} dF + \int_\Gamma \{\delta u\}^T \begin{Bmatrix} \Delta p_x \\ \Delta p_y \end{Bmatrix} d\Gamma + \sum_{i=1}^{m} \delta u_i \Delta P_i + \delta w \cdot \Delta N_z - \qquad (1)$$

$$- \int_F \left(\{\hat{\varepsilon}\}^T \{\hat{\sigma}\}_1 + \delta\varepsilon_z \cdot \sigma_{z1} \right) dF - \int_\Gamma \{\delta u\}^T \begin{Bmatrix} \Delta p_{x1} \\ \Delta p_{y1} \end{Bmatrix} d\Gamma - \sum_{i=1}^{m} \delta u_i \cdot P_{i1} - \delta w \cdot N_{z1},$$

где $\{\hat{\varepsilon}\}^T = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}, \{\hat{\sigma}\}^T = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}$ – компоненты деформаций и напряжений, действующие в плоскости $X0Y$;

$[D]$ – матрица упругости для упругого ортотропного материала;

$\left[\hat{D}\right]$ – матрица для обобщенного плоского деформированного состояния;

$$d_{11}=\frac{E_x}{m}\left(1-\mu_{xy}\mu_{yz}\right);\quad d_{12}=d_{21}=\frac{E_x}{m}\left(\mu_{xy}+\mu_{yz}\mu_{zx}\right);$$

$$d_{22}=\frac{E_y}{m}\left(1-\mu_{xy}\mu_{zx}\right);\quad d_{23}=d_{32}=\frac{E_x}{m}\left(\mu_{yz}+\mu_{xy}\mu_{zx}\right);$$

$$d_{33}=\frac{E_z}{m}\left(1-\mu_{xy}\mu_{xy}\right);\quad d_{13}=d_{31}=\frac{E_x}{m}\left(\mu_{zx}+\mu_{xy}\mu_{yz}\right);$$

$$d_{44}=G_{xy}=\frac{E_x}{2\left(1+\mu_{xy}\right)};$$

$$m=1-2\mu_{xy}\mu_{yz}\mu_{zx}-\mu_{xy}\mu_{xy}-\mu_{yz}\mu_{yz}-\mu_{zx}\mu_{zx};$$

ε_z,σ_z – деформация и напряжение вдоль оси Z,

$$\sigma_z=d_{31}\left(\varepsilon_x-\varepsilon_x^0\right)-d_{32}\left(\varepsilon_y-\varepsilon_y^0\right)+d_{33}\left(\varepsilon_z-\varepsilon_z^0\right);$$

P_p – часть контура на котором задано давление $P(x,y)$; F – площадь сечения стержня;

$N_z=\int_F \sigma_z dF$ – внешняя сила действующая на торец стержня;

$$\left\{\Delta\sigma^0\right\}=-\left[\widehat{D}\right]_2\left\{\Delta\widehat{\varepsilon}^0\right\}-\begin{Bmatrix}d_{13}\\d_{23}\\0\end{Bmatrix}_2\Delta\varepsilon^0+\left[\Delta\widehat{D}\right]\left(\left\{\widehat{\varepsilon}\right\}_1-\left\{\widehat{\varepsilon}^0\right\}_1\right)+\Delta\begin{Bmatrix}d_{13}\\d_{23}\\0\end{Bmatrix}_2\left(\varepsilon_{z1}-\varepsilon_{z1}^0\right);$$

$$\Delta\sigma_z=\left\{d_{31}\ d_{32}\ 0\right\}_2\left\{\Delta\widehat{\varepsilon}\right\}+d_{33}\Delta\varepsilon_z+\Delta\sigma_z^0,$$

$$\Delta\sigma_z^0=-\left\{d_{31}\ d_{32}\ 0\right\}_2\left\{\Delta\widehat{\varepsilon}^0\right\}-d_{33}\Delta\varepsilon_z^0+\Delta\left\{d_{31}\ d_{32}\ 0\right\}_2\left[\left\{\widehat{\varepsilon}\right\}_1-\left\{\widehat{\varepsilon}^0\right\}_1+\Delta d_{33}\left(\varepsilon_{z1}-\varepsilon^0\right)\right].$$

Индексы 1, 2 – относятся к состояниям в моменты времени t_1 и t_2, а индекс 0 – обозначает неупругие деформации.

Вариационные соотношения (1) позволяют получить систему уравнений метода конечных элементов (МКЭ) [9]. Разобьем поперечное сечение стержня сеткой N_e конечных элементов. В дальнейшем будем использовать трех- и шестиузловые треугольные и четырех- и восьмиузловые четырехугольные конечные элементы. Используем традиционные зависимости МКЭ, принятые при формулировке метода перемещений. Для каждого конечного элемента справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\left\{u\right\}&=\left[N\right]\cdot\left\{u\right\}^e,\\ \left\{\varepsilon\right\}&=\left[B\right]\cdot\left\{u^e\right\},\end{aligned}\qquad(2)$$

где $\left\{u\right\}$ – вектор перемещений в точке элемента; $\left[N\right]$ – матрица функций форм элемента;

$\left\{u\right\}^e$ – вектор узловых перемещений элемента; $\left[B\right]$ – матрица связи вектора деформаций и вектора узловых перемещений.

С учетом того, что на единичной длине по оси стержня $\delta w=\delta\varepsilon_z$, уравнение (1) преобразуем к виду

$$\sum_{i=1}^{N_e}\int_F \{\delta u\}^T [B]^T \left[\widehat{D}\right][B]\{\Delta u\}^e dF + \sum_{i=1}^{N_e}\int_{F_e} \{\delta u\}^T [B]\begin{Bmatrix} d_{13} \\ d_{23} \\ 0 \end{Bmatrix}\Delta\varepsilon_z dF + \delta\varepsilon_z\left(\int_F d_{33,2}dF\right)\cdot\Delta\varepsilon_z dF +$$

$$\delta\varepsilon_z \sum_{i=1}^{N_e}\left(\{d_{13}\, d_{23}\, 0\}[B]dF\right)\{\Delta u\}^e = -\delta\varepsilon_z\int_F \Delta\sigma_z^0 dF - \sum_{i=1}^{N_e}\int_{F_e}\{\delta u\}^T [B]^T\left\{\Delta\widehat{\sigma}^0\right\}dF +$$

$$+\int_\Gamma \{\delta u\}^T \begin{Bmatrix}\Delta p_x \\ \Delta p_y\end{Bmatrix} d\Gamma + \sum_{i=1}^{m}\delta u_i \Delta P_i + \delta\varepsilon_z\cdot\Delta N_z - \sum_{i=1}^{N_e}\int_{F_e}\{\delta u\}^e [B]\{\widehat{\sigma}\}_1 dF - \tag{3}$$

$$-\delta\varepsilon_z\int_F \sigma_{z1}dF + \sum_{i=1}^{m}\int_\Gamma \{\delta u\}^e [N]\begin{Bmatrix} p_{x1} \\ p_{y1}\end{Bmatrix} d\Gamma + \sum_{i=1}^{m}\delta u_i\cdot P_{i1} - \delta\varepsilon_z\cdot N_{z1}$$

Из выражения (3) после преобразований получим систему уравнений МКЭ

$$[K]\cdot\begin{Bmatrix}\Delta\varepsilon_z \\ \Delta U\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_z \\ P\end{Bmatrix}, \tag{4}$$

где матрица $[K]$ может быть представлена блочной структурой в виде

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22}\end{bmatrix}. \tag{5}$$

Диагональный элемент K_{11} вычисляется как

$$K_{11} = \sum_{i=1}^{N_e}\int_{F_e} d_{33,2}dF\,. \tag{6}$$

Строка матрицы жесткости $K_{12} = K_{21}^T$ компоненты, которой определяются для каждого конечного элемента по формуле

$$K_{1j} = \int_{F_e}\{d_{13}\, d_{12}\, 0\}_2\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3\end{Bmatrix} dF\,, \tag{7}$$

где b_i – компоненты матрицы связи $[B]$.

Подматрица $[K_{22}]$ представляет собой матрицу жесткости конечных элементов в плоскости поперечного сечения стержня. Компоненты этой матрицы определяются зависимостью [5]

$$[K]^e = \int_{F_e}[B]^T [D][B]dF\,. \tag{8}$$

Компоненты вектора правой части определяются следующим образом:

$$N_z = -\sum_{i-1}^{N_e}\left(\int_F \Delta\sigma_z^0 dF + \Delta N_z - N_{z1} - \int_F \sigma_{z1}dF\right); \tag{9}$$

$$P^e = -\int_{F_e}[B]\left\{\Delta\widehat{\sigma}^0\right\}dF + \int_{S_e}[N]\{\Delta p\}dS + \Delta P - \int_{F_e}[B]\{\Delta\widehat{\sigma}\}_1 dF + \int_{S_e}[N]\{p\}_1 dS + P_1. \tag{10}$$

3. Общая схема моделирования малоцикловой усталости. Оценка циклической долговечности конструкций предполагает проведение исследования кинетики напряженно-деформированного состояния (НДС) деталей, основанного на математической модели упругопластического поведения конструкционного материала при циклическом деформировании [10-12]. Наиболее значительные изменения напряженно-деформированного состояния при циклическом, в общем случае программном нагружении происходят в зонах концентрации напряжений.

Рассмотрим циклическое деформирование, при котором вектор нагрузок $\{F\}$ прикладывается к детали по следующей программе

$$0 \to \{F_{\max}\} \to \{F_{\min}\} \to \{F_{\max}\} \to \dots \tag{11}$$

Если векторы деформаций и напряжений в точках тела $\{\varepsilon\}_k$ и $\{\sigma\}_k$ соответствуют концу k-го полуцикла нагружения, а $\{\varepsilon\}_{k+1}$ и $\{\sigma\}_{k+1}$ – концу $k+1$ полуцикла, то для каждого полуцикла выполняется вариационное соотношение

$$\int_{\Omega} \{\sigma\}_q^T \{\delta\varepsilon\} d\Omega - \int_{\Omega} \{F_{\Omega}\}_q^T \{\delta u\} d\Omega - \int_{S} \{F_S\}_q \{\delta u\} dS = 0, \tag{12}$$

где $q = k, k+1$ – номер полуцикла. Обозначения здесь и далее соответствуют принятым в работе [2].

Вычитая из соотношения (12) при $q = k+1$ аналогичное соотношение при $q = k$ получим, что задача моделирования напряженно-деформированного состояния НДС при переходе от полуцикла нагрузки к полуциклу разгрузки сведется к решению следующей задачи:

$$\int_{\Omega} \{\Delta\sigma\}_{k+1}^T \{\delta\varepsilon\} d\Omega - \int_{\Omega} \{\Delta F_{\Omega}\}_{k+1}^T \{\delta u\} d\Omega - \int_{S_F} \{\Delta F_S\}_{k+1} \{\delta u\} dS = 0. \tag{13}$$

Если задать вид зависимости $\Delta\sigma(\Delta\varepsilon)$, то (13) будет сведено к конечно-элементной проблеме

$$[K]_{k+1} \cdot \{\Delta U_{k+1}\} = \{\Delta F_{k+1}\}, \tag{14}$$

где $[K]_{k+1}$ - матрица жесткости $k+1$ полуцикла, определяемая последовательными приближениями; $\{\Delta U_{k+1}\}$ и $\{\Delta F_{k+1}\}$ - векторы приращений перемещений и нагрузок на полуцикле соответственно.

Тогда для вектора смещения в конце $k+1$ полуцикла справедливо

$$\{U_{k+1}\} = \{U_k\} + \{\Delta U_{k+1}\}, \tag{15}$$

а деформации и напряжения в расчетной точке связаны аналогичными зависимостями

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_{k+1}\} &= \{\varepsilon_k\} + \{\Delta\varepsilon_{k+1}\} \\ \{\sigma_{k+1}\} &= \{\sigma_k\} + \{\Delta\sigma_{k+1}\}' \end{aligned} \tag{16}$$

Воспользуемся обобщением понятия единой кривой деформирования. На $k+1$ полуцикле точка, отображающая процесс деформирования, должна находиться на ветви кривой циклического деформирования рис 1.

Ветви кривой циклического деформирования в каждом полуцикле представляются в виде [2,11]:

$$\sigma^* = \begin{cases} E_\chi \varepsilon^* & \varepsilon^* \le \varepsilon^*_{s\chi} \\ E_\chi \varepsilon^*_{s\chi} + b_\chi \left[f\left(\varepsilon_s + \dfrac{\varepsilon^* - \varepsilon^*_{s\chi}}{b_\chi} \right) \right] & \varepsilon^* > \varepsilon^*_{s\chi} \end{cases}. \tag{17}$$

Здесь $\varepsilon_{s\chi} = a_\chi \varepsilon_s / d_\chi$, $d_\chi = E_\chi / E$;

где σ_s и ε_s - напряжения и деформации, соответствующие началу пластического деформирования при монотонном нагружении;

a_χ, b_χ и d_χ - параметры материала, описывающие характер его пластического деформирования при циклическом нагружении;

E_χ - модуль упругой разгрузки, зависящий от величины накопленной пластической деформации χ

$$(E = E_\chi(\chi = 0)).$$

Параметр a_χ может быть представлен как $a_\chi = \sigma_{s\chi} / \sigma_s$ (рис.1). Параметр b_χ характеризует масштаб преобразования нелинейного участка первоначальной кривой деформирования.

Варьируя параметрами кривой циклического деформирования (17), можно описать процессы упрочнения и разупрочнения конструкционного материала при циклическом деформировании. Повреждаемость материала при циклическом упруго-пластическом деформировании определяется как $\Pi = \chi / \chi_{\max}$. Соответствующий алгоритм использован в комплексе программ «Cycle2D», позволяющем моделировать кинетику НДС и повреждаемости деталей при циклическом деформировании.

4. Структура программного комплекса. На основе приведенных соотношений в Центральном институте авиационного моторостроения создан программный комплекс «Cycle2D», позволяющий проводить исследования кинетики НДС и повреждаемости деталей ГТД при циклическом деформировании. Блок-схема комплекса и алгоритм расчета приведены на рис.2. Комплекс программ «Cycle2D» позволяет исследовать характер циклического упруго-пластического деформирования, предшествующего началу развития трещин малоцикловой усталости (МЦУ) в зонах концентрации напряжений.

5. Пример моделирования МЦУ. Для примера была рассмотрена рабочая лопатка газотурбинного двигателя (ГТД), к свободному концу которой приложена продольная нагрузка. Нагрузка изменяется согласно закону, представленному соотношением (11), где $F_{\min} = 0, F_{\max} = F$. Материал лопатки – титановый сплав – ВТ-3, толщина – 3 мм.

Критическое напряжение p, приводящее к росту трещины, расчитывалось с учетом пластической деформации в вершине трещины из условия Гриффитса-Ирвина [7]:

$$p^2 = \frac{2E(\gamma + \gamma_p)}{\pi l(1 - \nu^2)},$$

где E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; l – глубина трещины; γ – плотность поверхностной энергии; γ_p – работа пластической деформации при образовании единицы поверхности.

На рис. 3 показано разбиение лопатки сеткой конечных элементов. Лопатка повреждена трещиной глубиной 5 мм на расстоянии 30 мм от защемления.

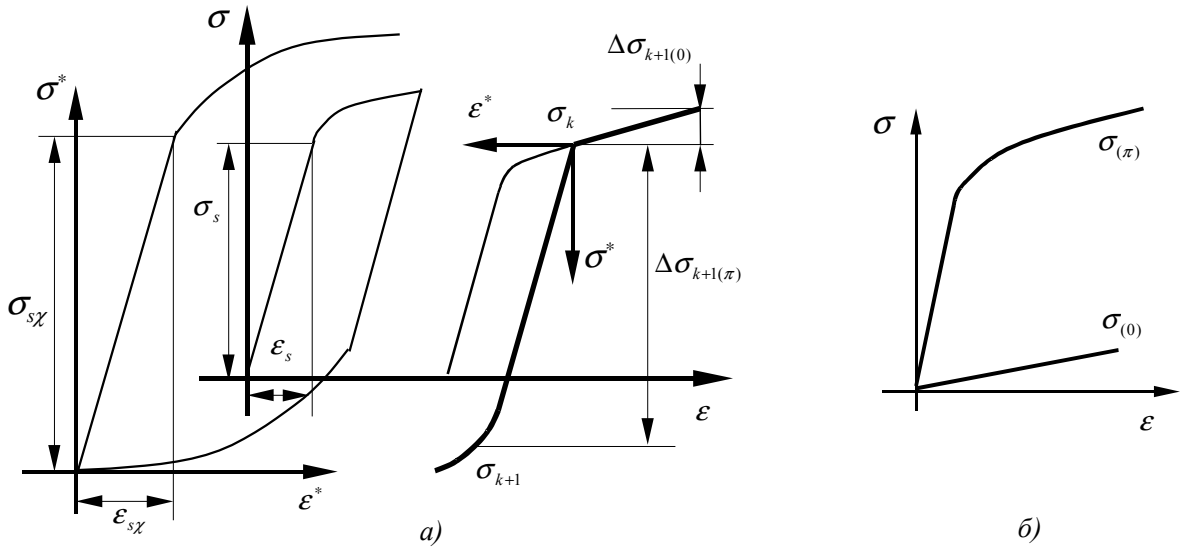


Рис.1. Формирование кривой деформирования для $k+1$ этапа:
а) ветви кривой деформирования в зависимости от направления нагружения;
б) возможные зависимости между интенсивностями напряжений и деформаций для $k+1$ этапа

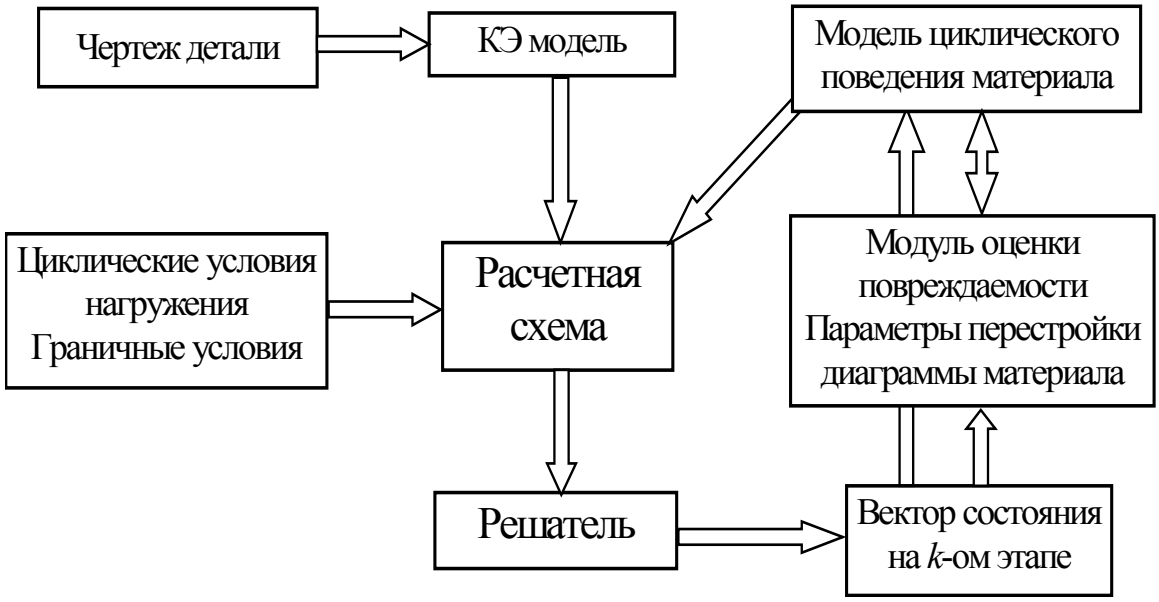


Рис.2. Блок-схема комплекса «Cycle2D» и алгоритм расчета

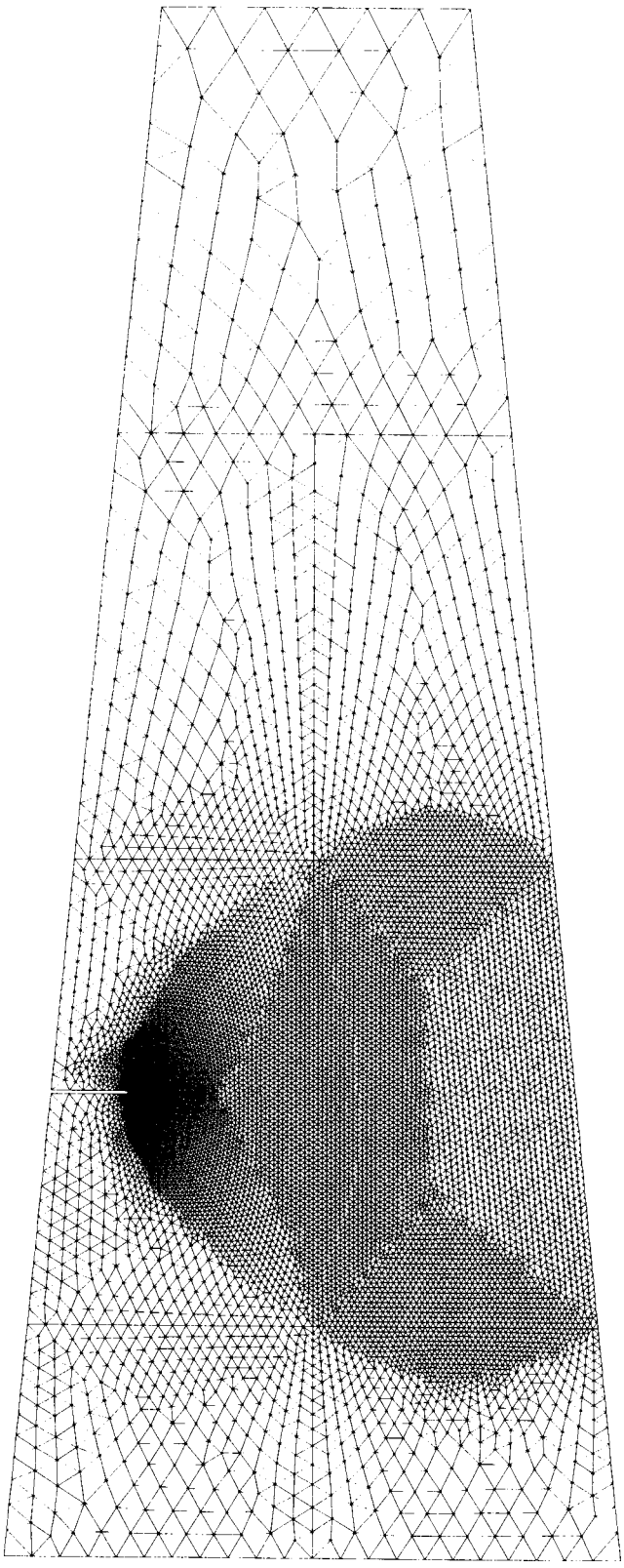


Рис. 3. Конечно-элементная (КЭ) модель трещины в рабочей лопатке компрессора ГТД.

Рис. 4 иллюстрирует процесс развития трещины. Темные участки на светлом фоне характеризуют уровень повреждаемости и траекторию развития трещины. Рис. 4 а-г сделаны через каждые 50 циклов нагружения лопатки, кажды из которых соответствует полётному циклу ГТД. Рис. 4 д можно интерпретировать как полное разрушение.

На рис. 5 представлена динамика глубины трещины l в зависимости от количества циклов нагружения $N_ц$.

Авторы выражают благодарность сотруднику ЦИАМ Х.Х. Азметову за компьютерную визуализацию программы «Cycle2D».

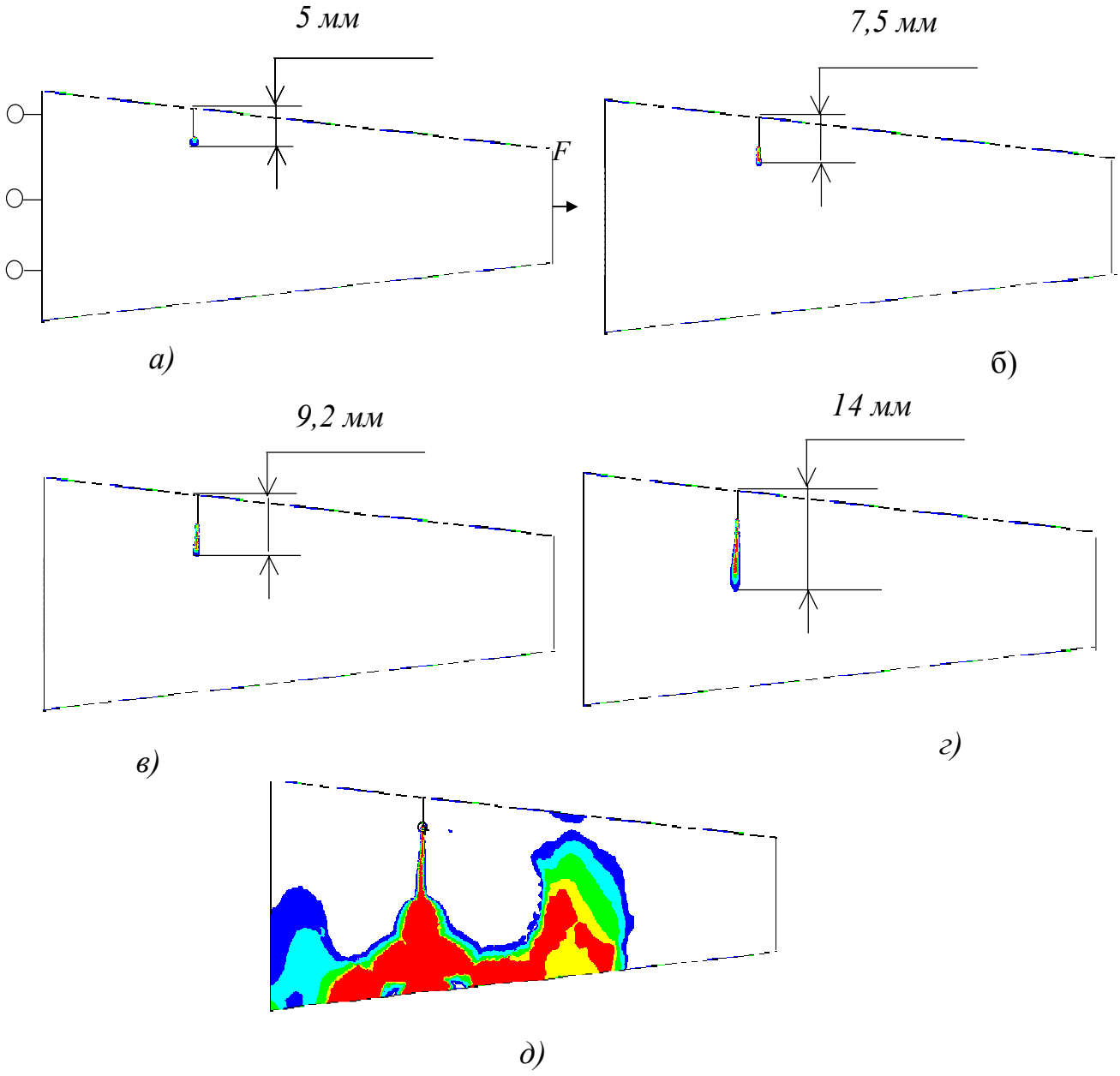


Рис. 4. Процесс развития трещины.
а) указано защемление лопатки и силовое нагружение F.
д) Полное разрушение.

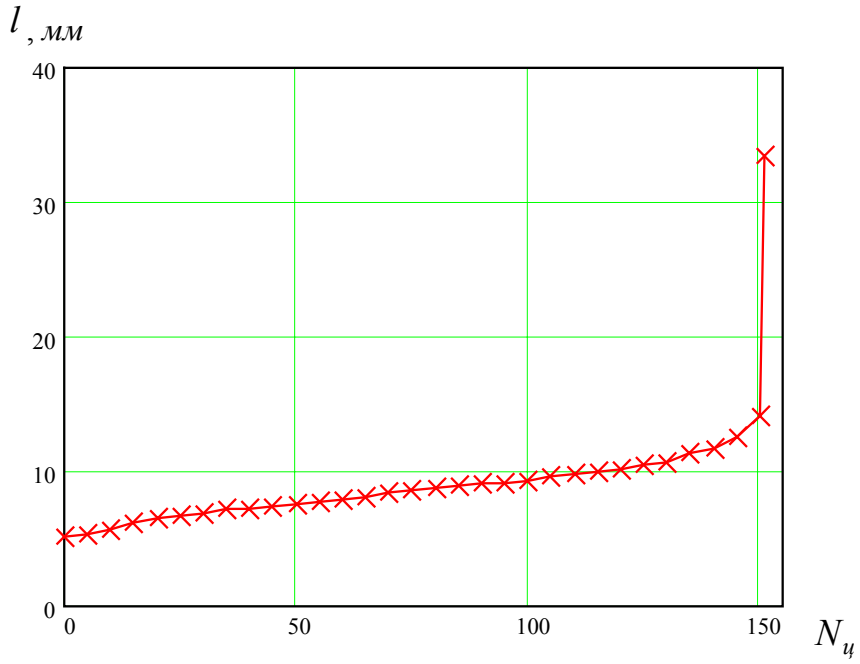


Рис. 5. Динамика развития трещины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Биргер И.А., Демьянушко И.В., Темис Ю.М. Долговечность теплонапряженных элементов машин. – Проблемы прочности, 1975, №12, с. 9-16.
2. Темис Ю.М. Пластичность и ползучесть деталей ГТД при циклическом нагружении.//В сб.: Проблемы прочности и динамики авиадвигателей. Вып.2. – Тр. ЦИАМ №1237. – 1989. – с. 32-50.
3. Темис Ю.М. Оценка пластичности и ползучести в инженерных расчетах.//В кн.: Аналитические и численные методы решения краевых задач пластичности и вязкоупругости. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1986. – с. 100-106.
4. Ройтман А. Б., Александрова Н.Б., Христенко Т.А. Вибрационная диагностика «дышащих» трещин в изделиях. // Техническая диагностика и неразрушающий контроль. – 2000. - № 1. – С. 58-66.
5. Ройтман А. Б., Пылов А. А., Александрова Н. Б. Продольные колебания консольного стержня с поперечной трещиной. Сообщение 1. Малые колебания // Проблемы прочности. – 1999. – № 2. – С. 23-34.
6. Ройтман А. Б., Пылов А. А., Александрова Н. Б. Продольные колебания консольного стержня с поперечной трещиной. Сообщение 2. Кусочно-линейная модель // Проблемы прочности. – 1999. – № 5. – С. 78-85.
7. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М.: Наука –1974. – 311 с.
8. Ватулин А.В., Каширин Б.А., Темис Ю.М. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния твэла на основе полупространственной теории стержней. // препринт ВНИИНМ 2000-3 – М.:ВНИИНМ, 2000 – 24 с.
9. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике М.: Мир – 1975. –541 с.
10. Темис Ю.М., Пучков И.В. Аналитическое описание кривых 1988, Проблемы прочности, – циклического деформирования конструкционных материалов. №9.
11. Темис Ю.М., Пучков И.В. Характеристики упруго-пластического деформирования и повреждаемости конструкционных материалов при циклическом нагружении.// Межвуз. сборник «Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения». – Изд-во Нижегородского университета, 1992. – с.82-89.
12. Putchkov I.V., Temis Y.M., Dowson A.L., Damry D., Development of finite element based strain accumulation model for the prediction of fatigue lives in highly stressed Ti components. – Int. J. Fatigue Vol. 17, No. 6, 1995, pp. 385-398.