УДК 514.75

НЕКЛАСИЧНИЙ КАНОНІЧНИЙ РЕПЕР ЛІНІЙЧАТИХ ПОВЕРХОНЬ

Стєганцева П.Г., к.ф-м.н., доц., Терещенко С.О., студент

Запорожский государственный университет

У роботі [1] за допомогою методу зовнішніх форм Картана був побудований канонічний репер лінійчатої поверхні тривимірного евклідова простору E_3, яка розглядалась як однопараметрична родина прямих цього простору. Отримана система метричних інваріантів лінійчатої поверхні складається з трьох функцій одного аргументу і визначає її однозначно з точністю до рухів простору E_3. Основні класи лінійчатих поверхонь характеризуються найпростішими співвідношеннями між інваріантами. Мета даної роботи – побудувати канонічний репер лінійчатої поверхні, виходячи з геометричних міркувань, і проаналізувати зв'язки між системами інваріантів і основними класами лінійчатих поверхонь.

Деривaційні формули канонічного репера $\{\bar{r},\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ лінійчатої поверхні, отримані в роботі [1], мають вигляд

$$\frac{d\bar{r}}{ds}=-p\bar{e}_2-a\bar{e}_3\ ,\ \frac{d\bar{e}_1}{ds}=-b\bar{e}_2+\bar{e}_3\ ,\ \frac{d\bar{e}_2}{ds}=b\bar{e}_1\ ,\ \frac{d\bar{e}_3}{ds}=\bar{e}_1\ , \qquad (1)$$

де інваріанти $p(s)$, $a(s)$, $b(s)$ називаються відповідно *параметром розподілу, нахилом, косиною*, а параметр s є довжиною дуги сферичної індикатриси. Так називається сферична крива, точки якої є кінцями одиничних направляючих векторів відповідної твірної лінійчатої поверхні, відкладених від центру одиничної сфери.

Поряд із довільними однопараметричними родинами прямих простору E_3 будемо розглядати однопараметричні родини прямих, які називаються *прямими гелікоїдами*. У многовиді всіх прямих простору E_3 вони відіграють роль геодезичних ліній. Як відомо, для визначення геодезичних ліній на деякому многовиді, необхідно наділити його аффінною зв'язністю. Про можливість введення аффінної зв'язності в многовид лінійчатих елементів говориться, наприклад, у роботах [2], [3]. Прямим гелікоїдом називається поверхня, утворена прямою, що обертається навколо вісі й одночасно рухається поступально в напрямку цієї вісі, за умови, що ця пряма перетинає вісь обертання і перпендикулярна до неї. Через будь-які дві мимобіжні прямі можна провести єдиний гелікоїд. Загальний перпендикуляр твірних гелікоїда назвемо *віссю гелікоїда*, площина, якій паралельні всі твірні – *направляючою площиною*. Точку перетину вісі гелікоїда з фіксованою твірною гелікоїда будемо називати *горловою точкою* цієї твірної, одиничний направляючий вектор твірної – її *горловим вектором*, а одиничний вектор, перпендикулярний горловому вектору і паралельний направляючій площині – *когорловим вектором* твірної. Нехай k – кутова швидкість обертального руху твірної прямого гелікоїда, а l – швидкість поступального руху твірної. Число $q=\dfrac{l}{k}$ будемо називати *параметром розподілу* гелікоїда.

При вивченні однопараметричних родин прямих простору E_3 корисно користуватися їхнім зображенням у виді кривих на сфері одиничного радіуса цього простору. Тоді прямі гелікоїди зобразяться на сфері великими колами.

Сферична крива L, що зображує лінійчату поверхню S простору E_3, має в кожній своїй точці дотичний вектор, напрямок якого визначає єдину геодезичну сфери, дотичну до кривої L. Цій геодезичній в просторі E_3 відповідає прямий гелікоїд, який будемо називати *дотичним гелікоїдом* до поверхні S. Справедливою є

Теорема. Нехай задана лінійчата поверхня S і з кожною її твірною $\bar{R}(\tau)$ зв'язаний дотичний гелікоїд, для котрого $l(\tau)$ і $k(\tau)$ – лінійна і кутова швидкості твірної відповідно. Тоді з кожною твірної поверхні

S можна зв'язати канонічний репер $\{\bar{x},\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ простору E_3, який визначається диференціальним околом першого порядку твірної, а деривaційні формули цього репера мають вигляд

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = F\,\bar{e}_1 + l\,\bar{e}_2\,,\ \frac{d\bar{e}_1}{d\tau} = k\,\bar{e}_3\,,\ \frac{d\bar{e}_2}{d\tau} = C\,\bar{e}_3\,,\ \frac{d\bar{e}_3}{d\tau} = k\,\bar{e}_1 - C\,\bar{e}_2\,, \tag{2}$$

де всі коефіцієнти є функціями параметра τ, $\bar{x}$ – радіус-вектор початку репера.

Доведення. Якщо початок репера помістити в горлову точку твірної, вектори $\bar{e}_1$ і $\bar{e}_3$ направити відповідно по горловому і когорловому векторах, а вектор $\bar{e}_2$ – по осі дотичного гелікоїда, то отриманий рухомий репер буде інваріантно зв'язаним із досліджуваною лінійчатою поверхнею. Нехай τ – параметр лінійчатої поверхні S. Векторні рівняння лінійчатої поверхні S і її сферичного зображення мають вигляд $\bar{R}(\tau) = \bar{x}(\tau) + \lambda\bar{e}_1(\tau)$ і $\bar{R}_1(\tau) = \bar{e}_1(\tau)$ відповідно. Аналогічно, векторні рівняння гелікоїда і його сферичного зображення мають вигляд $\bar{q}(t) = \bar{x}(t) + lt\,\bar{e}_2 + \alpha(\cos kt\,\bar{e}_1 + \sin kt\,\bar{e}_3)$ і $\bar{q}_1(t) = \cos kt\,\bar{e}_1 + \sin kt\,\bar{e}_3$ при фіксованому τ. Для того, щоб цей гелікоїд був дотичним гелікоїдом поверхні S для кожного значення τ, потрібно виконання таких умов:

$$\frac{d\bar{R}_1}{d\tau} = \left.\frac{d\bar{q}_1}{dt}\right|_{t=0} \text{ і } \left[\frac{d\bar{R}}{d\tau},\frac{d\bar{R}}{d\lambda}\right]_{\lambda=0} = \left[\frac{d\bar{q}}{dt},\frac{d\bar{q}}{d\alpha}\right]_{\substack{t=0\\ \alpha=0}}.$$

Одержимо $\omega_1^2 = 0$, $\omega_1^3 = k\,d\tau$, $\omega^3 = 0$, $\omega^2 = l\,d\tau$. Враховуючи, що усі форми залежать від $d\tau$, позначимо $\omega^1 = F\,d\tau$, $\omega_2^3 = C\,d\tau$. Теорема доведена.

Помітимо, що в деривaційних формулах (2) беруть участь чотири коефіцієнти, але тому що $q(\tau)$ і $k(\tau)$ зв'язані одним співвідношенням, то незалежними залишаються три функції, що і складають повну систему інваріантів лінійчатої поверхні.

Для розгляду основних класів лінійчатих поверхонь виникає необхідність поряд з основним випадком розглядати і вироджені випадки, коли або k, або l рівні нулю. При $k = 0$ гелікоїд є пучком рівнобіжних прямих, а при $l = 0$ – пучком прямих, що перетинаються в одній точці.

З класичної диференціальної геометрії відомий критерій: лінійчата поверхня є *розгортною* (*торсом*), тоді і тільки тоді, коли вектори $d\bar{x}$, $\bar{e}_1$, $d\bar{e}_1$ компланарні. Оскільки мішаний добуток $(d\bar{x},\bar{e}_1,d\bar{e}_1)$ дорівнює нулю при $kl = 0$, то класи торсів визначаються співвідношеннями $k = 0$ або $l = 0$. При $k = 0$ маємо $\frac{d\bar{e}_1}{d\tau} = \bar{0}$, звідки $\bar{e}_1 = \overline{const}$, тобто торс $k = 0$ є циліндром. Зауважимо, що при вивченні лінійчатих поверхонь методом зовнішніх форм, цей випадок виключався з розгляду.

При $l = 0$ одержимо конуси (якщо також і $F = 0$) і поверхні, утворені дотичними прямими до деякої просторової кривої (при $F \neq 0$). В останньому випадку деривaційні формули поверхні мають вигляд

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = F\,\bar{e}_1\ ,\ \frac{d\bar{e}_1}{d\tau} = k\,\bar{e}_3\,,\ \frac{d\bar{e}_2}{d\tau} = C\,\bar{e}_3\,,\ \frac{d\bar{e}_3}{d\tau} = k\,\bar{e}_1 - C\,\bar{e}_2\,.$$

Переходячи до іншого параметру за формулою $F\,d\tau = du$ й позначаючи $\bar{m}_1 = \bar{e}_1$, $\bar{m}_2 = \bar{e}_3$, $\bar{m}_3 = \bar{e}_2$, $\frac{k}{F} = k_1$, $-\frac{C}{F} = k_2$, одержимо формули Френе просторової кривої у вигляді

$$\frac{d\bar{x}}{du} = \bar{m}_1\,,\ \frac{d\bar{m}_1}{du} = k_1\,\bar{m}_2\,,\ \frac{d\bar{m}_2}{du} = -k_1\,\bar{m}_1 + k_2\,\bar{m}_3\,,\ \frac{d\bar{m}_3}{d\tau} = -k_2\,\bar{m}_2\,.$$

Таким чином, критерій лінійчатої поверхні, що розгортається, рівносильний вимозі для дотичного гелікоїда бути пучком прямих (власним або невласним).

Лінійчаті поверхні, для яких $kl \neq 0$, не є розгортними. Зробимо заміну параметра лінійчатої поверхні за формулою $ds = k\,d\tau$, тоді деривaційні формули канонічного репера набудуть вигляду

$$\frac{d\bar{x}}{ds} = f\,\bar{e}_1 + q\,\bar{e}_2\ ,\ \frac{d\bar{e}_1}{ds} = \bar{e}_3\,,\ \frac{d\bar{e}_2}{ds} = c\,\bar{e}_3\,,\ \frac{d\bar{e}_3}{ds} = -\bar{e}_1 - c\,\bar{e}_2\,, \tag{3}$$

де $f=\frac{F}{k}$, $q=\frac{l}{k}$, $c=\frac{C}{k}$, (4)

тобто вони є однаковими з точністю до позначення векторів репера з формулами (1).

Оскільки сферична крива задається векторним рівнянням $\overline{R}(s)=\overline{e}_1(s)$ і для диференціала ds^* довжини її дуги маємо $ds^*=\left|d\,\overline{e}_1(s)\right|=\left|\overline{e}_3(s)\,ds\right|=\left|ds\right|$, то параметр s лінійчатої поверхні є довжина дуги відповідної сферичної кривої. Як і в [1] інваріанти f, q, c є відповідно косиною, параметром розподілу і нахилом лінійчатої поверхні. Формули (4) дають їхню геометричну характеристику через параметри дотичного гелікоїда, зокрема параметр розподілу p лінійчатої поверхні з формул (1) дорівнює параметру розподілу q дотичного гелікоїда. Позначимо символом θ кут між осями дотичних гелікоїдів, побудованих для двох нескінченно близьких твірних лінійчатої поверхні, а символом φ – кут між самими твірними. Тоді формула $c=\lim\limits_{\varphi\to 0}\frac{\theta}{\varphi}$ розкриває геометричний зміст параметра c. Площина, що визначається векторами $\overline{e}_1$ і $\overline{e}_3$ канонічного репера, названа в роботі [1] асимптотичною, тепер може бути охарактеризована як напрямна площина дотичного гелікоїда.

До нульових класів лінійчатих поверхонь відносяться також поверхні, утворені бінормалями деякої просторової кривої (при $b=0$). Їх називають бінормальними лінійчатими поверхнями.

Знайдемо залежність між інваріантами лінійчатої поверхні, утвореної головними нормалями просторової кривої, використовуючи формули (1). Нехай рівняння цієї лінійчатої поверхні має виглядд $\overline{R}(t)=\overline{\rho}(t)+\lambda\overline{m}_2(t)$, $\lambda\in R$, де $\overline{\rho}(t)$ – довільна крива, t – її натуральний параметр.

Рівняння горлової лінії цієї лінійчатої поверхні будемо шукати у вигляді $\overline{r}(t)=\overline{\rho}(t)+\lambda(t)\overline{m}_2(t)$. Вимагаючи, щоб $\overline{e}_3=\overline{m}_2$, одержимо $\frac{d\overline{e}_3}{ds}=\frac{dt}{ds}\left(-k\overline{m}_1+\aleph\overline{m}_3\right)=-\overline{e}_1$, $\overline{e}_1=\frac{dt}{ds}\left(k\overline{m}_1-\aleph\overline{m}_3\right)$, $\overline{e}_2=\left[\overline{e}_3,\overline{e}_1\right]$. Отже,

$$\overline{e}_1=\frac{dt}{ds}k\overline{m}_1-\frac{dt}{ds}\aleph\overline{m}_3,\ \overline{e}_2=-\frac{dt}{ds}\aleph\overline{m}_1-\frac{dt}{ds}k\overline{m}_3,\ \overline{e}_3=\overline{m}_2. \tag{5}$$

Виразимо вектори $\overline{m}_i$ через вектори $\overline{e}_j$, $i,j=\overline{1,3}$:

$$\overline{m}_1=\frac{ds}{dt}\cdot\frac{k}{k^2+\aleph^2}\overline{e}_1-\frac{ds}{dt}\cdot\frac{\aleph}{k^2+\aleph^2}\overline{e}_2,\ \overline{m}_2=\overline{e}_3,\ \overline{m}_3=-\frac{ds}{dt}\cdot\frac{\aleph}{k^2+\aleph^2}\overline{e}_1-\frac{ds}{dt}\cdot\frac{k}{k^2+\aleph^2}\overline{e}_2. \tag{6}$$

Тоді, $\frac{d\overline{r}}{ds}=\frac{dt}{ds}\left(\overline{m}_1(t)(1-\lambda k)+\frac{d\lambda}{dt}\overline{m}_2(t)+\lambda\aleph\overline{m}_3(t)\right)=-p\,\overline{e}_2-a\,\overline{e}_3$, звідки після застосування формул (6) одержимо

$$\frac{dt}{ds}\cdot\frac{d\lambda}{dt}=-a\ ,\ \lambda=\frac{k}{k^2+\aleph^2}\ ,\ p=\frac{\aleph}{k^2+\aleph^2}\ . \tag{7}$$

Аналогічно, із

$$\frac{d\overline{e}_1}{ds}=\frac{d^2t}{ds^2}k\overline{m}_1+\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\frac{dk}{dt}\overline{m}_1+\left(\frac{dt}{ds}\right)^2k^2\overline{m}_2-\frac{d^2t}{ds^2}\aleph\overline{m}_3-\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\frac{d\aleph}{dt}\overline{m}_3+\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\aleph^2\overline{m}_2=$$
$$-b\,\overline{e}_2+\overline{e}_3$$

одержимо

$$dt=\frac{1}{\sqrt{k^2+\aleph^2}}ds\ ,\ b=\frac{\aleph^2}{\left(k^2+\aleph^2\right)^{3/2}}\left(\frac{k}{\aleph}\right)_t'=\frac{1}{\left(\left(\frac{k}{\aleph}\right)^2+1\right)\sqrt{k^2+\aleph^2}}\left(\frac{k}{\aleph}\right)_t'. \tag{8}$$

Виключивши із рівностей (7) і (8) змінні $\lambda,k,\aleph$, одержимо шукану залежність у вигляді $b=\frac{ap's-a'ps-ap}{a^2s^2+p^2}$. Крім того, із залежності (7) отримаємо рівняння горлової лінії у вигляді $\lambda=-as$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Щербаков Р.Н. Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии. – Томск, 1973. – 233с.
2. Норден А.П. Обобщенная геометрия двумерного линейчатого многообразия // Математический сборник. – 1946. – Т.18(60). – С. 139-152.
3. Розенфельд Б.А. Дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей // Изв. АНСССР. Сер. общ.-мат. наук. – 1947. – Т.11. - №3. – С. 283-308.