УДК 519.673:539.3

# ОПТИМІЗАЦІЯ МАСИ ЗАМКНЕНОЇ ОБОЛОНКИ ОБЕРТАННЯ ПРИ ЗАДАНІЙ ВЛАСНІЙ ЧАСТОТІ КОЛИВАНЬ

*Сисоєв Ю.О., к.т.н., доцент, Левицька Т. І., к.т.н., старший викладач

*Запорізький державний університет,
Запорізький державний технічний університет

Задачі оптимізації маси оболонки є важливими практичними задачами. Однак внаслідок досить великих утруднень, які виникають при їх теоретичному розгляданні[ 1 ], практично застосовувати методи, пов'язані з методом скінченних елементів та методом проекції градієнта.

У статті розглядається задача оптимізації маси оболонки обертання при заданій власній частоті. При цьому спочатку розглядається оболонка обертання сталої товщини, а потім проективним методом, при заданих обмеженнях товщин, шукається мінімум маси оболонки для сталої власної частоти.

Власні частоти знайдуться із розв'язання частотного рівняння

$$\left| K - \omega^2 M \right| = 0 \ , \tag{1}$$

де $K = \sum_e{}' T^T K_e T \quad M = \sum_e{}' T^T M_e T$ . Глобальні матриці жорсткості $M$ та $K$ знаходяться методом ансамблювання [2] ( знак штрих після знака суми ) використанням локальних матриць $K_e, M_e$.

При невісесиметричних формах коливання оболонок матриці $K_e, M_e$ будуть мати вигляд :

$$K^{(e)} = \lambda L \int_0^1 B^T \cdot D \cdot B \cdot (y_i + \xi \cdot L \sin\varphi)\, d\xi \ , \tag{2}$$

$$M_e = \lambda L \int_0^1 N^T \cdot \rho \cdot N \cdot (y_i + \xi \cdot L \sin\varphi)\, d\xi \quad , \quad \lambda = \begin{cases} 2\pi, & при \quad k = 0 \\ \pi, & при \quad k \neq 0 \end{cases}$$

де $L$ – довжина конічного елемента оболонки, $\varphi$ - кут нахилу твірної до осі обертання, $y_i$ - початкова ордината елемента. .

Матриці $N, T, D, B$ мають вигляд :

$$N = \begin{pmatrix} 1-\xi & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-3\xi^2+2\xi^3 & L(\xi-2\xi^2+\xi^3) & 0 & 0 & 3\xi^2-2\xi^3 & L(-\xi^2+\xi^3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\xi & 0 & 0 & 0 & \xi \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} D_N & \nu D_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu D_n & D_N & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} D_N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_M & \nu D_M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu D_M & D_M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\nu) D_M \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}
-\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\sin\varphi}{r}(1-\xi) & \frac{\cos\varphi}{r}(1-3\xi^2+2\xi^3) & \frac{\cos\varphi}{r}L(\xi-2\xi^2+\xi^3) & \frac{k}{r}(1-\xi) \\
-\frac{k}{r}(1-\xi) & 0 & 0 & -\frac{1}{L}-\frac{\sin\varphi}{r}(1-\xi) \\
0 & -\frac{1}{L^2}(-6+12\xi) & -\frac{1}{L}(-4+6\xi) & 0 \\
0 & \frac{k^2}{r^2}(1-3\xi^2+2\xi^3)- & \frac{k^2}{r^2}L(\xi-2\xi^2+\xi^3)- & \frac{k\cos\varphi}{r^2}(1-\xi) \\
 & -\frac{1}{L}\frac{\sin\varphi}{r}(-6\xi+6\xi^2) & -\frac{\sin\varphi}{r}(1-4\xi+3\xi^2) & \\
0 & -\frac{k\sin\varphi}{r^2}(1-3\xi^2+2\xi^3)+ & -\frac{k\sin\varphi}{r^2}L(\xi-2\xi^2+\xi^3)+ & -\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}(1-\xi)+ \\
 & +\frac{k}{rL}(-6\xi+6\xi^2) & +\frac{k}{r}(1-4\xi+3\xi^2) & +\frac{\cos\varphi}{rL}\cdot(-1)
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\sin\varphi}{r}\xi & \frac{\cos\varphi}{r}(3\xi^2-2\xi^3) & \frac{\cos\varphi}{r}L(-\xi^2+\xi^3) & \frac{k}{r}\xi \\
-\frac{k}{r}\xi & 0 & 0 & \frac{1}{L}-\frac{\sin\varphi}{r}\xi \\
0 & -\frac{1}{L^2}(6-12\xi) & -\frac{1}{L}(-2+6\xi) & 0 \\
0 & \frac{k^2}{r^2}(3\xi^2-2\xi^3)- & \frac{k^2}{r^2}L(-\xi^2+\xi^3)- & \frac{k\cos\varphi}{r^2}\xi \\
 & -\frac{1}{L}\frac{\sin\varphi}{r}(6\xi-6\xi^2) & -\frac{\sin\varphi}{r}(-2\xi+3\xi^2) & \\
0 & -\frac{k\sin\varphi}{r^2}(3\xi^2-2\xi^3)+ & -\frac{k\sin\varphi}{r^2}L(-\xi^2+\xi^3)+ & -\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}\xi+ \\
 & +\frac{k}{rL}(6\xi-6\xi^2) & +\frac{k}{r}(-2\xi+3\xi^2) & +\frac{\cos\varphi}{rL}
\end{pmatrix} \qquad (3)$$

Надалі при розробці схеми обчислень скористаємося загального вигляду алгоритмом [ 3 ], який застосовується для розв'язання задач оптимізації.

Введемо в розглядання вектор товщин для набору елементів $h=(h_1,h_2,...,h_k)^T$

Функція цілі (маса оболонки) $\phi_0(h)$ та система обмежень такого набору *h* мають вигляд :

$$\phi_0(h)=\sum_{i=1}^{n}m_i h_i \qquad (4)$$

$$\phi(h)=\omega(h)-\omega_0=0 \qquad (5)$$

$$H_i-\Delta H_i\le h_i\le H_i+\Delta H_i\ ,i=1,\dots,n \qquad (6)$$

$$m_i=2\pi L_i y_i^*\rho_i$$

де $H=(H_1,H_2,...,H_n)$ - початковий розподіл товщин, $\Delta H_i\ ,i=1,\dots,n$ - задані відхилення, $L_i$ - довжина елемента, $y_i^*$ - ордината середини елемента, $\rho_i$ - густина, $\omega(h)$ - частота для заданого $h$, $\omega_0=\omega(H)$ - задана стала частота.

Для реалізації методу проекції градієнта [ 2 ] систему обмежень ( 9 ) запишемо у вигляді:

$$\phi_i = h_i - H_i - \Delta H_i \le 0\,,(i=1,\dots,n) \quad \text{- нижні обмеження} \tag{7}$$

$$\phi_i = H_i - h_i - \Delta H_i \le 0\,,(i=n+1,\dots,2n) \quad \text{- верхні обмеження} \tag{8}$$

Таким чином, задача оптимізації приведена до вигляду, коли треба мінімізувати функцію $\phi_0(h)$ при обмеженнях

$$\phi(h)=0 \tag{9}$$

$$\phi_i(h)\le 0\,,(i=1,\dots,2n) \tag{10}$$

Для організації алгоритму треба обчислити матриці

$$l^0, \mathcal{T}, U, V \quad \text{де} \; l_0 = \left(\frac{\partial \phi^0}{\partial h}\right)^T \quad \mathcal{T} = \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial h}\right)^T \quad U = \mathcal{T}^T \cdot l^0\,,\; V = \mathcal{T}^T \cdot \mathcal{T}\,, \tag{11}$$

де $\tilde{\phi}(h) = \begin{pmatrix} \phi(h) \\ [\phi_j(h)] \end{pmatrix}$ для $\phi_j(h) \ge -\varepsilon$ ( так звані $\varepsilon$ - активні обмеження).

Для розглядуваної задачі $l^0 = (m_1,\dots,m_n)^T$ -сталий вектор, $\frac{\partial \phi(h)}{\partial h} = (c_1,\dots,c_n)$ - вектор, який входить у набір для $\mathcal{T}$, знаходиться для деякого набору $h$ - чисельним способом. На певному кроці нехай знайдено $\varepsilon$ - активних обмежень p верхніх та q нижніх. Кожне з цих обмежень відповідає певному значенню товщини $h_i$ елемента оболонки. Для спрощення обчислень перенумеруємо товщини та номери функцій обмежень так, щоб першими йшли p верхніх, а далі -q нижніх. При цьому так звані глобальні номери товщин запам'ятовуються.

Таким чином у новій нумерації змінних (товщин) потрібні матриці будуть мати вигляд:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} c_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_p & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ c_{p+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{p+q} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \mathcal{T}^T \cdot \mathcal{T} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} c_i^2 & c_1 & \dots & c_p & -c_{p+1} & \dots & -c_{p+q} \\ c_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_p & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -c_{p+1} & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -c_{p+q} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$U = \mathcal{T}^T \cdot l^0 = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i c_i, m_1, \dots, m_p, -m_{p+1}, \dots, m_{p+q}\right)^T \tag{13}$$

Для організації обчислень потрібна матриця, обернена до $V$, яка має вигляд

$$V^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1 & -c_1 & \dots & -c_p & c_{p+1} & \dots & c_{p+q} \\ -c_1 & c_1^2+\Delta & \dots & c_1 c_p & -c_1 c_{p+1} & \dots & -c_1 c_{p+q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -c_p & c_p c_1 & \dots & c_p^2+\Delta & -c_p c_{P+1} & \dots & -c_p c_{p+q} \\ c_{p+1} & -c_{p+1} c_1 & \dots & -c_{p+1} c_p & c_{p+1}^2+\Delta & \dots & c_{p+1} c_{p+q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{p+q} & -c_{p+q} c_1 & \dots & -c_{p+q} c_p & c_{p+q} c_{p+1} & \dots & c_{p+q}^2+\Delta \end{pmatrix}, \tag{14}$$

де $\Delta = \sum_{i=p+q+1}^{n} c_i^2$

Визначивши $\mu_1, \mu_2$ за формулами $\mu_1 = -V^{-1} \cdot U$ , $\mu_2 = -V^{-1} \cdot \Delta\tilde{\phi}$ , одержимо

$$\delta h^1 = l^0 + \gamma\mu_1, \qquad \delta h^2 = -\gamma\mu_2, \quad \gamma = -\frac{l^{0T}\delta h^1}{2\Delta\phi_0}, \qquad \delta h = -\frac{1}{2\gamma}\delta h^1 + \delta h^2,$$

де $\Delta\phi = (-\phi(h^0), -\phi_1(h^0), ..., -\phi_{p+q}(h^0))$.

Величину $\gamma$ пропонується знаходити тільки на першій ітерації, $\Delta\phi_0$ - зменшення на 5-25 % величини $\phi_0$ . Якщо деякі компоненти $\mu = \mu_1 + 2\gamma\mu_2$ , які відповідають $\varepsilon$ - активним обмеженням, від'ємні, то відповідне $\phi_i$ вилучається із списку $\varepsilon$ - активних і алгоритм виконується спочатку.

Поліпшене наближення до оптимального розв'язку запишеться у вигляді $h^1 = h^0 + \delta h$ . Якщо величина $\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\delta h_i^1\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ достатньо мала, то робота алгоритму закінчується.

Для запропонованої обчислювальної схеми була розроблена програма на мові Фортран. Була розглянута циліндрична оболонка довжиною $l$ =0,3м, радіуса $R$ =0,075м, яка жорстко защемлена на торцях і має такі фізичні та механічні параметри : модуль Юнга E=19,6·10$^{10}$ н/м$^2$, коефіцієнт Пуассона $\nu$ =0,3, густина $\rho$ =7,7·10$^3$ кг/м$^3$, початкові товщини $H_i$ =0,25·10$^{-3}$ м., задана частота коливань для початкових товщин $\omega_0$ рад/сек для заданої кількості хвиль в окружному напряму k наведена в таблиці 1, величина $\varepsilon$ спочатку задавалась рівною $\varepsilon$ =0,2·10$^{-5}$ м, величини $\Delta H_i$ =0,1·10$^{-3}$ м, кількість елементів – 10.

Внаслідок симетрії в таблиці 1 наведені результати обчислення товщин оболонки для різних значень *k* для половини елементів (починаючи з лівого торця). У таблиці також наведені коефіцієнти зменшення маси $k_M$ , які знаходяться як відношення маси оболонки, яка одержана після оптимізації до первинної маси, $\omega_0^*$ означає частоту для остаточного розв'язку.

Таблиця 1.

| | $H_1\cdot10^3$ ( м ) | $H_2\cdot10^3$ ( м ) | $H_3\cdot10^3$ ( м ) | $H_4\cdot10^3$ ( м ) | $H_5\cdot10^3$ ( м ) | $\omega_0$ (рад/сек) | $\omega_0^*$ (рад/сек) | $k_M$ коеф. зменш. маси |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Початкові товщини | 0,25 | 0,25 | 0,25 | 0,25 | 0,25 | | | |
| k=0 | 0,150 | 0,150 | 0,150 | 0,150 | 0,150 | 32901 | 32897 | 0,600 |
| k=1 | 0,150 | 0,150 | 0,150 | 0,150 | 0,150 | 21712 | 21710 | 0,600 |
| k=2 | 0,150 | 0,150 | 0,150 | 0,150 | 0,150 | 12302 | 12301 | 0,600 |
| k=3 | 0,152 | 0,150 | 0,150 | 0,150 | 0,152 | 7544,2 | 7543,6 | 0,604 |
| k=4 | 0,160 | 0,151 | 0,150 | 0,150 | 0,151 | 5102,6 | 5102,0 | 0,610 |
| k=5 | 0,195 | 0,165 | 0,150 | 0,151 | 0,150 | 3920,7 | 3920,1 | 0,649 |
| k=6 | 0,211 | 0,150 | 0,152 | 0,150 | 0,320 | 3593,4 | 3594,0 | 0,787 |
| k=7 | 0,152 | 0,150 | 0,152 | 0,150 | 0,315 | 3896,2 | 3898,1 | 0,735 |
| k=8 | 0,152 | 0,150 | 0,150 | 0,150 | 0,150 | 4625,0 | 4626,3 | 0,773 |

Як видно з результатів обчислень для даного типу закріплення та вибраних значень параметрів нижча частота спостерігається для k=6 і всередині оболонки відбувається значне збільшення товщин елементів.

Для цього випадку також значення коефіцієнта зменшення маси приймає найбільше значення в порівнянні з іншими випадками, тобто найтяжче оптимізувати масу оболонки для нижчої частоти.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Арман Ж.-Л.П. Приложения теории оптимального управления системами. – М.: Мир, 1977. – 142 с.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 544 с.
3. Хог Э., Арора Я. Прикладное оптимальное проектирование. – М.: Мир, 1983. – 480 с.