УДК 539.3

ДЕЙСТВИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НОРМАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ НА УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Приварников А.К., д. ф.-м. н., профессор

Запорожский государственный университет

Пусть на границу упругого однородного изотропного полупространства $z \ge 0$ действует периодическая с периодом $2l$ система сосредоточенных сил. Для определенности будем считать, что силы направлены в отрицательную сторону оси z и приложены к точкам оси x с абсциссами $x = 0, \pm 2l, \pm 4l, \ldots$. Требуется определить напряжения и перемещения в полупространстве. Будем стремиться получить решение рассматриваемой задачи в тригонометрических рядах, удобных для получения численных результатов при помощи ЭВМ.

Исходим из решения в интегралах Фурье вспомогательной задачи о действии одной нормальной сосредоточенной силы Q на упругое полупространство. Это решение несложно получить, подвергнув уравнения теории упругости в перемещениях (уравнения Ламе), граничные условия задачи (при $z = 0$ $\sigma_{xz} = 0$, $\sigma_{zz} = Q\delta(x)\delta(y)$, $\delta(x)$ – функция Дирака; при $z \to \infty$ $\sigma_{xz} \to 0$, $\sigma_{zz} \to 0$) и соотношения закона Гука двумерному преобразованию Фурье по переменным x и y [1]

$$\bar{f}(\xi,\eta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int f(x,y)e^{i(\xi x+\eta y)}dxdy\ .$$

Здесь $\bar{f}(\xi,\eta)$ – трансформанта функции $f(x,y)$. Для трансформант Фурье искомых величин при $Q = 1$ получим такие выражения

$$\overline{\sigma}_{xx}(\xi,\eta,z) = e^{-pz}\left[2\nu + \frac{\xi^2}{p^2}(1-2\nu-pz)\right],\ \overline{\sigma}_{yy}(\xi,\eta,z) = e^{-pz}(1+2\nu-pz) - \overline{\sigma}_{xx},$$

$$\overline{\sigma_{zz}}(\xi,\eta,z) = e^{-pz}(pz+1),\ \overline{\sigma}_{yz} = i\eta z e^{-pz},\ \overline{\tau}_{xz} = i\xi z e^{-pz},$$

$$\overline{\sigma}_{xy} = -\frac{\xi\eta}{p^2}e^{-pz}(pz+2\nu-1),\ 2G\overline{u}_x = -\frac{i\xi}{p^2}e^{-pz}(pz+2\nu-1),$$

$$2G\overline{u}_y = -\frac{i\eta}{p^2}e^{-pz}(pz+2\nu-1),\ 2G\overline{u}_z = -\frac{1}{p}e^{-pz}[pz+2(1-\nu)],$$

где ν – коэффициент Пуассона материала полупространства, E – модуль Юнга, $p = \sqrt{\xi^2+\eta^2}$, $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$.

После использования обратного преобразования Фурье

$$f(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int \bar{f}(\xi,\eta)e^{-i(\xi x+\eta y)}d\xi d\eta$$

и формулы Эйлера $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ искомое решение вспомогательной задачи можно привести к виду

$$\frac{\pi^2}{Q}\sigma_{xx}(x,y,z) = \int_0^{\infty}\cos(\eta y)d\eta\int_0^{\infty}e^{-pz}\left[2\nu+\frac{\xi^2}{p^2}(1-2\nu-pz)\right]\cos(\xi x)d\xi\ ,$$

$$\frac{\pi^2}{Q}\sigma_{yy}(x,y,z)=\int_0^\infty \cos(\eta y)d\eta\int_0^\infty e^{-pz}(1+2\nu-pz)\cos(\xi x)d\xi-\frac{\pi^2}{Q}\sigma_{xx}(x,y,z),$$

$$\frac{\pi^2}{Q}\sigma_{zz}(x,y,z)=\int_0^\infty \cos(\eta y)d\eta\int_0^\infty e^{-pz}(1+pz)\cos(\xi x)d\xi,$$

$$\frac{\pi^2}{Q}\sigma_{yz}(x,y,z)=z\int_0^\infty \eta\sin(\eta y)d\eta\int_0^\infty e^{-pz}\cos(\xi x)d\xi,$$

$$\frac{\pi^2}{Q}\sigma_{xz}(x,y,z)=z\int_0^\infty \cos(\eta y)d\eta\int_0^\infty e^{-pz}\xi\sin(\xi x)d\xi,$$

$$\frac{\pi^2}{Q}\sigma_{xy}(x,y,z)=\int_0^\infty \sin(\eta y)d\eta\int_0^\infty \frac{\xi\eta}{p^2}e^{-pz}(1-2\nu-pz)\sin(\xi x)d\xi,$$

$$\frac{\pi^2}{Q}2G\frac{\partial u_x}{\partial x}=\int_0^\infty \cos(\eta y)d\eta\int_0^\infty \frac{\xi}{p^2}e^{-pz}(1-2\nu-pz)\cos(\xi x)d\xi,$$

$$\frac{\pi^2}{Q}2G\frac{\partial u_y}{\partial x}=\int_0^\infty \sin(\eta y)d\eta\int_0^\infty \frac{\eta}{p^2}e^{-pz}(1-2\nu-pz)\sin(\xi x)d\xi,$$

$$\frac{\pi^2}{Q}2G\frac{\partial u_z}{\partial x}=\int_0^\infty \cos(\eta y)d\eta\int_0^\infty \frac{\xi}{p}[2(1-\nu)+pz]\sin(\xi x)d\xi. \qquad (1)$$

Чтобы перейти к случаю нагружения полупространства периодической системой нормальных сосредоточенных сил, необходимо воспользоваться следствиями из формулы суммирования Пуассона [1]:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{i\xi m}d\xi=2\pi\sum_{m=-\infty}^{\infty}\varphi(2\pi m).$$

Исходя из этой формулы несложно получить более общую

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{\pm i\xi(x-2ml)}d\xi=\frac{\pi}{l}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\varphi\left(\frac{\pi m}{l}\right)e^{\pm\frac{m\pi x}{l}}.$$

Интерес для дальнейшего представляют частные случаи последней формулы:

1) если $\varphi(\xi)$ – четная функция, то

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^\infty\varphi(\xi)\cos[\xi(x-2ml)]d\xi=\frac{\pi}{l}\left[\varphi(0)+2\sum_{m=1}^{\infty}\varphi\left(\frac{\pi m}{l}\right)\cos\frac{\pi mx}{l}\right]; \qquad (2)$$

2) если $\varphi(\xi)$ – нечетная функция, то

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^\infty\varphi(\xi)\sin[\xi(x-2ml)]d\xi=\frac{2\pi}{l}\sum_{m=1}^{\infty}\varphi\left(\frac{\pi m}{l}\right)\sin\frac{\pi mx}{l}. \qquad (3)$$

Основываясь на решении (1) вспомогательной задачи, несложно построить в рядах решение рассматриваемой периодической задачи при помощи принципа независимости действия сил. Приведем только формулу для напряжения $\sigma_{zz}(x,y,z)$, так как формулы для остальных искомых величин подобны ей

$$\frac{\pi^2}{Q}\sigma_{zz}(x,y,z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^\infty\cos(\eta y)d\eta\int_0^\infty e^{-pz}(1+pz)\cos\xi(x-2ml)d\xi.$$

В этой формуле (и ей подобных) можно поменять местами операции интегрирования по η и суммирования по m и получить

$$\frac{\pi^2}{Q}\sigma_{zz}(x,y,z)=\int_0^\infty \cos(\eta y)\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^\infty e^{-pz}(1+pz)\cos\xi(x-2ml)d\xi\right]d\eta .$$

Полученное выражение для напряжения σ_{zz} можно упростить, воспользовавшись следствием (2) из формулы суммирования Пуассона

$$\frac{\pi^2}{Q}\sigma_{zz}(x,y,z)=\frac{\pi}{l}\left[\int_0^\infty e^{-\eta z}(1+\eta z)\cos(\eta y)d\eta+2\sum_{m=-\infty}^{\infty}\cos\frac{\pi m x}{l}\int_0^\infty e^{-p_m z}(1+p_m z)\cos(\eta y)d\eta\right],$$

где $$p_m=\sqrt{\left(\frac{\pi m}{l}\right)^2+\eta^2}\ . \qquad (4)$$

Заметим, что последняя формула для σ_{zz} может быть использована для вычисления на ЭВМ напряжения σ_{zz} в полупространстве для не очень малых значений координаты *z*. При малых значениях *z* погрешность вычисления несобственного интеграла при помощи стандартных программ, основанных на квадратурных формулах Симпсона, Ньютона-Котеса или Гаусса, будет очень велика.

Подобно тому, как была выведена формула для напряжения σ_{zz} в полупространстве, можно получить формулы для напряжений и производных по переменной *x* от перемещений, которые возникают в упругом полупространстве при действии на него периодической системы сил, величиною Q каждая. Силы приложены к точкам границы полупространства, лежащих на оси *x* и имеющих абсциссы $x=0,\pm 2l,\pm 4l,\ldots$. Приведем эти формулы без вывода.

$$\frac{\pi l}{Q}\sigma_{xx}(x,y,z)=2\nu_1\int_0^\infty e^{-\eta z}\cos(\eta y)d\eta+2\sum_{m=1}^{\infty}\cos\frac{m\pi x}{l}\int_0^\infty\left(2\nu_1-\left(\frac{m\pi}{lp_m}\right)^2(p_m z+2\nu_1-1)\right)e^{-p_m z}\cos(\eta y)d\eta ,$$

$$\frac{\pi l}{Q}\sigma_{yy}(x,y,z)=\int_0^\infty e^{-\eta z}(-\eta z+2\nu_1+1)\cos(\eta y)d\eta+2\sum_{m=1}^{\infty}\cos\frac{m\pi x}{l}\int_0^\infty e^{-p_m z}(-p_m z+2\nu_1+1)\cos(\eta y)d\eta ,$$

$$\frac{\pi l}{Q}\sigma_{zz}(x,y,z)=\int_0^\infty e^{-\eta z}(\eta z+1)\cos(\eta y)d\eta+2\sum_{m=1}^{\infty}\cos\frac{m\pi x}{l}\int_0^\infty e^{-p_m z}(p_m z+1)\cos(\eta y)d\eta ,$$

$$\frac{\pi l}{Q}\sigma_{yz}(x,y,z)=z\int_0^\infty \eta e^{-\eta z}\sin(\eta y)d\eta+2\sum_{m=1}^{\infty}\cos\frac{m\pi x}{l}\int_0^\infty e^{-p_m z}\sin(\eta y)d\eta ,$$

$$\frac{\pi l}{Q}\sigma_{xz}(x,y,z)=2z\sum_{m=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi x}{l}\int_0^\infty e^{-p_m z}\frac{m\pi}{l}\cos(\eta y)d\eta ,$$

$$\frac{\pi l}{Q}\sigma_{xy}(x,y,z)=2\sum_{m=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi x}{l}\int_0^\infty \eta\frac{m\pi}{lp_m^2}e^{-p_m z}(p_m z+2\nu_1-1)\cos(\eta y)d\eta ,$$

$$\frac{\pi l}{Q}2G\frac{\partial u_x}{\partial x}=2\sum_{m=1}^{\infty}\cos\frac{m\pi x}{l}\int_0^\infty\left(\frac{m\pi}{lp_m}\right)^2 e^{-p_m z}(p_m z+2\nu_1-1)\cos(\eta y)d\eta ,$$

$$\frac{\pi l}{Q}2G\frac{\partial u_y}{\partial x}=-2\sum_{m=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi x}{l}\int_0^\infty \eta\frac{m\pi}{lp_m^2}e^{-p_m z}(p_m z+2\nu_1-1)\sin(\eta y)d\eta ,$$

$$\frac{\pi l}{Q}2G\frac{\partial u_z}{\partial x}=-2\sum_{m=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi x}{l}\int_0^\infty\frac{m\pi}{lp_m}e^{-p_m z}(-p_m z+2\nu_1-2)\cos(\eta y)d\eta . \qquad (5)$$

Как уже говорилось, несобственные интегралы в этих формулах при малых *z* невозможно вычислить с высокой точностью на ЭВМ, пользуясь стандартными программами вычисления интегралов. Это связано с малой скоростью убывания при $\eta\to\infty$ подынтегральных функций при малых *z*. Поэтому для достижения высокой точности вычисления напряжений и перемещений вблизи поверхности полупространства нужно найти точные значения интегралов

$$S_k = \int_0^\infty \eta e^{-p_m z} p_m^k \sin(\eta y) d\eta,\ C_k = \int_0^\infty e^{-p_m z} p_m^k \cos(\eta y) d\eta,\ k = -2, -1, 0, 1,\ m = 0, 1, 2, \ldots,$$

где величина p_m определена формулой (4), или предложить способ вычисления их на ЭВМ, обеспечивающий требуемую точность вычислений при любых $z \geq 0$.

Четыре интеграла являются табличными [2, с.455]

$$S_{-1} = \frac{m\pi y}{l\sqrt{z^2+y^2}} K_1\left(\frac{m\pi y}{l}\sqrt{z^2+y^2}\right),\ S_0 = \frac{zy(m\pi)^2}{l^2\sqrt{z^2+y^2}} K_2\left(\frac{m\pi y}{l}\sqrt{z^2+y^2}\right),$$

$$C_{-1} = K_0\left(\frac{m\pi y}{l}\sqrt{z^2+y^2}\right),\ C_0 = \frac{m\pi z}{l\sqrt{z^2+y^2}} K_1\left(\frac{m\pi}{l}\sqrt{z^2+y^2}\right),\ m = 1, 2, 3, \ldots.$$

Здесь $K_0(x)$, $K_1(x)$, $K_2(x)$ – функции Макдональда. Вычисление значений этих функций в области $0 < x < \infty$ несложно осуществить при помощи приближенных формул [3, с.200], абсолютная погрешность которых порядка 10^{-7}. Вычисление интегралов S_1, C_1, S_{-2}, C_{-2} можно выполнить на ЭВМ с высокой точностью, если принять во внимание, что

$$S_1 = -\frac{dS_0}{dz},\ C_1 = -\frac{dC_0}{dz},\ S_{-2} = \int_z^\infty S_{-1} dz,\ C_{-2} = \int_z^\infty C_{-1} dz$$

и воспользоваться при этом приближенными формулами для функций $K_0(x)$ и $K_1(x)$. Необходимо при этом учесть, что [2]

$$K_2(x) = \frac{2}{x} K_1(x) + K_0(x),\ \frac{d}{dx} K_0(x) = -K_1(x),\ \frac{d}{dx} K_1(x) = -K_0(x) - \frac{1}{x} K_1(x).$$

Интегралы S_1, C_0, C_1 при $m = 0$, фигурирующие в формулах (5) являются табличными [2].

Итак, все коэффициенты тригонометрических рядов в точном решении (5) рассматриваемой задачи о действии периодической системы сосредоточенных сил на упругое полупространство можно вычислить при помощи ЭВМ для любых значений координаты z с высокой точностью. Из свойств функций Макдональда при $x \to \infty$ вытекает, что при $m \to \infty$ все коэффициенты рядов с экспоненциальной скоростью стремятся к нулю. поэтому для приближенного вычисления искомых величин в полупространстве достаточно ограничиться вычислением частичных сумм рядов с небольшим числом слагаемых.

Полученное точное решение задачи о действии периодической системы нормальных сосредоточенных сил на упругое полупространство можно использовать для построения решений других задач о действии периодических нормальных нагрузок на упругое полупространство. Для этого необходимо воспользоваться принципом независимости действия сил.

ЛИТЕРАТУРА

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1976. – 512 с.
2. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Марычев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука, 1981. – 800 с.
3. Справочник по специальным функциям / Под ред. Абрамовиц Н., Стиган И. – М.: Наука, 1979. – 832с.