УДК 517

МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАНЬ У НЕОДНОРІДНИХ ДВОВИМІРНИХ БАГАТОЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЯХ ЗА ДОПОМОГОЮ ОБ'ЄКТНОЇ МОДЕЛІ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Пожуєв В.І., д.ф.-м.н., професор, Тарасов С.А., аспірант

Запорізька державна інженерна академія

ВСТУП

Ця стаття є ілюстрацією до застосування об'єктно-орієнтованого підходу при розв'язуванні гіперболічної задачі для двовимірної області методом скінченних елементів (МСЕ) у рамках розподіленого об'єктного обчислювального середовища, описаного в [1].

У статті продемонстроване використання механізму спадкування і поліморфного поводження об'єктів [2] при реалізації МСЕ для гіперболічної задачі [3] на основі реалізації методу для задачі теплопровідності [3,4] на прикладі розв'язування задачі, описуваної хвильовим рівнянням для кусочно-однорідної двовимірної багатозв'язної області.

Опис компонентної об'єктної моделі системи, у рамках якої, як наповнення, реалізований МСЕ, і модель даних, на основі якої здійснена інтеграція компонентів системи, наведені в [1].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо квадратну координатно-орієнтовану пластину з двома еліптичними отворами, границя одного з яких підкріплена матеріалом із властивостями, відмінними від властивостей матеріалу пластини (рис. 1). Від краю першого отвору до центра пластини розташований розріз у вигляді замкнутої ламаної, покликаний моделювати тріщину (рис. 1). Слід зазначити, що в даному прикладі мова йде тільки про ілюстрацію коливань пластини при наявності змін геометрії області унаслідок виникнення тріщини.

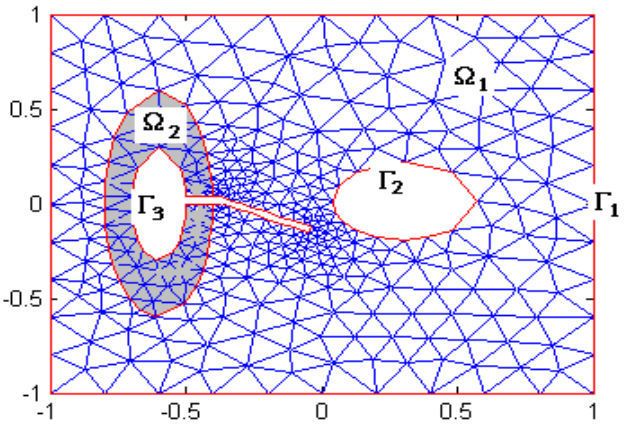


Рис.1. Геометрія області та сітка скінченних елементів

Запишемо математичне формулювання задачі з використанням безрозмірних змінних [3,5]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial \hat{u}}{\partial y}\right)-\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}=0 \text{ у } \Omega, \quad (1)$$

$$\hat{u}=0 \text{ на } \Gamma_u, \quad k\frac{\partial \hat{u}}{\partial n}=0 \text{ на } \Gamma_q, \quad (2)$$

$$\hat{u}(x,y,t_0)=\operatorname{arctg}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) \quad \text{(рис.3)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t_0)=3\sin(\pi x)e^{\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)} \quad \text{(рис.4),(3)}$$

де $\Omega = \Omega_2 \cup \Omega_1$ - область задачі, $\Gamma_u = \Gamma_1\big|_{x=\pm 1}$ – границя, на якій задані істотні граничні умови, $\Gamma_q = \Gamma_1\big|_{y=\pm 1} \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ – границя, на якій задані природні граничні умови, $k = c^2(x,y) = \begin{cases} 1, (x,y) \in \Omega_2 \\ 0.1, (x,y) \in \Omega_1 \end{cases}$ – параметр, зумовлений щільністю матеріалу (рис.2).

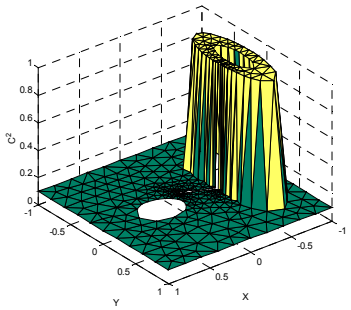


Рис.2. Карта властивостей матеріалу

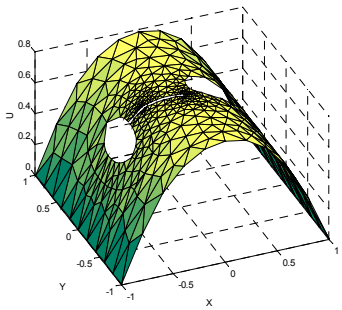


Рис 3. Початкові умови ($U_0 = U(x, y, t_0)$)

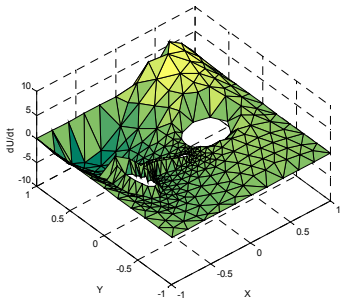


Рис 4. Початкові умови ($Ut_0 = dU/dt(x, y, t_0)$)

РЕАЛІЗАЦІЯ МСЕ

Розв'язок задачі (1)-(3) будемо шукати за допомогою методу скінченних елементів [3,4], рівняння якого отримані за методом зважених нев'язань з наступним переходом до ослабленого формулювання за допомогою формули Гріна [3,4,5].

Таким чином, нехай u – наближений розв'язок задачі (1)-(3), тобто $\hat{u} \approx u$. Наближений розв'язок будемо шукати у вигляді:

$$u = \sum_{m=1}^{M} a_m(t) N_m(x, y) , \tag{4}$$

де M – кількість точок сітки, $a_m(t)$ – коефіцієнти апроксимації, $N_m(x,y)$ – базисні функції, що залежать від координат.

Підставляючи (4) у (1), мінімізуючи помилку, що виникає в результаті такої підстановки, за методом зважених нев'язань і переходячи до ослабленого формулювання [3,4,5], одержимо систему звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) щодо коефіцієнтів апроксимації:

$$\sum_{m=1}^{M} a_m \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_l}{\partial x} k \frac{\partial N_m}{\partial x} + \frac{\partial N_l}{\partial y} k \frac{\partial N_m}{\partial y} \right) d\Omega + \sum_{m=1}^{M} \frac{\partial^2 a_m}{\partial^2 t} \int_{\Omega} N_m N_l d\Omega = \int_{\Gamma_q} \bar{q} N_l d\Gamma , \tag{5}$$

де $l = 1..M$, N_l – вагарні функції за методом Гальоркіна [3,4], $\bar{q} = \bar{q}(x, y, t)$ - природні граничні умови (у розглянутій задачі – нульові), істотні граничні умови задовольняються точно при формуванні матриці системи (5) [3,5].

Виконуючи дискретизацію керуючих рівнянь МКЭ (5) [3,4], приходимо до наступної системи ЗДР, записаної в матричній формі (припускаючи постійний крок за часом):

$$\mathbf{K}(x, y)\mathbf{a} + \mathbf{C}(x, y)\frac{\mathbf{d}^2\mathbf{a}}{\mathbf{dt}^2} = \mathbf{f}(x, y, t), \tag{6}$$

де коефіцієнти визначаються формулами:

$$K_{lm} = \sum_{e} \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial N_l}{\partial x} k \frac{\partial N_m}{\partial x} + \frac{\partial N_l}{\partial y} k \frac{\partial N_m}{\partial y} \right) d\Omega , \; C_{lm} = \sum_{e} \int_{\Omega^e} N_m N_l d\Omega , \; f_l = \sum_{e} \int_{\Gamma_q^e} \bar{q} N_l d\Gamma , \tag{7}$$

у яких підсумовування ведеться по скінченних елементах (границі й області), а інтегрування виконується по області елемента. Звичайно для заповнення матриці системи використовується процедура ансамблювання [3,4], що виключає обчислення сум по всіх елементах для кожного коефіцієнта.

Для розв'язування системи необхідно виконати дискретизацію системи за часом із кроком Δt методом скінченних елементів чи за допомогою скінченних різниць [3], наприклад:

$$\mathbf{A}\mathbf{a}_{n+1} - 2\mathbf{B}\mathbf{a}_n + \mathbf{B}\mathbf{a}_{n-1} = \mathbf{F} , \tag{8}$$

де $\mathbf{a}_n = \mathbf{a}(t_0 + n\Delta t)$, $\mathbf{F} = \mathbf{f}(x, y, t)$, $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{C}(x, y)}{\Delta t^2} + \frac{2}{3}\mathbf{K}(x, y)$, $\mathbf{B} = \frac{\mathbf{C}(x, y)}{\Delta t^2} + \frac{1}{3}\mathbf{K}(x, y)$. (9)

Для запуску процесу обчислень необхідно виконати:

$a_0 = u(x_m, y_m, t_0)$, $a_1 = a_0 + \frac{\partial u(x_m, y_m, t_0)}{\partial t}\Delta t$, де точка з координатами (x_m, y_m) є вузлом сітки скінченних елементів.

Порівнюючи отриманий розв'язок з розв'язком за допомогою МСЕ параболічного рівняння [4] об'єктну модель універсального скінчено-елементного "розв'язувача" можна представити у вигляді такої ієрархії класів [2], описаної на псевдомові:

*абстрактний клас "*Двовимірний МСЕ":

методи:

"Ансамблювати"("Опис геометрії") - *віртуальний, абстрактний;*

"Обчислити"("Кількість кроків") - *віртуальний, абстрактний;*

"Обчислити Розв'язок" - *віртуальний, абстрактний;*

*кінець опису "*Двовимірний МСЕ".

*клас "*Еліптична Задача" - *нащадок "*Двовимірний МСЕ":

властивості:

A - матриця системи; F - вектор правої частини;

методи:

конструктор();

K(l, m); F(l) - *віртуальний*;

"Ансамблювати"("Опис геометрії") - *замість базового:*

ансамблювання матриці A і вектора F на підставі "Опису геометрії", використовуючи K(l,m), F(l);

кінець "Ансамблювати";

"Обчислити"("Кількість кроків"=1) - *замість базового:*

обчислити і запротоколювати " Обчислити Розв'язок";

кінець "Обчислити";

"Обчислити Розв'язок" - *замість базового:*

Результат = $A^{-1}F$;

кінець " Обчислити Розв'язок".

*кінець опису "*Еліптична Задача".

клас "Параболічна Задача" - *нащадок "*Еліптична Задача":

властивості:

"Розв'язок" - розв'язок на попередньому кроці; B - матриця системи; Δt - крок за часом;

методи:

конструктор(Δt =Δt, "Розв'язок"=U_0);

K(l, m); F(l) - *наслідуваний*;

C(l, m); - *віртуальний;*

"Ансамблювати"("Опис геометрії") - *замість базового:*

обчислити базовий "Ансамблювати"("Опис геометрії");

доповнення елементів матриці A, використовуючи З(l,m);

ансамблювання матриці B на підставі "Опису геометрії", використовуючи K(l,m), C(l,m);

кінець "Ансамблювати";

"Обчислити"("Кількість кроків") - *замість базового:*

итераційно *обчислити базовий* "Обчислити"(1);

кінець "Обчислити";

" Обчислити Розв'язок" - *замість базового:*

Результат = A^{-1}(B·Розв'язок)+F;

кінець " Обчислити Розв'язок".

кінець опису "Параболічна Задача".

клас "Гіперболічна Задача" - *нащадок* "Параболічна Задача":

властивості:

"Попередній Розв'язок" - розв'язок на кроці n-1;

методи:

конструктор(Δt =Δt, "Попередній Розв'язок"= U_0; "Розв'язок"= U_0+Δt·Ut_0);

C(l, m);K(l, m); F(l) - *наслідуваний*;

"Ансамблювати"("Опис геометрії") - *наслідуваний;*

"Обчислити"("Кількість кроків") - *наслідуваний;*

" Обчислити Розв'язок" - *замість базового:*

Результат = = A^{-1}(2B·"Розв'язок"-B·"Попередній Розв'язок"+F);

"Попередній Розв'язок" = "Розв'язок";

кінець " Обчислити Розв'язок".

кінець опису "Гіперболічна Задача".

ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ

На підставі приведеної моделі зроблений розрахунок на інтервалі часу від 0 до 5 з постійним кроком Δt = 0.01, результати якого приводяться нижче.

Для реалізації крокового за часом процесу була використана абсолютно стійка щодо величини кроку схема (8). Чисельний експеримент, однак, показав, що для гіперболічних рівнянь ця схема придатна для обчислень на невеликому інтервалі часу від початку процесу з відносно малим кроком, тому що навіть невелике збільшення кроку за часом різко знижує точність обчислень, а на великих відстанях від початкового моменту часу коливання загасають, що не передбачається постановкою задачі.

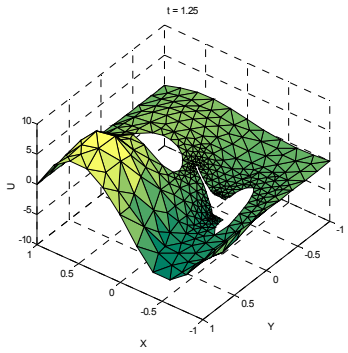


Рис.5. Загальний вигляд розв'язку при t = 1.25

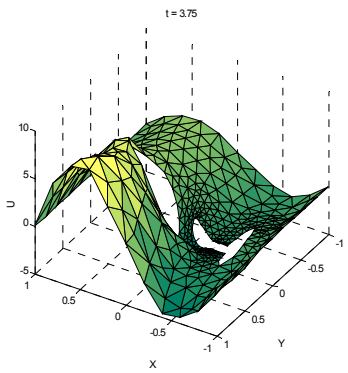


Рис.6. Загальний вигляд розв'язку при t = 3.75

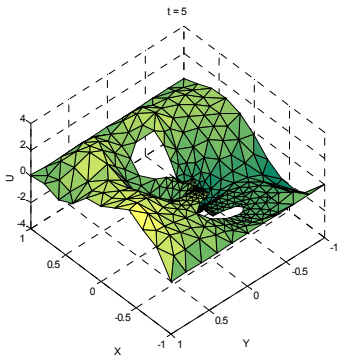


Рис.7 Загальний вигляд розв'язку при t = 5

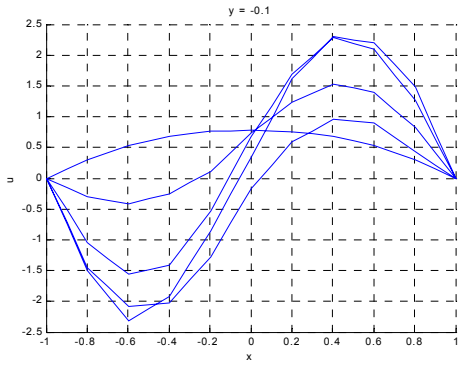


Рис.8. Розв'язок при y = -0.1 для моментів часу t = 0;1.25;2.5;3.75;5

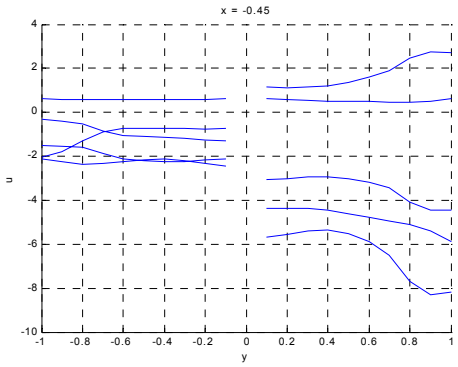


Рис.9. Розв'язок при x = -0.45 для моментів часу t = 0;1.25;2.5;3.75;5

ЛІТЕРАТУРА

1. Пожуєв В.І., Тарасов С.А. Об'єктна модель структури та форрисьної мови системи – оболонки для Розв'язок задач математичної фізики чисельними методами.//Вісник Запорізького державного

університету: Збірник наукових статей. – Запоріжжя: Запорізький державний університет, 2000. – №2, – С: 109-114.

2. Booch, G. Object oriented design with applications. Menlo Park, CA: Benjamin/Cummings, 1991.
3. О. Зенкевич, К. Морган Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1984 – 318с.
4. Пожуєв В.І., Тарасов С.А. Аналіз розподілу температури в багатозв′язних неоднорідних двомірних середовищах за допомогою методу скінченних елементів.//Вісник Запорізького державного університету: Збірник наукових статей. – Запоріжжя: Запорізький державний університет, 2000, С: 99-106.
5. Бенерджи П., Прадип К., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984 – 494 с.