УДК 517

# МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ХВИЛІ В ПОЧАТКОВІ МОМЕНТИ ЧАСУ У ДВОМІРНИХ СЕРЕДОВИЩАХ ПРИ НАЯВНОСТІ ТРІЩИНИ

Пожуєв В.І., д.ф.-м.н., професор, Сорока Д.М., аспірант

*Запорізька державна інженерна академія*

**Математична модель.** Задача описується таким диференціальним рівнянням:

$$\nabla^2 u(x,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, \qquad x \in \Omega, \tag{1}$$

із граничними умовами такого вигляду:

$$u(x,t) = \overline{u}(x,t), \qquad x \in \Gamma_1, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial n} = \overline{q}(x,t), \qquad x \in \Gamma_2,$$

і початковими умовами типу:

$$u(x,t) = u(x,t_0), \qquad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,t_0)}{\partial t}, x \in \Omega$$

Застосуємо до рівняння метод зважених нев'язань і одержимо таке співвідношення:

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t_F}\int_{\Omega}\left[\nabla^2 u(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\right]\omega(\xi,x,t_F,t)\,d\Omega(x)\,dt = \\
&= \int_{t_0}^{t_F}\int_{\Gamma_2}\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial n(x)} - \overline{q}(x,t)\right]\omega(\xi,x,t_F,t)\,d\Gamma(x)\,dt - \\
&- \int_{t_0}^{t_F}\int_{\Gamma_1}[u(x,t) - \overline{u}(x,t)]\frac{\partial\omega(\xi,x,t_F,t)}{\partial n(x)}\,d\Gamma(x)\,dt
\end{aligned} \tag{4}$$

Далі, зінтегрувавши за частинами,спростивши та привівши подібні, одержимо крайове рівняння:

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t_F}\int_{\Omega}\left[\nabla^2\omega - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}\right]u\,d\Omega\,dt + \int_{\Omega}\frac{1}{c^2}\left[u\frac{\partial\omega}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\omega\right]\Bigg|_{t_0}^{t_F} d\Omega = \\
&= \int_{t_0}^{t_F}\int_{\Gamma_2} u\frac{\partial\omega}{\partial n}\,d\Gamma\,dt + \int_{t_0}^{t_F}\int_{\Gamma_1}\overline{u}\frac{\partial\omega}{\partial n}\,d\Gamma\,dt - \int_{t_0}^{t_F}\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial n}\omega\,d\Gamma\,dt - \int_{t_0}^{t_F}\int_{\Gamma_2}\overline{q}\,\omega\,d\Gamma\,dt
\end{aligned} \tag{5}$$

Розглянемо фундаментальний розв'язок, що задовольняє таким умовам:

$$\nabla^2\omega(\xi,x,t_F,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\omega(\xi,x,t_F,t)}{\partial t^2} + \Delta(\xi,x)\Delta(t_F,t) = 0 \tag{6}$$

$$\omega(\xi,x,t_F,t) = 0, \qquad c(t_F - t) < |x - \xi| \tag{7}$$

Підставивши цей фундаментальний розв'язок в (5) і зробивши граничний перехід при $t$, що прагне до $t_F$, одержимо:

$$-u(\xi,t)-\int_{\Omega}\frac{1}{c^2}\left[u(x,t_0)\frac{\partial\omega(\xi,x,t_F,t_0)}{\partial t}-\frac{\partial u(x,t_0)}{\partial t}\partial\omega(\xi,x,t_F,t_0)\right]d\Omega(x)=$$
$$=\int_{t_0}^{t_F}\int_{\Gamma}u(x,t)\frac{\partial\omega(\xi,x,t_F,t)}{\partial n}d\Gamma(x)dt-\int_{t_0}^{t_F}\int_{\Gamma}\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\omega(\xi,x,t_F,t)d\Gamma(x)dt \tag{8}$$

Далі будемо розглядати розв'язок з нульовими початковими умовами $u(x,t_0)=0$ і $\frac{\partial u(x,t_0)}{\partial t}=0$. Тому і граничні умови в початковий момент часу теж повинні бути нульовими. Запишемо крайове формулювання за таких умов і для випадку інтерполяції за часом і простором постійними функціями. Нехай інтервал часу ділиться на $F$ кроків, а межа розбивається на $N$ елементів:

$$c_i u_F^i+\sum_{n=1}^{N}\sum_{f=1}^{F}u_f^n\int_{\Gamma_1}\int_{t_{f-1}}^{t_f}\frac{\partial\omega}{\partial n}dtd\Gamma=\sum_{n=1}^{N}\sum_{f=1}^{F}\frac{\partial u}{\partial n}^n{}_f\int_{\Gamma_1}\int_{t_{f-1}}^{t_f}\omega dtd\Gamma \tag{9}$$

чи в матричній формі:

$$\sum_{f=1}^{F}\mathbf{H}_{fF}\mathbf{U}_f=\sum_{f=1}^{F}\mathbf{G}_{fF}\mathbf{Q}_f \tag{10}$$

Для двомірного випадку фундаментальний розв'язок має вигляд [1]:

$$\omega(\xi,x,t_F,t)=\frac{c}{2\pi\left(c^2(t_F-t)-r^2\right)^{0.5}}H\left(c(t_F-t)-r\right) \tag{11}$$

$$\frac{\partial\omega(\xi,x,t_F,t)}{\partial n}=\left(\frac{c}{2\pi\left(c^2(t_F-t)-r^2\right)^{1.5}}H\left(c(t_F-t)-r\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{c}{2\pi r\left(c^2(t_F-t)-r^2\right)^{0.5}}\Delta\left(c(t_F-t)-r\right)\right)r\frac{\partial r}{\partial n} \tag{12}$$

$$r=|x-\xi|=\sqrt{(x_x-\xi_x)^2-(x_y-\xi_y)^2},$$

$$r\frac{\partial r}{\partial n}=(x_x-\xi_x)n_x-(x_y-\xi_y)n_y \tag{13}$$

Відповідні коефіцієнти матриць розраховуються за таким формулами:

$$g_{fF\,ij}=\frac{\ell}{2}\sum_{k=0}^{m}\int_{t_{f-1}}^{t_f}\omega dt \tag{14}$$

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f}\omega dt=\begin{cases}0 & \tau<t_{f-1}\\ iG(t_f)-iG(t_{f-1}) & \tau>t_f\\ -\frac{1}{2\pi}\ln(r)-iG(t_{f-1}) & t_{f-1}\le\tau\le t_f\end{cases} \tag{15}$$

$$iG(t)=-\frac{1}{2\pi}\ln\left(c(t_F-t)+\sqrt{c^2(t_F-t)^2-r^2}\right)$$

$$h_{fF\,ij} = \begin{cases} 0.5 & i = j \\ \dfrac{\ell}{2}\sum_{k=0}^{m}\int_{t_{f-1}}^{t_f}\dfrac{\partial\omega}{\partial n}dt & i <> j \end{cases} \qquad (16)$$

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f}\frac{\partial\omega}{\partial n}dt = \begin{cases} 0 & \tau < t_{f-1} \\ iH(t_f) - iH(t_{f-1}) & \tau > t_f \\ -iH(t_{f-1}) & t_{f-1} \le \tau \le t_f \end{cases}$$

$$iH(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{c(t_F - t)}{r^2\sqrt{c^2(t_F - t)^2 - r^2}}r\frac{\partial r}{\partial n}$$

$$\tau = \frac{c(t_F - t)}{r},\ r = \left|x(j,k) - x_i\right|,\ r\frac{\partial r}{\partial n} = \left(x(j,k)_x - x_{i_x}\right)n_{j_x} + \left(x(j,k) - x_{i_y}\right)n_{j_y} \qquad (17)$$

де $\ell = \sqrt{dx_j^2 + dy_j^2}$ – довжина елемента, $x(j,k) = \left(cx_j + \gamma_k dx_j/2, cy_j + \gamma_k dy_j/2\right)$, $\left(cx_j, cy_j\right)$ - центр елемента, а $\left(dx_j, dy_j\right)$ – проекції елемента на координатні осі, $n_j = \left(-dy_j/\ell, dx_j/\ell\right)$ – нормаль до елемента, $\gamma_k$ – координата $k$ -ой точки в схемі чисельного інтегрування по Гаусу.

Особливо варто звернути увагу на розмір кроку за часом і розмір елемента, оскільки вони взаємно обмежують один одного. Умова (7) вимагає, щоб за термін одного кроку за часом хвиля проходила відстань, що дорівнює лінійному розміру крайового елемента (як мінімум), інакше фундаментальний розв'язок дорівнюватиме нулю і матриця для СЛАУ буде виродженою. Таким чином, знизу крок за часом обмежений співвідношенням швидкості хвилі і розміром елемента. Зверху крок за часом обмежує частота коливання, але, оскільки ця величина невідома, то його можна визначити тільки експериментально.

**Програмна модель.** У статтях [2], [3] була детально розглянута модель об'єктно-орієнтованого опису задач для методу крайових елементів. Однак, при використанні бібліотеки, що реалізує цю модель, треба писати код на якій-небудь мові програмування, причому в основному цей код використовується для *опису* задачі, а не для її розв'язку. Використання універсальної мови програмування для такої мети представляється досить громіздким і незручним. Тому і виникає задача у використанні чи створенні іншої, більш зручної мови для опису задачі. Як така була обрана стекова мова Forth (Форт) [4]. У цій мові існує набір слів, з кожним з яких зв'язана визначена функція, що змінює стек. Цей стек використовується для передачі параметрів між словами. Слова ж зберігаються в спеціальній структурі – словнику. У стандарт мови входять слова, що дозволяють додавати нові словники до вже існуючих і, тим самим, розширювати мову і додавати в неї нові можливості.

З іншої сторони сучасний підхід до розробки і написання програмного забезпечення має на увазі використання тієї чи іншої компонентної моделі, коли існує відносно проста, як правило, интерпретована /скрипт/мова для зв'язку і керування компонентами і стандарт на інтерфейс, за допомогою якого компоненти надають свої послуги. Прикладами таких розробок можуть слугувати VisualBasic/COM, Perl з динамічними модулями, Java/CORBA. У Форту аналогічними компонентними властивостями володіють словники. Тому була розширена семантика слів, що завантажують нові словники так, щоб вони здійснювали пошук словників у спеціально складених бібліотеках, що завантажуються динамічно. У такий спосіб, тепер бібліотека являє собою набір компонент - один базовий компонент, що надає сервісні функції (робота з пам'яттю, увід/вивід, базові математичні функції тощо) і компоненти, що містять реалізацію об'єктно-орієнтованої моделі для визначеного класу задач. Такий підхід дає масу переваг, оскільки відокремлює опис задачі від реалізації методу розв'язку. Наприклад, для одержання переваг від використання паралельних обчислень, досить замінити компоненту розв'язку в шляхах пошуку Форту, на компонент із реалізацією відповідних алгоритмів. Після чого, без зміни опису задачі на Форту, при обчисленні автоматично буде використовуватися саме цей компонент. Крім того, для написання компонентів може використовуватися інша мова, наприклад,універсальна мова типу C/C++.

**Результати розрахунків.** Разглянемо, як впливає тріщина на коливання на границі області. Для цього, розрахуємо дві задачі: із тріщиною та еталонну і порівняємо отримані розв'язки, подібно до того, як це робилося в [3].

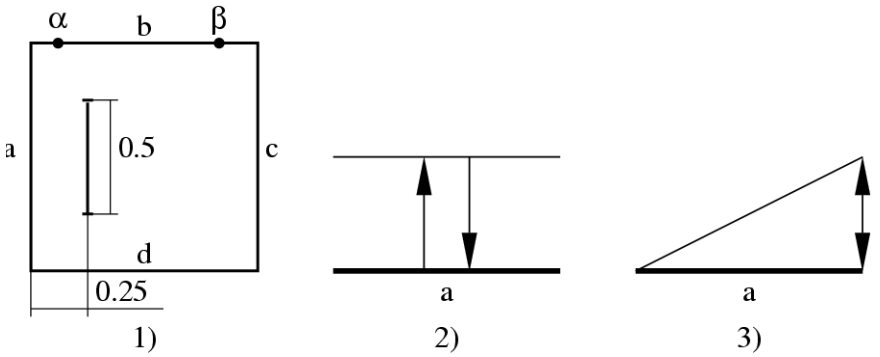



Рис. 1. Тіла, що моделюються.

Розрахунок будемо робити для одиничного квадрата (рис. 1.1). Швидкість хвилі $c = 1$, кількість крайових елементів – по 15 для кожної сторони, крок за часом – 0.1, кількість кроків – 300. Для точок $\alpha$ з координатами (1,0.12) і $\beta$ - (1,0.83) побудуємо графіки залежностей $u(t)$. На рисунках 2-4 наведені графіки для таких граничних умов:

- коливання межі $a$ (як на рис. 1.2) без закріплених меж

$$u_a(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right), \qquad \frac{\partial u}{\partial n_b} = \frac{\partial u}{\partial n_c} = \frac{\partial u}{\partial n_d} = 0$$

- коливання межі $a$ (як на рис. 1.3) з однією закріпленою межою $d$

$$u_a(t) = y\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right), \quad u_d = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n_b} = \frac{\partial u}{\partial n_c} = 0$$

- коливання межі $a$ (як на рис. 1.3) з двома закріпленими межами $d$, $c$

$$u_a(t) = y\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right), \quad u_d = u_c = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n_b} = 0$$

Як видно з графіків, наведена схема розв'язку методом крайових елементів може бути застосовна тільки на початкових етапах часу, після чого розв'язок починає розгойдуватися. Причому, чим більше закріплених границь, тим пізніше це відбувається. Наявність тріщини погіршує розв'язок, оскільки приносить у задачу додаткові незакріплені межі. Крім того, вона змінює і частоту, і амплітуду коливань.

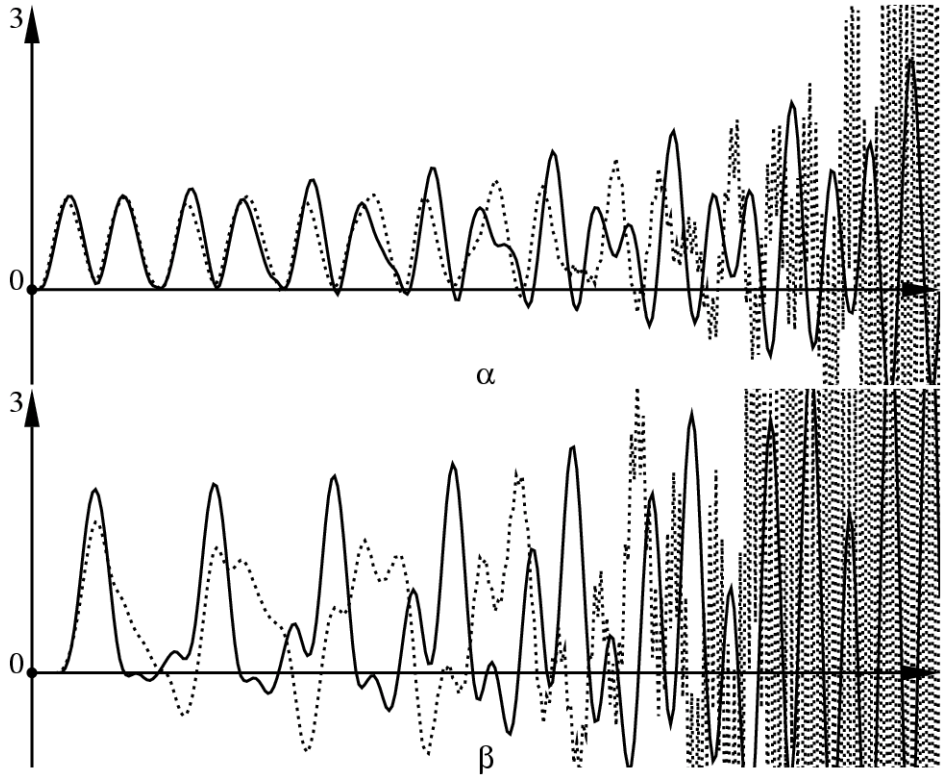



Рис. 2. Коливання точок $\alpha$ , $\beta$ без закріплених меж.

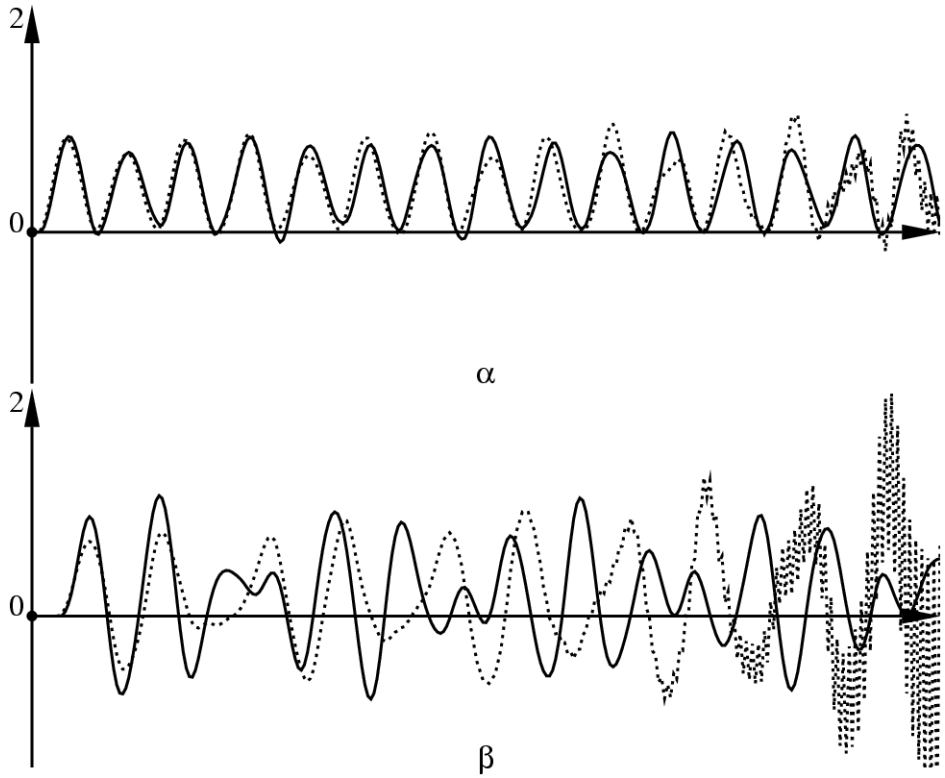



Рис. 3. Коливання точок $\alpha$ , $\beta$ з однією закріпленою межею.

**Висновки**. Запропонована компонентна схема реалізації об'єктно-орієнтованої моделі бібліотеки для розв'язку задач методом крайових елементів на основі мови Форт має ряд переваг: незалежність коду опису задачі від коду реалізації, можливість швидкої заміни компонент-розв'язувачів на інші без зміни коду опису задачі, реалізація компонент-розв'язувачів на іншій (не Форт) мові програмування.

Тріщина впливає на форму коливань – відбуваються зміни як частоти, так і амплітуди, причому положення точки істотно не впливає на величину цих змін. Незакріплені межі погано впливають на якість розв'язок – чим їх більше, тим раніш починає його розгойдувати.

## ЛІТЕРАТУРА


1. Бреббия К., Вроубел Л., Теллес Ж. Методы граничных элементов. — М.:Мир, 1986 . — 547 с.
2. Пожуєв В.І., Сорока Д.М. Об'єктно-орієнтоване програмування при моделюванні теплового процесу в пластині з тріщиною.//Вісник ЗДУ: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. Біологічні науки, 2000. — № 1. — С. 94-99.
3. Пожуєв В.І., Сорока Д.М. Математичне моделювання процесу діагностики тріщин у тілах за допомогою аналізу крайового розподілу температури.//Вісник ЗДУ: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. Біологічні науки, 2000. — № 2. — С. 105-109.
4. ANSI/IEEE X3.215-1994 American National Standard for Information Systems – Programming Languages – Forth.
5. Баранов С.Н., Ноздрунов Н.Р. Язык Форт и его реализации.– Л.: Машиностроение, 1988. – 231 с.