УДК 519.85

МОДЕЛЮВАННЯ ТА МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ РОЗМІЩЕННЯ МНОГОГРАННИКІВ

*Панкратов О.В., к.т.н., с.н.с., Новожилова М.В., д.ф.-м.н., професор

*Інститут проблем машинобудування ім.А.М.Підгорного НАН України

Харківський державний технічний університет будівництва й архітектури

У даній статті розглянуто модель многогранника, так званий P-об'єкт, застосування якої дозволяє побудувати швидкий евристичний метод розв'язання оптимізаційної $3D$-задачі розміщення многогранників, яка, незважаючи на своє важливе практичне значення, поки що є малодослідженою.

1. ОСНОВНІ ВИЗНАЧЕННЯ І ВЛАСТИВОСТІ *P*-ОБ'ЄКТІВ

Визначення 1. Назвемо P-об'єктом об'єднання скінченної кількості I прямокутних паралелепіпедів E_i, $i = 1,2,...,I$, що мають таку властивість

$$int\, E_i \bigcap int\, E_j = \varnothing, i, j = 1,2,...,I, i \neq j.$$

вершини яких лежать у вузлах просторової сітки із кроками dx, dy і dz відповідно осям координат, а габаритні розміри дорівнюють $(k_i * dx) \times dy \times dz$, де $k_i \geq 1$ - ціле число.

Визначення 2. Назвемо прямокутні паралелепіпеди E_i, $i = 1,2,...,I$, що входять до складу P-об'єкта, його елементами.

Кожний елемент E с діагональними вершинами $(k_1 * dx, j * dy, i * dz)$ і $(k_2 * dx, (j+1) * dy, (i+1) * dz)$ може бути однозначно заданий цілочисельним вектором $e = (c_1, c_2, c_3, c_4) = (k_1, k_2, j, i)$. Таким чином, всі операції над елементами P-об'єктів можуть бути виконані за допомогою операцій над цілими числами.

Визначення 3. Назвемо P-внутрішньою частиною об'єкта S - $P_{int}(S)$ - максимальний за об'ємом P-об'єкт, що належить S.

Визначення 4. Назвемо P-контейнером об'єкта S - $P_{con}(S)$ - мінімальний за об'ємом P-об'єкт, що містить S.

Визначення 5. Назвемо P- апроксимацією об'єкта S - $P_{app}(S)$ - будь-який P-об'єкт, що включає в себе $P_{int}(S)$ і належить $P_{con}(S)$.

Для довільних P-об'єктів S_1 і S_2 об'єкти $S_1 \cup S_2$, $cl(S_1 / S_2)$ і $cl(int\, S_1 \cap int\, S_2)$ також є P-об'єктами.

Один P-об'єкт належить другому, якщо кожний з елементів першого P-об'єкта належить деякому елементу другого P-об'єкта. Перевірка належності одного елемента другому зводиться до операцій порівняння цілих чисел, тому перевірка належності одного P-об'єкта іншому P-об'єкту зводиться до набору операцій порівняння цілих чисел, причому достатньо перевіряти тільки елементи, для яких збігаються значення c_3, c_4 векторів, що їх задають. Два P-об'єкти не перетинаються, якщо попарно не перетинаються їхні елементи. Перевірка умов неперетину P-об'єктів може бути, як і в попередньому випадку, зведена до набору операцій порівняння цілих чисел для елементів, у яких збігаються значення c_3, c_4 векторів, котрі їх задають.

2. ПОБУДОВА PINT(S), PCON(S) і PAPP(S)

Обмежимося розглядом побудови $P_{int}(S)$, $P_{con}(S)$ і $P_{app}(S)$ для опуклих многогранників. Нехай є заданим деякий опуклий многогранник S. Найпростіший спосіб побудови $P_{app}(S)$ складається з побудови множини відрізків $\{O_{ij}\}$, які є перетинанням об'єкта S і набору прямих L_{ij}, перпендикулярних площині YOZ і заданих перетинаннями площин вигляду $\{z = i*dz;\ y = j*dy\}$, де i, j – цілі числа.

Кожному відрізку O_{ij} із вершинами $(a_{ij}, j*dy, i*dz)$ і $(b_{ij}, j*dy, i*dz)$, $a_{ij} \le b_{ij}$, може бути поставлений у взаємооднозначну відповідність елемент E_{ij} об'єкта $P_{app}(S)$, заданий вектором $([a_{ij}/dx + 0.5], [b_{ij}/dx + 0.5], i, j)$, де $[a]$ - ціла частина числа a.

Побудова кожного з елементів $P_{con}(S)$ об'єкта вимагає рішення двох задач лінійного програмування:

Задача 1.
min (x),
$p=(x, y, z) \in S_{ij}$

Задача 2.
max (x),
$p=(x, y, z) \in S_{ij}$,

де множина S_{ij} має вигляд

$$\begin{cases} p=(x, y, z) \in S \\ y \ge j*dy \\ z \ge i*dz \\ y \le (j+1)*dy \\ z \le (i+1)*dz. \end{cases}$$

Нехай результат розв'язання першої задачі дорівнює a_{ij}, другий - b_{ij}.

Відповідний елемент E_{ij} об'єкта $P_{con}(S)$ визначається вектором $(|a_{ij}/dx|, |b_{ij}/dx|, i, j)$ де $[b]$ - округлення числа *b* до цілого, причому $[b] \ge b$. При побудові елемента E_{ij} об'єкта $P_{con}(S)$ може виявитися, що $|a_{ij}/dx| = |b_{ij}/dx|$, тоді $E_{ij} = \varnothing$.

Кількість вершин многогранника S_{ij} не є великою, тому розв'язувати ці задачі доцільно звичайним перебором його вершин. Вершини многогранника S_{ij} можуть бути трьох типів:

- збігатися з вершинами $s_k = (x_k, y_k, z_k)$ багатогранника *S* при
$$j*dy \le y_k \le (j+1)*dy, \quad i*dz \le z_k \le (i+1)*dz;$$
- лежати на перетинанні ребер многогранника *S* і однієї з площин
$$z = i*dz;\ \ y = j*dy;\ \ z = (i+1)*dz;\ \ y = (j+1)*dy.$$
- належати перетину граней *S* і однієї з прямих, які задаються перетином площин
$$z = k*dz,\ k=i,i+1;\ \ y = m*dy,\ m=j,j+1.$$

Елемент E_{ij} об'єкта $P_{int}(S)$ задається вектором $(|a_{ij}/dx|, |b_{ij}/dx|, i, j)$, де a_{ij}, b_{ij} можна визначити як відповідно максимальне серед мінімальних і мінімальне серед максимальних значень x - координат кінців відрізків, утворених перетинанням із *S* прямих, які є перпендикулярними площині *YOZ* і проведені через вершини многогранної множини S_{ij}.

3. РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ ПОСЛІДОВНО-ПООДИНОКОГО РОЗМІЩЕННЯ ДЛЯ P-ОБ'ЄКТІВ

Як відомо, метод послідовно-поодинокого розміщення зводиться до розміщення об'єктів в області розміщення по одному. Для P-об'єктів доцільно використовувати підхід, при якому інформація про область розміщення модифікується після розміщення чергового об'єкта. Нехай на i-му кроці провадиться розміщення P-об'єкта P_i у P-об'єкті - області розміщення T_i (на першому кроці T_1 збігається з вихідною областю розміщення). Нехай P_i містить K компонент A_k^i, а об'єкт T_1 - M компонент B_m^i.

Процес розміщення об'єкта P_i складається з трьох етапів.

Перший етап складається з побудови множини

$$G_i = \bigcap_{k=1}^{k} \bigcup_{m=1}^{M} G_{km}^i \qquad (1)$$

припустимих положень центра власної системи координат (полюса) об'єкта P_i в області розміщення T_i, де G_{km}^i - множина припустимих положень полюса об'єкта A_k^i при його розміщенні в об'єкті B_m^i.

Зауваження. G_i - це система відрізків, кожен з яких є перпендикулярним площині YOZ і належить множині D_i усіх припустимих положень полюса об'єкта P_i в області розміщення T_i. При розміщенні P-об'єктів доцільно обмежитися розглядом множини G_i, бо остання містить у собі усі вершини множини D_i, а об'єкт P_i, очевидно, завжди транслюється так, щоб його полюс збігся з вершиною D_i.

2. Вибір вектора $t_i \in G_i$ трансляції об'єкта P_i, який задає оптимальне положення об'єкта $P_i(t_i)$ за певним критерієм;

3. Побудова області $T_{i+1} = cl(T_i \setminus P_i(t_i))$.

Особливістю розміщення P-об'єктів є те, що немає необхідності будувати всю множину G_i, а досить побудувати ту її частину, у якій може знаходитися оптимальне положення полюса T_i. Для задач оптимізації довжини висоти зайнятої частини області розміщення це - елементи з мінімальним значенням четвертої компоненти вектора $e = (c_1, c_2, c_3, c_4)$.

На **другому етапі** з отриманої множини G_i необхідно вибрати одну точку, що задає вектор трансляції t_i. Взагалі може бути обрана будь-яка вершина будь-якого відрізка з множини G_i.

На **третьому етапі** робиться досить проста процедура перебудови області розміщення шляхом модифікації її елементів, що включили в себе елементи тільки що розміщеного об'єкта.

Особливостями методу послідовно- поодинокого розміщення для P-об'єктів є такі:

- Метод дозволяє гнучко варіювати співвідношення "якість рішення - витрати обчислювальних ресурсів" шляхом зміни кроків сітки dy і dz (крок dz може бути обраний довільно). Метод дає наближені розв'язки і є достатньо ефективним у комплексі з методами локальної оптимізації [1].
- Метод відрізняється високою швидкодією, тому що більшість виконуваних у ході обчислення операцій - операції порівняння цілих чисел.
- Метод легко реалізується, бо не включає трудомістких процедур типу побудови перетинання многогранних областей, перевірки належності точки певній многогранній області тощо.
- Тільки при використанні P_{con} об'єктів, які розміщуються, і P_{int} області розміщення метод дозволяє гарантувати влучення в область припустимих рішень вихідної задачі.
- Застосування інших P-зображень об'єктів, які розміщуються, і області розміщення дозволяє одержати рішення, у середньому кращі за значенням висоти зайнятої частини області розміщення,

але отриманий розв'язок може лежати за межами області припустимих розв'язків вихідної задачі. В останньому випадку необхідно використовувати процедуру корекції, що дозволяє побудувати припустимий розв'язок з неприпустимого.

ЛІТЕРАТУРА

1. Элементы теории геометрического проектирования / Гиль Н.И., Яковлев С.В., Новожилова М.В., Панкратов О.В. и др.: Под ред. акад. НАН Украины Рвачева В.Л.-К.:Наук.думка, 1995. - 248с.