УДК 539.3

АВТОМАТИЗАЦИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГО ПЛАСТИЧЕСКИХ ШЕСТИУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН

Назиров Ш.А., к.ф.-м.н., доцент, Каримова В.А., аспирант

Институт кибернетики (г. Ташкент)

Автоматизация решения задачи устойчивости выполняется по схеме модель-алгоритм-программа. В качестве математической модели выбирается следующее нелинейное дифференциальное уравнение [1-2]:

$$\left(1-\frac{3}{4}\frac{1-\psi-R}{1-\psi}\frac{\sigma_x^2}{\sigma_i^2}\right)\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+2\left(1-\frac{3}{4}\frac{1-\psi-R}{1-\psi}\left(\frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_i^2}+2\frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_i^2}\right)\right)\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2}+$$
$$+\left(1-\frac{3}{4}\frac{1-\psi-R}{1-\psi}\frac{\sigma_y^2}{\sigma_i^2}\right)\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}-\frac{2}{3}\frac{1-\psi-R}{1-\psi}\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_i}\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_i}\frac{\partial^4 W}{\partial x^3\partial y}+\frac{\sigma_y}{\sigma_i}\frac{\partial^4 W}{\partial x\partial y^3}\right)- \qquad (1)$$
$$-\frac{h}{(1-\psi)D}\left(\sigma_x\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+2\sigma_{xy}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}+\sigma_y\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)=0$$

при соответствующих краевых условиях, зависящих от способов закрепления краев пластины.

Здесь $D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ - цилиндрическая жесткость пластинки;

E- модуль упругости материала; ν- коэффициент Пуассона, причем в упругом случае ν=0.3, в упругопластическом - ν= 0.5;

R - обобщенный модуль Кармана, равный

$$R=\frac{4E_k}{\left(\sqrt{E}+\sqrt{E_k}\right)^2}, \qquad (2)$$

где $E_k=\frac{d\sigma_i}{de_i}$ - касательный модуль;

$\sigma_i=\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_x\sigma_y+\sigma_y^2+3\sigma_{xy}^2}$ - интенсивность напряжений;

$e_i=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{e_x^2+e_xe_y+e_y^2+\frac{1}{4}e_{xy}^2}$ - интенсивность деформаций;

$$\psi=\omega\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{R}\right)\left[\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{R}\right)^2+\frac{3}{4}\frac{R}{1-\left(1-\frac{R}{2}\right)\omega}\right];$$

$$\omega=1-\frac{E_c}{E}=1-\frac{1}{E}\frac{\sigma_i}{e_i}$$

$E_c = \frac{\sigma_i}{e_i}$ - секущий модуль.

Алгоритм расчета построен при совместном применении методов Бубнова-Галеркина и R-функций Рвачева В.Л. [2].

Непосредственное применение метода Бубнова-Галеркина к решению уравнения (1) приводит к вычислительным сложностям. Поэтому используя способ, примененный в [3,4], получим:

$$\tilde{A}\vec{u} - \lambda\tilde{B}\vec{u} = 0 \tag{4}$$

здесь
$$\tilde{A} = \{a_{ij}\} = a_{ij}^{y} - a_{ij}^{пл} \tag{5}$$

$$\tilde{B} = \{b_{ij}\} = b_{ij}$$

$$\vec{u}_{ij} = \{u_i\}$$

λ - наименьшее критическое значение, подлежащее определению;

$$a_{ij}^{y} = \frac{1}{G}\iint_G P_{ij}dG,\ a_{ij}^{пл} = \frac{1}{G}\iint_G P_{ij}^{*}dG,\ b_{ij} = \iint_G R_{ij}dG, \tag{6}$$

$$P_{ij} = (\chi_{4,i} + \nu\chi_{6,i})\chi_{4,j} + (\chi_{6,i} + \nu\chi_{4,i})\chi_{6,j} + 2(1-\nu)\chi_{5,i}\chi_{5,j} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} P_{ij}^{*} = {} & r_1\chi_{4,i}\chi_{4,j} + r_2\chi_{6,i}\chi_{6,j} + r_1r_2(\chi_{6,i}\chi_{4,j} + \chi_{4,i}\chi_{6,j}) + r_1r_3\left(2\chi_{5,i}\chi_{4,j} + \frac{1}{\nu}\chi_{4,i}\chi_{5,j}\right) + \\ & + r_2r_3\left(2\chi_{5,j}\chi_{6,j} + \frac{1}{\nu}\chi_{6,i}\chi_{5,j}\right) + r_3(\chi_{2,i}\chi_{1,j} + \chi_{1,i}\chi_{2,j}) \end{aligned} \tag{8}$$

$r_1=1$, $r_2=r_3=0$, если пластинка сжата усилиями σ_x;

$r_2=1$, $r_1=r_3=0$, если пластинка сжата усилиями σ_y;

$r_1=r_2=1$, $r_3=0$, если пластинка сжата усилиями σ_x и σ_y и т.д.

$$\chi_{1,i} = \gamma\frac{\partial\varphi_i}{\partial x},\ \chi_{2,i} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial y},\ \chi_{4,i} = \gamma^2\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2},\ \chi_{5,i} = \gamma\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x\partial y},\ \chi_{6,i} = \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial y^2},\ \gamma = \frac{a}{b}.$$

Для вычисления двухкратных интегралов была использована n-точечная формула Гаусса [5].

Минимальное критическое значение λ найдено при помощи QL-метода [6].

Формирование элементов матрицы и решения разрешающих уравнений осуществляется при помощи комплекса программ, приведенных в [7].

То есть структура ПК для исследования устойчивости пластин сложных конфигураций состоит из следующих блоков:

1. Блок типов и констант.
2. Вычисления значений базисных полиномов (степенные, тригонометрические, полином Чебышева и т.д.) и их производных n-го порядка.
3. Вычисления значений R-функций и их производных нужного порядка.
4. Генерация точек и соответствующих им узлов и весов для численного интегрирования.
5. Вычисления значений систем координатных функций и их производных n-го порядка.
6. Алгебра матриц (умножение матриц, вычисление определителей, нахождений обратной матрицы и т.д.).
7. Нахождение собственных значений и векторов.
8. Оформление результатов расчета.

Каждый блок КП состоит из нескольких модулей, оформленных в виде процедур и функций. Из этих модулей созданы библиотеки подпрограмм. КП реализован на языке TURBO PASCAL 7.0 в среде MS DOS для персональных компьютеров.

При формировании элементов матрицы при упругопластическом расчете применяются следующие процедуры и функции:

Процедура VARPL предназначена для формирования матриц A и B. Обращение к процедуре имеет вид: VARPL(G) ; здесь G=0, если решается упругопластическая задача, G=1, если решается упругая задача. В процедуре VARPL используются следующие процедуры-функции для вычисления правой и левой частей, определяющих уравнение рассматриваемой задачи - FB и FA и FPL;

Обращение к функциям имеет вид:

FA(vi,vj,mu): real,

FB(vi,vj,T1,T2,T3): real,

FPL(vi,vj,T1,T2,T3): real,

где vi,vj - значения координатных функций;

T1,T2 и T3 - значения, равные 1 или 0 в зависимости от усилий, действующих на пластину: для усилий σ_x - T1=1, T2=T3=0; для усилий σ_y - T2=1, T1=T3=0; для усилий σ_x и σ_y - T1=T2=1, T3=0 и т.д.

Для решения задачи об устойчивости упругопластических пластин используется процедура TELOPRG. Обращение к процедуре имеет вид TELOPRG(np,nk,ntoch,pc2,pol,ob,nn), где np - порядок дифференцирования; nk - максимальный порядок полинома; ntoch- количество узлов Гаусса; pc2[1..4] - задает информацию вида:

pc2[1]-x_{min}; pc2[2]-x_{max}; pc2[3]-y_{min}; pc2[4]-y_{max}; pol - выбор

полинома; ob - выбор области; nn - выбор краевого условия.

Тестовый пример: Рассмотрим задачу об устойчивости равномерно сжатых жестко защемленных шестиугольных пластин (рис.1).

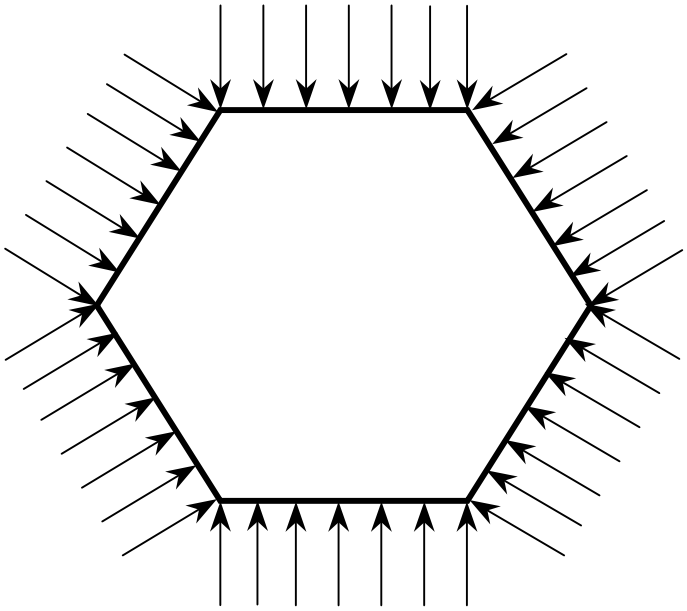


Рис.1

В качестве координатной последовательности, удовлетворяющей краевым условиям, примем:

$$W = \omega^2 \Phi , \qquad (10)$$

где ω вычисляется по формуле:

$$\omega = \left(F_1 \wedge_0 F_3\right) \wedge_0 \left(F_4 \wedge_0 F_5\right) \wedge_0 F_2 ,$$

где $F_1 = \frac{\left(\sqrt{3} - \sqrt{3}x - y\right)}{2}$; $F_2 = \frac{\left(\frac{3}{4} - y^2\right)}{\sqrt{3}}$; $F_3 = \frac{\left(\sqrt{3} + \sqrt{3}x - y\right)}{2}$;

$F_4 = \frac{\left(\sqrt{3} + \sqrt{3}x + y\right)}{2}$; $F_5 = \frac{\left(\sqrt{3} - \sqrt{3}x + y\right)}{2}$.

В качестве материала пластинки взят дюралюминий. При построении координатных функций используется полином Чебышева.

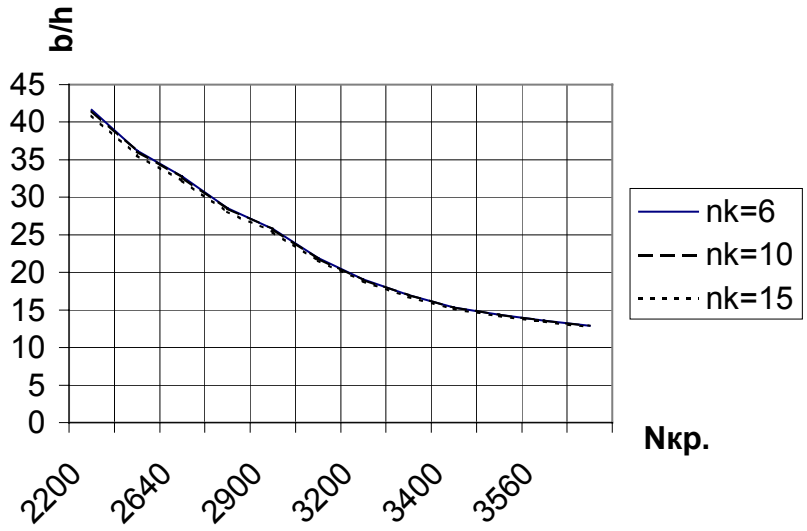


Рис. 2

На рис.2 изображена зависимость между критическим усилием $N_{кр}$ и отношением b/h для шестиугольной пластинки, подвергающейся равномерному сжатию по направлению x и y и жестко защемленной по всем краям. Здесь показаны кривые при различных значениях координатных функций NK=6, NK=10 и NK=15 при n=20.

Исходя из этих зависимостей определяются величины b/h для критических усилий, лежащих выше предела пропорциональности $\sigma_{пр}$ (для данного материала $\sigma_{пр}$ = 2000 кг/см^2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А.А. Пластичность. Гостехиздат, 1948.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем.- М.: Наука, 1967.-984 с.
3. Рвачев В.Л., Курпа Л.В. R-функции в задачах теории пластин. К.: Наукова думка, 1987.
4. Буриев Т. Расчет тонких плит на ЭВМ. ФАН, 1976.
5. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. - М.: Наука, 1967.
6. Уилкинсон Райнш. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. - М.: Машиностроение, 1976.
7. Назиров Ш.А., Пискорский Л.Ф. Комплекс программ для расчета и оптимизации пластинчатых конструкций сложных конфигураций //Алгоритмы. -Ташкент, 1995. -Вып.80. - С.41-54.