УДК 512.2

ПРОСТОРОВІ СХЕМИ ВИПАДКОВИХ БЛУКАНЬ У МУЛЬТИПЛЕКСАХ

Манойленко О.С., аспірант, Колесникова Н.В., аспірант, Хомченко А.Н., д.ф.-м.н., професор

Херсонський державний технічний університет

У роботі розглядаються питання, пов'язані з випадковими блуканнями. Удосконалення правил випадкових блукань дозволяє виконати конкретний перехід від блукань по вузлах цілочислової решітки до блукань по області скінченного елемента. Нові правила складаються з того, що частинка починає блукати з будь-якої точки елемента і переходить у вузол з імовірністю, яка залежить від положення старту частинки. У ролі перехідних імовірностей виступають базисні функції, а скінченно-елементна апроксимація набуває форм середнього винагородження за вихід блукаючої частинки у вузол. Таке трактування випадкових блукань дає цілий ряд переваг у порівнянні із традиційними підходами[1-5]. Наприклад, з'являється можливість прямої побудови базису скінченного елемента на основі геометричної імовірності. При знаходженні середнього винагородження отримаємо точні значення імовірностей переходу, виключивши необхідність моделювання довгих серій статистичних досліджень. Це значно зменшує обсяг обчислювальної роботи. У статті показані обчислювальні формули методу барицентричного усереднення для тривимірних задач. У ролі обчислювального шаблону використовується куб, який має 8 вузлів на границі.

СФОРМУЛЮЄМО ВИЗНАЧЕННЯ:

1. Вузол будемо називати поглинаючим, якщо частинка, яка потрапила в цей вузол, залишається в цьому вузлі з імовірністю одиниця.
2. Вузол будемо називати ідеально відбиваючим, якщо частинка, яка потрапила в цей вузол, залишається в цьому вузлі з імовірністю нуль та з імовірністю одиниця повертається в точку старту.
3. Вузол будемо називати неідеально поглинаючим (або неідеально відбиваючим), якщо частинка, яка потрапила в цей вузол, залишається в цьому вузлі з імовірністю N_i , або повертається у точку старту з імовірністю $1 - N_i$, де i = 1, 2, 3, 4,...,8.

Розглянемо модель тривимірного мультиплекса (рис. 1) з поглинаючими вузлами. Обчислювальна формула запишеться у вигляді

$$U(M) = U_1N_1 + U_2N_2 + U_3N_3 + ... + U_8N_8.$$

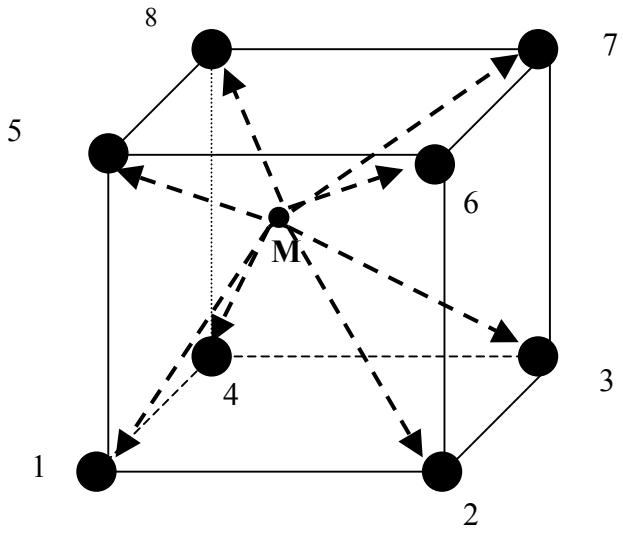


Рис. 1 Модель тривимірного мультиплекса з поглинаючими вузлами

Модель тривимірного мультиплекса з поглинаючими вузлами (1,2,3,...,7) та ідеально відбиваючим вузлом (8).

Сформулюємо правила випадкових блукань для тривимірного мультиплекса з поглинаючими вузлами 1,2,3,...,7 і відбиваючим вузлом 8.

Блукаюча частка стартує з довільної точки M тривимірного мультиплекса і з імовірністю $N_i(i=1,2,3,...,8)$ переходить у вузол i. При потраплянні частинки у вузол 1 (або 2,3,..,7) вона залишається в цьому вузлі з імовірністю одиниця, а при потраплянні у вузол 8 частинка з імовірністю одиниця повертається у точку M. Для виведення обчислювальної формули методу барицентричних координат використовуються теореми додавання та множення імовірностей випадкових подій. Середня винагорода за вихід блукаючої частинки у вузол дорівнює

$$U(M) = p_1U_1 + p_2U_2 + p_3U_3 + ... + p_7U_7, \qquad (1)$$

де $p_1, p_2, p_3, ..., p_7$ – перехідні імовірності, $U_1, U_2, U_3, ..., U_7$ – граничні значення функції.

Імовірність переходу з точки M у вузол 1 можна визначити за формулою:

$$p_1 = p(M \to 1) = N_1 + N_1N_8 + N_1N_8^2 + ... = N_1 \sum_{\omega=0}^{\infty} N_8^{\omega}.$$

Імовірність переходу з точки M у вузол 2

$$p_2 = p(M \to 2) = N_2 + N_2N_8 + N_2N_8^2 + ... = N_2 \sum_{f=0}^{\infty} N_8^{f}.$$

Імовірність переходу з точки M у вузол 3

$$p_3 = p(M \to 3) = N_3 + N_3N_8 + N_3N_8^2 + ... = N_3 \sum_{q=0}^{\infty} N_8^{q}.$$

Імовірність переходу з точки M у вузол 7

$$p_7 = p(M \to 7) = N_7 + N_7N_8 + N_7N_8^2 + ... = N_7 \sum_{r=0}^{\infty} N_8^{r}.$$

Аналогічно визначається імовірність переходу з точки M у вузли 4, 5, 6.

Через $\omega(f,q,r)$ позначено число відображень у вузлі 8 для частинок, які поглинаються першим (другим, третім, сьомим) вузлами тривимірного мультиплекса. Тут ми маємо справу з неперервно спадною геометричною прогресією $(0 \le N_8 \le 1)$. Повертаючись до формули (1), запишемо

$$U(M) = U_1N_1 \sum_{\omega=0}^{\infty} N_8^{\omega} + U_2N_2 \sum_{f=0}^{\infty} N_8^{f} + U_3N_3 \sum_{q=0}^{\infty} N_8^{q} + ... + U_7N_7 \sum_{r=0}^{\infty} N_{8,}^{r}$$

або, використовуючи формулу суми членів неперервно спадної геометричної прогресії, маємо

$$U(M) = \frac{U_1N_1 + U_2N_2 + U_3N_3 + ... + U_7N_7}{N_1 + N_2 + N_3 + ... + N_7}.$$

Модель тривимірного мультиплекса з поглинаючими вузлами (1,2,3,...,7) та неідеально відбиваючим вузлом (8).

Розглянемо тривимірний мультиплекс (1,2,3,…,8), де вузли 1,2,3,…7 - поглинаючі, а вузол 8 - неідеально відбиваючий. Правила випадкових блукань сформулюємо таким чином: частинка стартує з довільної точки M тривимірного мультиплекса і з імовірністю $N_i(i=1,2,3,...,8)$ переходить у вузол i. При потраплянні частинки у вузол 1 (або 2,3,..,7) вона залишається в цьому вузлі з імовірністю одиниця, а при потраплянні у вузол 8 частинка з імовірністю N_8 залишається в цьому вузлі, або з імовірністю $1-N_8$ повертається у точку M. Для виведення обчислювальної формули методу барицентричних координат використовуються теореми додавання та множення імовірностей випадкових подій. Середня винагорода за вихід блукаючої частинки у вузол дорівнює

$$U(M) = p_1U_1 + p_2U_2 + p_3U_3 + ... + p_8U_8 \qquad (2)$$

Імовірності переходу з точки M у вузли 1, 2, 3, 8 визначаються відповідно за формулами (3), (4), (5), (6)

$$p_1 = p(M \to 1) = N_1 + N_1N_8(1-N_8) + N_1N_8^2(1-N_8)^2 + ... = N_1 \sum_{s=0}^{\infty}(N_8 - N_8^2)^s. \quad (3)$$

$$p_2 = p(M \to 2) = N_2 + N_2N_8(1-N_8) + N_2N_8^2(1-N_8)^2 + ... = N_2 \sum_{l=0}^{\infty}(N_8 - N_8^2)^l. \quad (4)$$

$$p_3 = p(M \to 3) = N_3 + N_3N_8(1-N_8) + N_3N_8^2(1-N_8)^2 + ... = N_3 \sum_{t=0}^{\infty}(N_8 - N_8^2)^t. \quad (5)$$

$$p_4 = p(M \to 8) = N_8^2 + N_8^2N_8(1-N_8) + N_8^2N_8^2(1-N_8)^2 + ... = N_8^2 \sum_{g=0}^{\infty}(N_8 - N_8^2)^g \ . \quad (6)$$

Аналогічно визначаються імовірності переходу з точки М у вузли 4,5,6,7.

Ми отримали неперервно спадну геометричну прогресію $(0 \le N_8 - N_8^2 \le 1)$. Таким чином, використовуючи формулу суми членів неперервно спадна геометричної прогресії, та повертаючись до формули (2), маємо

$$U(M) = \frac{U_1N_1 + U_2N_2 + U_3N_3 + ... + U_7N_7 + U_8N_8^2}{N_1 + N_2 + N_3 + ... + N_7 + N_8^2}.$$

Модель тривимірного мультиплекса з поглинаючими вузлами (1,2,3,...,6), ідеально відбиваючим вузлом (7) та неідеально поглинаючим (або неідеально відбиваючим) вузлом (8).

Сформулюємо правила випадкових блукань для тривимірного мультиплекса з поглинаючими вузлами 1,2,3,...,6, ідеально відбиваючим вузлом 7 та неідеально поглинаючим вузлом 8.

Блукаюча частинка стартує з довільної точки М тривимірного мультиплекса і з імовірністю $N_i (i = 1,2,3,...,8)$ переходить у вузол i. При потраплянні частинки у вузол 1 (або 2,3,..,6) вона залишається в цьому вузлі з імовірністю одиниця, при потраплянні частинки у вузол 7 вона з імовірністю 1 повертається в точку старту, а при потраплянні у вузол 8 частинка з імовірністю N_8 залишається в цьому вузлі, або з імовірністю $1 - N_8$ повертається у точку М. Для виведення обчислювальної формули методу барицентричних координат використовуються теореми додавання та множення імовірностей випадкових подій. Середня винагорода за вихід блукаючої частинки у вузол дорівнює

$$U(M) = p_1U_1 + p_2U_2 + p_3U_3 + ... + p_6U_6 + p_8U_8 \quad (7)$$

Визначимо імовірність переходу з точки М у вузол 1 за формулою:

$$p_1 = p(M \to 1) = N_1 + N_1N_7 + N_1N_8(1-N_8) + N_1N_7^2 + N_1N_8^2(1-N_8)^2 +$$
$$+ 2N_1N_7N_8(1-N_8) + N_1N_7^3 + 3N_1N_7^2N_8(1-N_8) + 3N_1N_7N_8^2(1-N_8)^2 +$$
$$+ N_1N_8^3(1-N_8)^3 + ... = N_1 \sum_{n=0}^{\infty}(N_7 + N_8 - N_8^2)^n.$$

Імовірність переходу з точки М у вузол 2

$$p_2 = p(M \to 2) = N_2 + N_2N_7 + N_2N_8(1-N_8) + N_2N_7^2 + N_2N_8^2(1-N_8)^2 +$$
$$+ 2N_2N_7N_8(1-N_8) + N_2N_7^3 + 3N_2N_7^2N_8(1-N_8) + 3N_2N_7N_8^2(1-N_8)^2 +$$
$$+ N_2N_8^3(1-N_8)^3 + ... = N_2 \sum_{m=0}^{\infty}(N_7 + N_8 - N_8^2)^m.$$

Імовірність переходу з точки М у вузол 8

$$p_8 = p(M \to 8) = N_8^2 + N_8^2N_7 + N_8^2N_8(1-N_8) + N_8^2N_7^2 + N_8^2N_8^2(1-N_8)^2 +$$
$$+ 2N_8^2N_7N_8(1-N_8) + N_8^2N_7^3 + 3N_8^2N_7^2N_8(1-N_8) + 3N_8^2N_7N_8^2(1-N_8)^2 +$$
$$+ N_8^2N_8^3(1-N_8)^3 + ... = N_8^2 \sum_{h=0}^{\infty}(N_7 + N_8 - N_8^2)^h.$$

Аналогічно визначаються імовірності переходу з точки М у вузли 3,4,...,6.

Використовуючи формулу суми членів неперервно спадної прогресії, та підставляючи отримані значення у формулу (7), маємо

$$U(M) = \frac{U_1 N_1 + U_2 N_2 + ... + U_6 N_6 + U_8 N_8^2}{N_1 + N_2 + ... + N_6 + N_8^2}.$$

З цієї роботи можна зробити такі висновки:

1. Метод барицентричного усереднення звільняє від необхідності складати та розв'язувати великі системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
2. Нанесення сітки на область, яка досліджується, невиправдано (збільшується розмір задачі, збільшується об'єм зайвої інформації) тому, щоб уникнути цих недоліків, достатньо обчислити характеристики поля в декількох або в одній точці, у цих випадках метод барицентричного усереднення стає більш ефективним.
3. Запропоновані нові обчислювальні формули, у яких вперше використані неідеально поглинаючи вузли (або неідеально відбиваючі вузли), де обчислювальним шаблоном виступає тривимірний мультиплекс, який має 8 вузлів на границі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Лурье И.А., Ляхович Т. П. Применение способа вращения симплекса в стационарных задачах // Тезисы VI Междунар. науч. конф. им. акад. М. Кравчука.-К.:КПИ, 1997.-С.215.
2. Зуб П. М., Лурье И.А., Хомченко А. Н. Симплекс с отражающими узлами для задач эллиптического типа // Автоматика. Автоматизация. Электротехнические комплексы и системы.-1999.-№1(4).-С.131-135.
3. Хомченко А.Н. Прискорений алгоритм методу Монте – Карло розв'язання задачі Діріхле для рівняння Лапласа // Вісник КДУ. Сер. фіз- мат. наук.- 1994.-С.221-223.
4. Хомченко А.Н. Вероятностные схемы в дискретном анализе температурных полей // Инж.- физ. журн. – 1988.- 55, №2.- С. 323-324.
5. Хомченко А.Н. О вероятностном построении базисных функций МКЭ // Ивано-Франк. ин-т нефти и газа, 1982.- 7 с. – Деп в ВИНИТИ 21.10.82 г., №5264.