УДК 517.95+518.517

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В СКРУЧЕННЫХ ЦИЛИНДРАХ ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Максименко-Шейко К.В., инженер, Рвачев В.Л., д.ф.-м.н., академик, Шейко Т.И., д.т.н., профессор

Институт проблем машиностроения им. А.Н.Подгорного НАН Украины (г. Харьков)

К настоящему времени известен ряд ситуаций, в которых трехмерное физическое поле (скалярное, векторное) может быть описано как двумерное. К числу таких полей относятся: осесимметричные трехмерные поля, которые полностью определяются двумерным полем в осевом сечении; поля в цилиндрических телах большой протяженности при неизменных вдоль оси граничных условиях и возбудителях поля; поля на тонких поверхностях, в которых изменением поля по толщине можно пренебречь. В работе рассматривается новый класс трехмерных задач, которые могут быть сведены к двумерным.

Рассмотрим бесконечный цилиндр с образующими, параллельными оси *Oz,* и направляющей $\partial\Omega$, нормализованное уравнение [1] которой в плоскости xOy имеет вид $\omega(x,y)=0$, $\left.\frac{\partial\omega}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=1$, где n — внутренняя, перпендикулярная оси *Oz*, нормаль к $\partial\Omega$. После подстановки $\begin{cases} x \Leftarrow x\cos\alpha z + y\sin\alpha z \\ y \Leftarrow -x\sin\alpha z + y\cos\alpha z \end{cases}$ в уравнение $\omega(x,y)=0$, получим уравнение $\omega(x\cos\alpha z + y\sin\alpha z, -x\sin\alpha z + y\cos\alpha z)=0$ бесконечной винтовой поверхности $\partial\Omega_b$ (Рис.1) с шагом $H=\frac{2\pi}{\alpha}$ и направляющей $\partial\Omega$ [1,2]. Легко убедиться, что уравнение $\omega_1(x,y,z)\equiv\frac{\omega(\hat{x},\hat{y})}{\sqrt{1+\alpha^2\left(\hat{y}\frac{\partial\omega}{\partial\hat{x}}-\hat{x}\frac{\partial\omega}{\partial\hat{y}}\right)^2}}=0$, является нормализованным в 3D, т.е. $\left.\frac{\partial\omega_1}{\partial n_1}\right|_{\partial\Omega_b}=1$, где n_1 — внутренняя нормаль к $\partial\Omega_b$, а $\begin{cases} \hat{x} = x\cos\alpha z + y\sin\alpha z \\ \hat{y} = -x\sin\alpha z + y\cos\alpha z \end{cases}$.

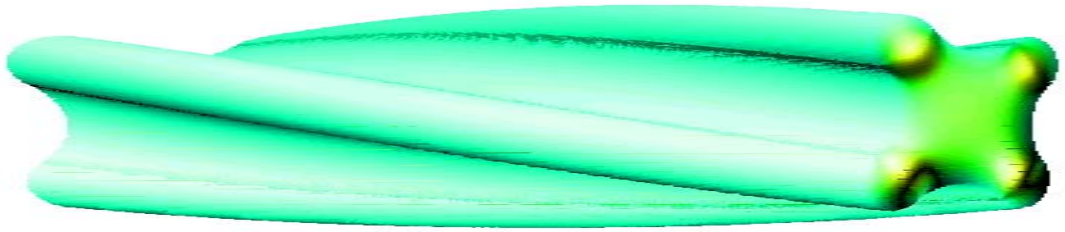


Рис. 1. Фрагмент скрученного цилиндра сложного поперечного сечения, построенный в системе РАНОК.

Рассмотрим уравнение Пуассона

$$-\Delta u \equiv -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=f \qquad (1)$$

в области $\Omega_b=(\omega_1(x,y,z)\geq 0)$ с граничным условием одного из трех видов:

$$u\Big|_{\partial\Omega_b} = \varphi_1; \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n_1}\Big|_{\partial\Omega_b} = \varphi_2; \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n_1} + \sigma u\Big|_{\partial\Omega_b} = \varphi_3, \tag{4}$$

где $f = f\left(x\cos\alpha z + y\sin\alpha z, -x\sin\alpha z + y\cos\alpha z\right),$

$\varphi_1 = \varphi_1\left(x\cos\alpha z + y\sin\alpha z, -x\sin\alpha z + y\cos\alpha z\right),$
$\varphi_2 = \varphi_2\left(x\cos\alpha z + y\sin\alpha z, -x\sin\alpha z + y\cos\alpha z\right),$
$\varphi_3 = \varphi_3\left(x\cos\alpha z + y\sin\alpha z, -x\sin\alpha z + y\cos\alpha z\right),$
$\sigma \equiv \sigma\left(x\cos\alpha z + y\sin\alpha z, -x\sin\alpha z + y\cos\alpha z\right) \geq 0$

Нетрудно убедиться, что при такой зависимости известных функций $f, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \sigma$ от *x,y,z* картина поля при изменении *z* лишь поворачивается на угол αz вокруг оси *Oz*. Это позволяет искать решение в виде:

$$u(x, y, z) = U(\hat{x}, \hat{y}). \tag{5}$$

Подставим (5) в уравнение (1) и граничные условия (3)-(5), попутно производя необходимые вычисления:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \hat{x}}\cos\alpha z + \frac{\partial U}{\partial \hat{y}}(-\sin\alpha z); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \hat{x}}\sin\alpha z + \frac{\partial U}{\partial \hat{y}}\cos\alpha z;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial \hat{x}}(-x\alpha\sin\alpha z + y\alpha\cos\alpha z) + \frac{\partial U}{\partial \hat{y}}(-x\alpha\cos\alpha z - y\alpha\sin\alpha z) = \hat{y}\alpha\frac{\partial U}{\partial \hat{x}} - \hat{x}\alpha\frac{\partial U}{\partial \hat{y}};$$

$$(\nabla u)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = (1+\alpha^2\hat{y}^2)\left(\frac{\partial U}{\partial \hat{x}}\right)^2 + (1+\alpha^2\hat{x}^2)\left(\frac{\partial U}{\partial \hat{y}}\right)^2 - 2\alpha^2\hat{x}\hat{y}\frac{\partial U}{\partial \hat{x}}\frac{\partial U}{\partial \hat{y}}.$$

$$\Delta u \equiv div\nabla u = \left(1+\alpha^2\hat{y}^2\right)\frac{\partial^2 U}{\partial \hat{x}^2} + \left(1+\alpha^2\hat{x}^2\right)\frac{\partial^2 U}{\partial \hat{y}^2} - 2\alpha^2\hat{x}\hat{y}\frac{\partial^2 U}{\partial \hat{x}\partial \hat{y}} - \alpha^2\left(\hat{x}\frac{\partial U}{\partial \hat{x}} + \hat{y}\frac{\partial U}{\partial \hat{y}}\right) \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n_1} = \left(\nabla u \cdot \nabla \omega_1\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \omega_1}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial \omega_1}{\partial z} =$$

$$= \left(\frac{\partial U}{\partial \hat{x}}\cos\alpha z - \frac{\partial U}{\partial \hat{y}}\sin\alpha z\right)\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial \hat{x}}\cos\alpha z - \frac{\partial \omega_1}{\partial \hat{y}}\sin\alpha z\right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial U}{\partial \hat{x}}\sin\alpha z + \frac{\partial U}{\partial \hat{y}}\cos\alpha z\right)\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial \hat{x}}\sin\alpha z + \frac{\partial \omega_1}{\partial \hat{y}}\cos\alpha z\right) + \alpha^2\left(\hat{y}\frac{\partial U}{\partial \hat{x}} - \hat{x}\frac{\partial U}{\partial \hat{y}}\right)\left(\hat{y}\frac{\partial \omega_1}{\partial \hat{x}} - \hat{x}\frac{\partial \omega_1}{\partial \hat{y}}\right) =$$

$$= \left(1+\alpha^2\hat{y}^2\right)\frac{\partial U}{\partial \hat{x}}\frac{\partial \omega_1}{\partial \hat{x}} + \left(1+\alpha^2\hat{x}^2\right)\frac{\partial U}{\partial \hat{y}}\frac{\partial \omega_1}{\partial \hat{y}} - \alpha^2\hat{x}\hat{y}\left(\frac{\partial U}{\partial \hat{x}}\frac{\partial \omega_1}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial U}{\partial \hat{y}}\frac{\partial \omega_1}{\partial \hat{x}}\right)$$

Оператор (6) можно представить в форме:

$$\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial U}{\partial x_k}\right)=\frac{\partial}{\partial\hat{x}}\left[\left(1+\alpha^2\hat{y}^2\right)\frac{\partial U}{\partial\hat{x}}\right]-\alpha^2\frac{\partial}{\partial\hat{x}}\left(\hat{x}\hat{y}\frac{\partial U}{\partial\hat{x}}\right)-\alpha^2\frac{\partial}{\partial\hat{y}}\left(\hat{x}\hat{y}\frac{\partial U}{\partial\hat{y}}\right)+\frac{\partial}{\partial\hat{y}}\left[\left(1+\alpha^2\hat{x}^2\right)\frac{\partial U}{\partial\hat{y}}\right],$$

где $A_{11}=1+\alpha^2\hat{y}^2;\ A_{12}=A_{21}=-\alpha^2\hat{x}\hat{y};\ A_{22}=1+\alpha^2\hat{x}^2$ а $\dfrac{\partial U}{\partial n_1}$ с учетом нормализованности функции $\omega_1(\hat{x},\hat{y})$ соответственно:

$$\sum_{j,k=1}^{2}A_{jk}\frac{\partial U}{\partial x_j}\cos(n,x_k)\Big|_{\partial\Omega}=$$

$$=\left(1+\alpha^2\hat{x}_2{}^2\right)\frac{\partial U}{\partial\hat{x}}\frac{\partial\omega_1}{\partial\hat{x}}+\left(1+\alpha^2\hat{x}_1{}^2\right)\frac{\partial U}{\partial\hat{y}}\frac{\partial\omega_1}{\partial\hat{y}}-\alpha^2\hat{x}_1\hat{x}_2\left(\frac{\partial U}{\partial\hat{x}}\frac{\partial\omega_1}{\partial\hat{y}}+\frac{\partial U}{\partial\hat{y}}\frac{\partial\omega_1}{\partial\hat{x}}\right)\Big|_{\partial\Omega}$$

В итоге мы пришли к эллиптическому уравнению второго порядка с двумя независимыми переменными $x_1=\hat{x},x_2=\hat{y}$ [3,4]:

$$-\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial U}{\partial x_k}\right)=f(x_1,x_2);\quad A_{jk}=A_{kj},\tag{7}$$

где A_{jk} — непрерывно дифференцируемая функция в конечной замкнутой области, с граничными условиями:

$$U\Big|_{\partial\Omega}=\varphi_1(x_1,x_2);\tag{8}$$

$$\sum_{j,k=1}^{2}A_{jk}\frac{\partial U}{\partial x_j}\cos(\nu,x_k)\Big|_{\partial\Omega}=\varphi_2(x_1,x_2);\tag{9}$$

$$\sum_{j,k=1}^{2}A_{jk}\frac{\partial U}{\partial x_j}\cos(\nu,x_k)+\sigma U\Big|_{\partial\Omega}=\varphi_3(x_1,x_2);\tag{10}$$

Таким образом, от трехмерных краевых задач (1)-(4) приходим к двумерным задачам (7)-(10). Если квадратичная форма $\sum_{j,k}A_{jk}t_jt_k$ положительно определена в $\Omega\cup\partial\Omega$ и $\sigma(P)\ge\sigma_0$, где σ_0 — положительная постоянная, то оператор задачи (7) с граничными условиями (8)-(10) является положительно определенным [4], что при применении метода Ритца обеспечивает сходимость по энергии.

Постановка задачи инициирована исследованиями, выполняемыми в отделе высокотемпературной термогазодинамики Института технической теплофизики НАН Украины по руководством члена-корреспондента НАН Украины Халатова А.А. [5]. В качестве примеров рассмотрим две задачи электростатики [1,6].

Два проводника ADB $\partial\Omega_1=(\omega_1(x,y)=0)$ и ACB $\partial\Omega_2=(\omega_2(x,y)=0)$ (Рис.2а) ограничивают цилиндрическую область $\Omega=(\omega(x,y)>0)$, которые после закручивания становятся: $\partial\Omega_{1b}=(\omega_{1b}(x,y,z)=0)$, $\partial\Omega_{2b}=(\omega_{2b}(x,y,z)=0)$, $\Omega_b=(\omega_b(x,y,z)>0)$.

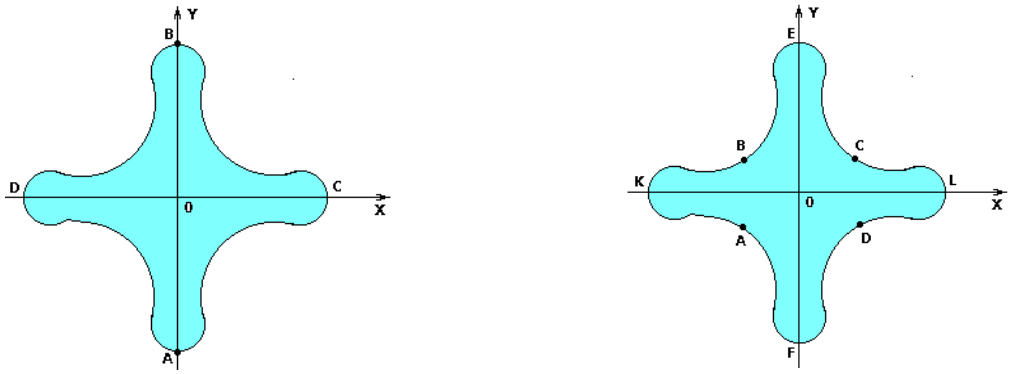


Рис. 2. Форма поперечного сечения проводника: a) ADB и ACB — электроды; b) AKB и CLD — электроды, BEC и AFD – изоляторы.

На проводнике ADB задан потенциал, равный минус единице, а на ACB — единице. Требуется определить потенциальную функцию $u(x,y,z)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа в Ω_b.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \\ u\Big|_{\partial\Omega_{1b}}=-1;\ \ u\Big|_{\partial\Omega_{2b}}=1 \end{cases} \tag{11}$$

2. Два проводника AKB $\partial\Omega_1=(\omega_1(x,y)=0)$ и CLD $\partial\Omega_2=(\omega_2(x,y)=0)$ и два изолятора BEC и AFD $\partial\Omega_3=(\omega_3(x,y)=0)$ (Рис.2b) ограничивают цилиндрическую область $\Omega=(\omega(x,y)>0)$, которые после закручивания становятся: $\partial\Omega_{1b}=(\omega_{1b}(x,y,z)=0)$, $\partial\Omega_{2b}=(\omega_{2b}(x,y,z)=0)$, $\partial\Omega_{3b}=(\omega_{3b}(x,y,z)=0)$, $\Omega_b=(\omega_b(x,y,z)>0)$, где функция $\omega_b(x,y,z)$ нормализована. Требуется определить потенциальную функцию $u(x,y,z)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа в Ω_b.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \\ u\Big|_{\partial\Omega_{1b}}=-1;\ \ u\Big|_{\partial\Omega_{2b}}=1;\ \ \dfrac{\partial u}{\partial n_1}\Big|_{\partial\Omega_{3b}}=0 \end{cases} \tag{12}$$

Представим решения этих задач в виде (5), в результате чего получим для задач (11) и (12) соответственно:

$$\begin{cases} (1+\alpha^2\hat{y}^2)\dfrac{\partial^2 U}{\partial\hat{x}^2}+(1+\alpha^2\hat{x}^2)\dfrac{\partial^2 U}{\partial\hat{y}^2}-2\alpha^2\hat{x}\hat{y}\dfrac{\partial^2 U}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}-\alpha^2\left(\hat{x}\dfrac{\partial U}{\partial\hat{x}}+\hat{y}\dfrac{\partial U}{\partial\hat{y}}\right)=0 \\ U\Big|_{\partial\Omega_1}=-1;\ \ U\Big|_{\partial\Omega_2}=1; \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} \left(1+\alpha^2\hat{y}^2\right)\dfrac{\partial^2 U}{\partial\hat{x}^2}+\left(1+\alpha^2\hat{x}^2\right)\dfrac{\partial^2 U}{\partial\hat{y}^2}-2\alpha^2\hat{x}\hat{y}\dfrac{\partial^2 U}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}-\alpha^2\left(\hat{x}\dfrac{\partial U}{\partial\hat{x}}+\hat{y}\dfrac{\partial U}{\partial\hat{y}}\right)=0 \\ U\Big|_{\partial\Omega_1}=-1;\ \ U\Big|_{\partial\Omega_2}=1; \\ \left(1+\alpha^2\hat{y}^2\right)\dfrac{\partial U}{\partial\hat{x}}\dfrac{\partial\omega_b}{\partial\hat{x}}+\left(1+\alpha^2\hat{x}^2\right)\dfrac{\partial U}{\partial\hat{y}}\dfrac{\partial\omega_b}{\partial\hat{y}}-\alpha^2\hat{x}\hat{y}\left(\dfrac{\partial U}{\partial\hat{x}}\dfrac{\partial\omega_b}{\partial\hat{y}}+\dfrac{\partial U}{\partial\hat{y}}\dfrac{\partial\omega_b}{\partial\hat{x}}\right)\Big|_{\partial\Omega_3}=0 \end{cases} \tag{14}$$

(В дальнейшем для простоты обозначений положим $\hat{x}=x;\ \ \hat{y}=y$.)

Для решения (13) с помощью RFM (R-functions method) была использована GSS (General Structure of Solution) [1,7,8]:

$$U=U0+U1;\ \ U0=\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1+\omega_2};\ \ U1=\omega\Phi, \tag{15}$$

где $\Phi=\Phi(x,y)$ — неопределенная компонента,

$\omega=(((f_1\vee_\alpha f_5)\vee_\alpha f_{10})\wedge_\alpha((f_3\vee_\alpha f_7)\vee_\alpha f_9))\wedge_\alpha((\bar{f}_4\wedge_\alpha\bar{f}_8)\wedge_\alpha(\bar{f}_2\wedge_\alpha\bar{f}_6))$ — функция локуса-границы области, $\omega_1=\sqrt{\omega^2\vee_0 x};\ \ \omega_2=\sqrt{\omega^2\vee_0(-x)}$ — функции, описывающие участки границы,

$$f_1=\frac{R_1^2-x^2-(y-a)^2}{2R_1};\ \ f_2=\frac{R_2^2-(x-a)^2-(y-a)^2}{2R_2};\ \ f_3=\frac{R_1^2-(x-a)^2-y^2}{2R_1};$$

$$f_4=\frac{R_2^2-(x-a)^2-(y+a)^2}{2R_2};\ \ f_5=\frac{R_1^2-x^2-(y+a)^2}{2R_1};\ \ f_6=\frac{R_2^2-(x+a)^2-(y+a)^2}{2R_2};$$

$$f_7=\frac{R_1^2-(x+a)^2-y^2}{2R_1};\ \ f_8=\frac{R_2^2-(x+a)^2-(y-a)^2}{2R_2};$$

$f_9=\left(\dfrac{a^2-x^2}{2a}\right);\ \ f_{10}=\left(\dfrac{a^2-y^2}{2a}\right)$ — опорные функции.

Для реализации метода Ритца путем замены (15) осуществляется переход к краевой задаче с однородными граничными условиями:

$$\begin{cases} \left(1+\alpha^2y^2\right)\dfrac{\partial^2U1}{\partial x^2}+\left(1+\alpha^2x^2\right)\dfrac{\partial^2U1}{\partial y^2}-2\alpha^2xy\dfrac{\partial^2U1}{\partial x\partial y}-\alpha^2\left(x\dfrac{\partial U1}{\partial x}+y\dfrac{\partial U1}{\partial y}\right)= \\ =-\left(\left(1+\alpha^2y^2\right)\dfrac{\partial^2U0}{\partial x^2}+\left(1+\alpha^2x^2\right)\dfrac{\partial^2U0}{\partial y^2}-2\alpha^2xy\dfrac{\partial^2U0}{\partial x\partial y}-\alpha^2\left(x\dfrac{\partial U0}{\partial x}+y\dfrac{\partial U0}{\partial y}\right)\right) \\ U1\Big|_{\partial\Omega_1}=0;\ \ U1\Big|_{\partial\Omega_2}=0; \end{cases} \tag{16}$$

и на линеале функций, им удовлетворяющих, строится функционал [3], эквивалентный данной краевой задаче (16).

$$I=\int_\Omega\left[(1+\alpha^2y^2)\left(\frac{\partial U1}{\partial x}\right)^2+(1+\alpha^2x^2)\left(\frac{\partial U1}{\partial y}\right)^2-2\alpha^2xy\frac{\partial U1}{\partial x}\frac{\partial U1}{\partial y}\right]dxdy+$$
$$+2\int_\Omega\left[(1+\alpha^2y^2)\frac{\partial U1}{\partial x}\frac{\partial U0}{\partial x}+(1+\alpha^2x^2)\frac{\partial U1}{\partial y}\frac{\partial U0}{\partial y}-\alpha^2xy\left(\frac{\partial U0}{\partial x}\frac{\partial U1}{\partial y}+\frac{\partial U0}{\partial y}\frac{\partial U1}{\partial x}\right)\right]dxdy. \tag{17}$$

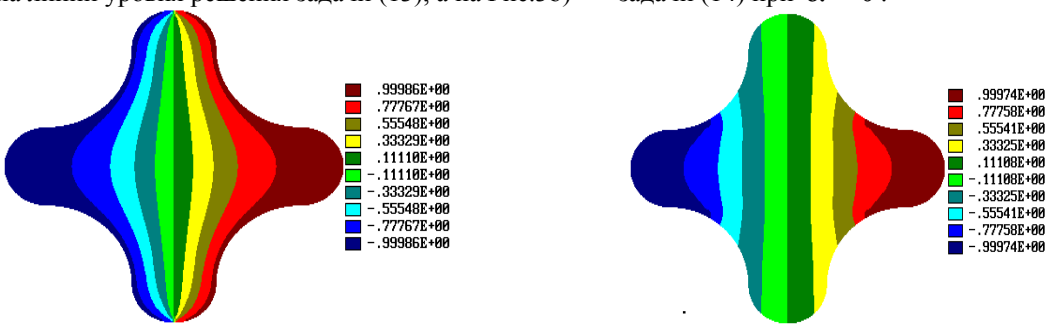
Учитывая, что условие

$$\left(1+\alpha^2 y^2\right)\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial \omega_b}{\partial x}+\left(1+\alpha^2 x^2\right)\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial \omega_b}{\partial y}-\alpha^2 xy\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial \omega_b}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial \omega_b}{\partial x}\right)\Bigg|_{\partial\Omega_3}=0$$

является естественным, при решении задачи (14) можно использовать прежнюю GSS (15) с новыми значениями функций ω, ω_i, где

$$\omega_1=\sqrt{\omega_o{}^2 \vee_0 (-x-a)};\ \ \omega_2=\sqrt{\omega_o{}^2 \vee_0 (x-a)};\ \omega=\omega_1 \wedge_0 \omega_2;$$
$$\omega_o=(((f_1 \vee_\alpha f_5)\vee_\alpha f_{10})\wedge_\alpha((f_3 \vee_\alpha f_7)\vee_\alpha f_9))\wedge_\alpha((\bar{f}_4 \wedge_\alpha \bar{f}_8)\wedge_\alpha(\bar{f}_2 \wedge_\alpha \bar{f}_6))$$

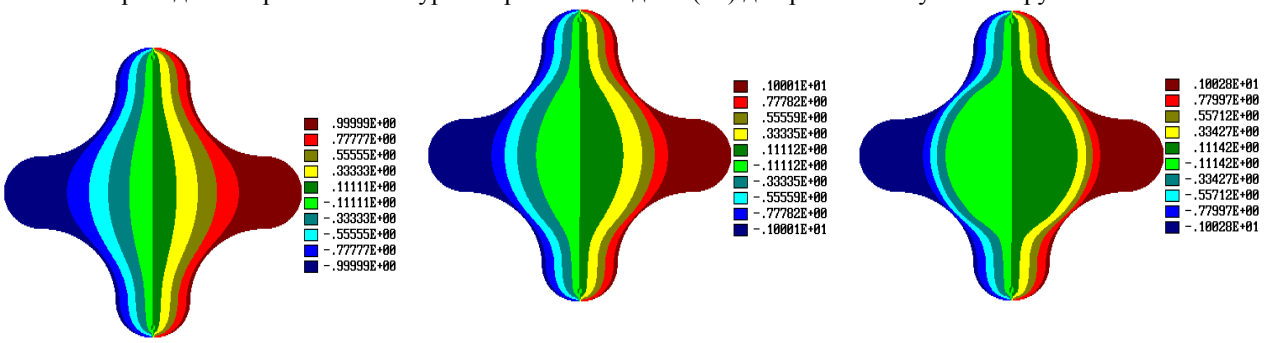
Аппроксимация Φ осуществлялась кубическими сплайнами ($m\times n=30\times 30$), и ниже представлены полученные в условиях эксплуатации системы ПОЛЕ картины линий уровня. На Рис.3a) приведена картина линий уровня решения задачи (13), а на Рис.3b) — задачи (14) при $\alpha=0$.



a) b)

Рис. 3. Картины линий уровня решений задач для нескрученного проводника:
a) задача (13); b) задача (14).

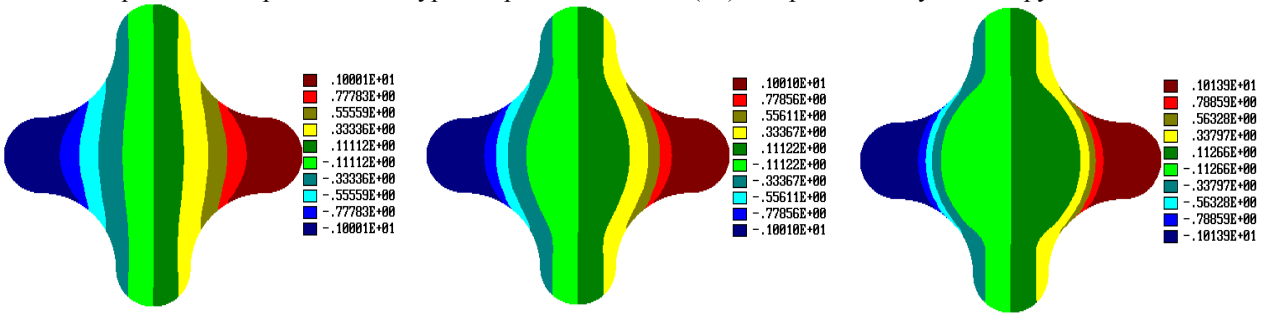
На Рис.4 приведены картины линий уровня решения задачи (13) для различных углов закрутки.



a) $\alpha=\frac{\pi}{4}$ b) $\alpha=\frac{\pi}{2}$ c) $\alpha=\pi$

Рис. 4. Картины линий уровня решения задачи (13) для различных углов закрутки.

На Рис.5 приведены картины линий уровня решения задачи (14) для различных углов закрутки.



a) $\alpha=\frac{\pi}{4}$ b) $\alpha=\frac{\pi}{2}$ c) $\alpha=\pi$

Рис. 5. Картины линий уровня решения задачи (14) для различных углов закрутки.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что малые углы закрутки, как и следовало ожидать, слабо влияют на картину поля. С ростом угла закрутки линии уровня в центральной зоне раздвигаются, что свидетельствует об образовании зон «плато» и больших градиентов. Особенно хорошо это видно на приведенных ниже графиках решений задачи (14) в сечении *y=0* (Рис.6), где I – график решения при $\alpha = 0$, II – при $\alpha = \pi$.

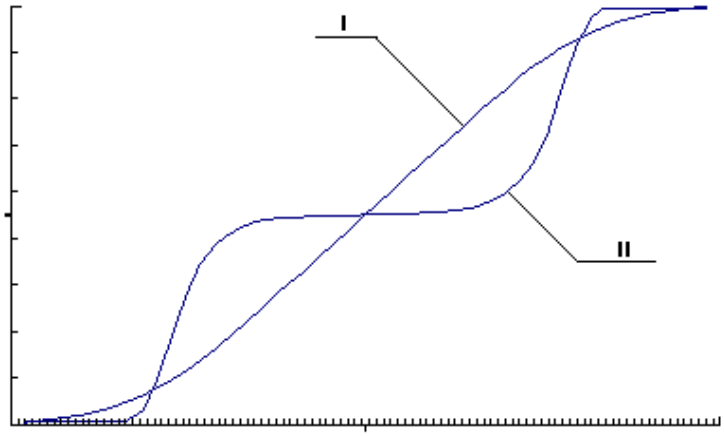


Рис. 6. Графики решений задачи (14) при различных углах закрутки в сечении *y=0*: I — $\alpha = 0$; II — $\alpha = \pi$.

Таким образом, некоторые классы трехмерных краевых задач для равномерно скрученных цилиндрических тел сложного профиля могут быть сведены к двумерным и эффективно решены с помощью RFM.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые её приложения. К., Наук. думка, 1982. – 552 с.
2. Рвачев В.Л., Толок А.В., Уваров Р.А., Шейко Т.И. Новые подходы к построению уравнений трехмерных локусов с помощью R-функций. // Вісник Запорізького університету, 2000, №2, с.119-130
3. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М., Наука, 1970. – 512 с.
4. Михлин С.Г. Прямые методы в метематической физике. – М.-Л., ГИТТЛ, 1950. – 428с.
5. Халатов А.А., Авраменко А.А., Шевчук И.В. Теплообмен и гидродинамика в полях центробежных массовых сил. В 4-х т. – Киев, Ин-т техн.теплофизики НАН Украины, 2000. -Т.3: Закрученные потоки. – 474 с.
6. Миролюбов Н.Н., Костенко М.В., Левинштейн М.Л., Тиходеев Н.Н. Методы расчета электростатических полей.— М.: Высшая школа, 1963. — 324с.
7. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М., Л., Гостехиздат, 1950. – 695 с.
8. Рвачев В.Л., Шейко Т.И., Шапиро В. Обобщенные интерполяционные формулы Лагранжа-Эрмита на произвольных локусах (интерлокационные операторы теории R-функций) // Проблемы машиностроения, 1998, №3-4, т.1, с. 150-165.